

► DIRECTION DES ETUDES ECONOMIQUES ET DE L'EVALUATION  
ENVIRONNEMENTALE

► DOCUMENT DE TRAVAIL

## **Arbitrages intertemporels, risque et actualisation**

*Stéphane GALLON et Emmanuel MASSE*

Série Méthodes  
N° 04-M02



Site internet : <http://www.environnement.gouv.fr>  
20 avenue de Ségur – 75302 Paris 07 SP

En 1985, le Commissariat Général du Plan a fixé à 8 % le taux d'actualisation pour les investissements publics<sup>1</sup>. Ce taux permet de comparer les flux de coûts et de recettes liés à un projet d'investissement ou à une décision publique, flux qui sont perçus à des dates différentes et qui n'ont donc pas la même valeur économique. Avec un taux de 8 %, on estime ainsi équivalent de recevoir 100 € une année ou 108 € l'année suivante. A l'aide de l'actualisation, on peut ramener tous les flux futurs à des flux équivalents perçus à la période présente, et sommer ces derniers pour trouver la valeur (dite *actualisée nette*) du projet considéré. Si cette valeur est positive, le projet est jugé rentable.

L'utilisation du taux de 8 % fait l'objet de débats : les conditions économiques sous lesquelles il a été fondé ont beaucoup évolué depuis 1985. En particulier, le niveau des taux d'intérêt est dans son ensemble aujourd'hui beaucoup plus faible qu'à l'époque. Par ailleurs, au motif de prendre en compte le risque inhérent à quelques projets publics dont les flux futurs sont très incertains, d'aucuns modifient parfois le taux d'actualisation (généralement dans le sens d'un accroissement du taux avec le risque). Au total, les choix publics se retrouvent valorisés de manière hétérogène. On trouve ainsi des estimations économiques fondées sur des taux différents (10 % ; 6 % ; 4 % ; 1 % voire 0 % à très long terme...) sans que l'utilisation de l'une ou de l'autre valeur soit clairement justifiée. Outre l'incohérence des choix effectués sur la base de taux différents, cette pratique est d'autant plus gênante que l'on constate généralement que le choix de la méthode d'actualisation, et du taux parmi l'ensemble des valeurs jugées possibles, conditionne la conclusion du calcul (réaliser ou non l'investissement...), le résultat y étant très sensible.

Il apparaît donc important de redéfinir la méthode d'actualisation à appliquer aux projets publics, ce qui nécessite de répondre à plusieurs questions : comment fixer le taux ? peut-on utiliser un taux d'actualisation unique ? comment prendre en compte le risque ? Pour répondre à ces interrogations, il faut revenir aux bases théoriques qui justifient l'utilisation d'un taux d'actualisation, et sur les observations empiriques qui donnent des indications sur les arbitrages intertemporels qui sont réalisés au sein de l'économie et donc sur la valeur numérique de ce taux.

On commencera cette note en se plaçant sous l'hypothèse simplificatrice que tous les flux futurs sont connus avec certitude, hypothèse qui sera levée ensuite. Cette note comprend cinq sections. La première rappelle brièvement en quoi consiste la méthode de la valeur actualisée nette telle qu'elle est traditionnellement utilisée. La seconde s'interroge sur la détermination empirique du taux d'actualisation par observation directe des décisions prises par les agents économiques, et montre l'incapacité de la VAN à rendre compte des comportements constatés. La troisième partie revient sur les fondements théoriques de la VAN, et sur la définition même du taux d'actualisation, en rappelant les hypothèses, fortes, sous lesquelles elle est valide. La quatrième partie expose les substituts disponibles à la détermination directe du taux d'actualisation de la collectivité. La dernière partie introduit le risque et traite le cas de l'incertitude sur les flux futurs.

---

<sup>1</sup> Il s'agit d'un taux réel, net de l'inflation.

## SOMMAIRE

<b>1. Utilisation du taux d'actualisation : la Valeur Actualisée Nette (VAN) offre une méthode pour déterminer s'il faut ou non réaliser un projet dont les conséquences s'étalent dans le temps.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Détermination empirique directe du taux d'actualisation : les comportements constatés chez les agents économiques ne sont pas explicables par la méthode de la VAN, aucun taux d'actualisation ne pouvant rendre ses conclusions compatibles avec la diversité des observations empiriques.....</b>	<b>6</b>
<b>3. Détermination théorique du taux d'actualisation : le taux d'actualisation est défini localement comme un taux de préférence psychologique portant sur les flux de revenus. La méthode de la VAN n'est donc valide que pour un projet modifiant marginalement les flux financiers et pour des flux réels (non monétarisation des externalités).....</b>	<b>8</b>
<b>4. Les substituts à l'observation directe du taux d'actualisation militent pour des taux réels de 2 %, décroissants avec le temps mais jamais nuls. ....</b>	<b>11</b>
4.1. Le taux d'intérêt .....	11
4.2. Effet richesse et préférence pure pour le présent.....	12
4.3. La décroissance du taux d'actualisation avec le temps .....	13
4.4. La rentabilité du capital productif.....	14
<b>5. La prise en compte du risque ne peut en aucun cas passer par un changement du taux d'actualisation.....</b>	<b>15</b>
5.1. La décision par maximisation de l'espérance d'utilité.....	15
5.2. Les critères de décision alternatifs .....	17
5.3. Les enseignements tirés des marchés d'actifs.....	19
5.4. Le cas des petits projets : neutralité au risque .....	25
5.5. Le cas des grands projets : quelle relation au risque pour la collectivité ? .....	25
<b>6. Conclusion : proposition pour l'actualisation publique .....</b>	<b>27</b>

**1. Utilisation du taux d'actualisation : la Valeur Actualisée Nette (VAN) offre une méthode pour déterminer s'il faut ou non réaliser un projet dont les conséquences s'étalent dans le temps.**

La méthode de la VAN, utilisée pour déterminer si un projet qui engendre des flux de dépenses et de recettes étalés dans le temps est rentable, repose sur trois étapes.

- La première consiste à déterminer le flux net de bénéfices qu'engendre le projet chaque année  $n$  :  $B_n$ . Dans le cas d'un projet public,  $B_n$  est un bénéfice économique qui comprend la monétarisation de tous les effets, y compris externes (bénéfices sanitaires liés à une moindre pollution et exprimés en euros, par exemple).
- La seconde étape consiste à sommer tous les bénéfices annuels, chacun se voyant pondéré par un facteur d'actualisation  $\delta_n$ , exogène. Ce facteur traduit le fait que recevoir un bénéfice d'1 € l'année  $n$  équivaut à recevoir  $\delta_n$  € immédiatement. Le résultat de cette somme est appelé VAN.

$$VAN = \sum \delta_n B_n$$

Le taux d'actualisation entre l'année  $n$  et  $n+1$ ,  $r_n$ , est défini par  $\delta_{n+1} = \frac{\delta_n}{1+r_n}$ . Quand pour tout  $n$  on a

$r_n = r$ , on désigne  $r$  comme étant « le » taux d'actualisation. Si ce taux vaut 8 %,  $\delta_n = \frac{1}{1,08^n}$ .

Plus le taux d'actualisation est grand, plus forte est la préférence pour le présent du décideur.

- La troisième étape consiste à exploiter le résultat donné par la VAN. Le projet est rentable si et seulement si sa VAN est positive. Par ailleurs, s'il est impossible de réaliser tous les projets à VAN positive (soit par impossibilité technique, soit du fait d'une contrainte de financement), il convient de retenir, parmi les combinaisons de projets réalisables, celle dont la VAN est maximale.

**Remarque importante :** la positivité de la VAN n'est un bon critère de choix que si l'ensemble des coûts et bénéfices est correctement tarifé. Par exemple, considérons le cas d'une route congestionnée que l'on envisage de doubler par un nouvel axe de transport. Si la VAN associée à ce projet de construction est positive par rapport à un scénario où la congestion sur l'ancien itinéraire ne fait l'objet d'aucun paiement par les usagers, rien ne garantit qu'il faille vraiment bâtir le nouvel axe. Autrement dit, face à une augmentation de la demande, le bon choix n'est pas nécessairement d'investir : il faut s'assurer au préalable que le coût de congestion est correctement tarifé.<sup>2</sup>

**Utilisation de la VAN et intégration de coûts et bénéfices non « réels ».**

On peut distinguer *a priori* trois types de flux :

- Les flux financiers ayant effectivement lieu (par exemple le paiement d'un soin) ;
- Les flux implicites (c'est-à-dire des flux mesurés implicitement par des opérations réelles autres que le projet d'investissement étudié), par exemple la mesure d'une décote liée à une exposition au bruit dans la vente d'un bien. Cette décote mesure correctement le coût du bruit ;
- Les coûts et les bénéfices mesurés par des consentements à payer (indépendamment de toutes opérations réelles).

<sup>2</sup> Le cas des autoroutes en Ile de France est symptomatique de cette situation : les externalités n'y sont pas tarifées ; les autoroutes sont congestionnées, alimentant des revendications pour la construction de nouvelles infrastructures de transport dont les VAN peuvent apparaître faussement positives car calculées par rapport à un scénario de trafic qui n'est pas le bon.

Faut-il inclure l'ensemble de ces flux réels ou potentiels dans le calcul de la VAN ?

Non car aucun modèle ne justifie a priori l'intégration des flux implicites et des consentements à payer dans le calcul de la VAN (cf. description des modèles sous-tendant le modèle de la VAN à la section 3) . Seuls les flux réels sont légitimes.

Comment dans ce cadre prendre en compte les externalités liées aux éventuels projets d'investissement ?

Les externalités ne sont à prendre en compte que dans la mesure où elles auront des conséquences financières réelles, c'est-à-dire qu'elles seront internalisées par la mise en place d'une taxation ou d'un marché.

Intégration des externalités et soutenabilité de la politique d'investissement de l'Etat

Comme on le développera ultérieurement (cf. section 4), l'intervention publique dans les choix d'investissement ne se justifie que si le bénéfice privé d'un projet diffère du bénéfice socio-économique public, autrement dit dans le cas d'externalités. Très fréquemment, l'Etat demandera la réalisation de projets jugés non rentables par le secteur privé mais qui sembleront souhaitables du point de vue collectif en raison d'externalités positives. Que l'Etat verse alors à l'opérateur privé chargé du projet une compensation pour ces externalités, ou que l'Etat prenne directement en charge lui-même la réalisation du projet, sa politique d'intervention ne sera pas soutenable si les externalités ne sont pas réellement tarifées.

Pour une discussion plus approfondie sur le rôle respectif du secteur privé et du secteur public dans le financement de l'économie, on pourra se référer à l'article de David Martimort et Jean-Charles Rochet, « Le partage privé-public dans le financement de l'économie ».

**2. Détermination empirique directe du taux d'actualisation : les comportements constatés chez les agents économiques ne sont pas explicables par la méthode de la VAN, aucun taux d'actualisation ne pouvant rendre ses conclusions compatibles avec la diversité des observations empiriques.**

Les choix que dicte la méthode de la VAN peuvent être comparés aux décisions effectivement prises par les agents économiques, soit qu'on les soumette à des expériences prévues à cet effet<sup>3</sup>, soit que l'on constate directement leur comportement<sup>4</sup>. Dès lors que les alternatives intertemporelles que doivent affronter les agents sont définies par des bénéfices  $B_n$  sûrs et parfaitement connus<sup>5</sup>, le seul paramètre pouvant influencer sur le choix est – dans la logique de la VAN – le taux d'actualisation. On peut donc rechercher quel est le taux qui permet de concilier la décision réellement prise par un agent et ce que prédit la méthode de la VAN.

Quand on se livre à ce type de comparaison, on observe des taux extrêmement variables d'un individu à l'autre, ce qui peut être interprété comme des simples écarts de préférence entre les agents économiques (certains individus sont plus impatientes que d'autres). Ce point peut s'avérer gênant quand il s'agit de définir les préférences de la collectivité (taux d'actualisation public) puisqu'il est difficile d'agréger des préférences individuelles contradictoires, mais il ne remet pas en cause la logique de la VAN agent par agent.

En revanche, il est beaucoup plus délicat de constater que, pour un même individu placé face à des alternatives de même horizon temporel, le taux  $r$  varie. On constate ainsi fréquemment des taux compris entre  $-6\%$ <sup>6</sup> et  $+\infty$ . De telles observations montrent en fait que les agents n'obéissent pas à la logique de la VAN.

L'explication en est claire : l'approche de la VAN ne reflète pas la complexité des comportements des agents individuels. Elle est trop simple car elle ramène l'ensemble des arbitrages intertemporels entre deux années à un unique taux, ce qui est beaucoup trop réducteur. Beaucoup d'autres effets psychologiques jouent dans l'attitude d'un agent économique face à l'avenir. Ces effets constatés et leur incompatibilité avec le modèle de la VAN sont détaillés dans l'encadré ci après.

**L'incapacité de la VAN à rendre compte des préférences empiriquement constatées**

La faillite de la méthode de la VAN peut s'interpréter par le fait que le facteur d'actualisation  $\delta_n$  n'est en fait pas exogène : la notion de préférence pour le présent d'un agent économique n'est pas absolue mais relative au problème intertemporel posé. Faire rentrer le comportement constaté dans le modèle de la VAN n'est possible qu'en changeant au cas par cas  $\delta_n$ . Par exemple, on constate empiriquement les effets suivants dans le comportement des agents.

EFFET DE SIGNE : actualisation plus forte des gains que des pertes ( $\delta_n$  dépend du signe de  $B_n$ ) ;

EFFET DE VALEUR : actualisation plus forte des petits montants ( $\delta_n$  dépend de  $|B_n|$ ) ;

EFFET DES ACTIFS REELS : à montant monétaire égal, actualisation différente selon l'actif dont la valeur est  $B_n$  (actualisation différente pour chaque bien de consommation, par exemple : bien de luxe, bien prioritaire...);

<sup>3</sup> Par exemple, face à des alternatives du type toucher 100 € maintenant ou 108 € l'an prochain.

<sup>4</sup> Par exemple, décision de sortie en rente ou en capital pour des retraités de l'armée américaine.

<sup>5</sup> En pratique, aucun agent économique (sauf peut-être l'Etat) n'étant certain d'exister dans le futur, le risque est inhérent aux choix constatés empiriquement. Toutefois, les observations concrètes ici considérées sont telles que cet effet est négligeable (alternative temporelle de très court terme).

<sup>6</sup> Un taux négatif traduit une préférence pour le futur.

PREFERENCE POUR L'ETALEMENT : 1 litre d'eau à boire chaque jour cette année plutôt que 365 litres aujourd'hui et rien après ; explication psychologique : besoins vitaux irrépessibles (cf. l'effet des actifs réels ci-dessus, et le fait que  $\delta_n$  dépend de toute la série des  $(B_k)$ ) ;

PREFERENCE POUR L'AMELIORATION : gagner 1000 € ce mois puis 2000 € le suivant, plutôt que l'inverse ( $\delta_n$  dépend de la série  $(B_k)$ ) ;

PREFERENCE POUR LE FUTUR : dîner avec sa star favorite dans une semaine plutôt que ce soir ; explication psychologique : satisfaction retirée de l'attente, de l'anticipation du plaisir ( $\delta_n$  dépend de la série  $(B_k)$ ) ;

INFLUENCE DU PASSE : si on a reçu en cadeau une dégustation de foie gras chacun de ces trois derniers jours, on préfère que l'on offre une nouvelle dégustation plus tard que ce soir ( $\delta_n$  dépend de la série  $(B_{-k})$ ) ; autre illustration : deux individus sont en retard d'une heure pour prendre l'avion, l'un des avions part à l'heure et l'autre avec 55 min. de retard, celui qui rate son avion de 5 min éprouve un plus grand mécontentement.

INFLUENCE DU MODE DE FINANCEMENT : la satisfaction retirée d'un bien dépend de son mode de financement (emprunt ou non).

La plupart des comportements relevés empiriquement dans l'encadré ci-dessus n'ont rien d'irrationnel et ne peuvent donc pas être rejetés. Ils ne constituent des anomalies que par référence au modèle de la VAN, modèle qui ne peut pas rendre compte de la réalité des choix individuels. Comme on peut le constater dans l'encadré, on pourrait songer à amender le modèle de la VAN pour mieux refléter certains (mais pas tous les) comportements des individus, et ce uniquement au prix de complications qui rendent la VAN difficilement utilisable en pratique pour prédire le comportement de tel ou tel agent ( $\delta_n$  dépend de très nombreux paramètres et ne peut donc pas être déterminé avant de calculer la VAN...).

Quand on passe au choix réalisé par un groupe d'individus – qu'il s'agisse des actionnaires d'une société privée ou de la collectivité (Etat) – il n'y a aucune raison pour que la méthode de la VAN soit satisfaisante :

- elle ne convient déjà pas au niveau individuel ;

- quand bien même les préférences de chaque individu seraient représentées simplement par un taux d'actualisation individuel, on ne peut pas les agréger pour définir un taux collectif<sup>7</sup>.

En particulier, on pourrait très bien imaginer que l'effet 'préférence pour l'amélioration' identifié dans l'encadré soit constaté au niveau collectif pour des sujets environnementaux, ce dont ne pourra jamais rendre compte une approche de type VAN.

Compte tenu du caractère manifestement insuffisant de la VAN, on peut s'interroger sur l'origine de cette méthode, ce qui nécessite de revenir aux modèles théoriques la sous-tendant, et à leurs hypothèses.

---

<sup>7</sup> Le paradoxe de Condorcet et le théorème d'impossibilité d'Arrow montrent l'impossibilité de définir des règles d'agrégation des préférences vérifiant les axiomes souhaitables (rationalité des préférences collectives, au sens de la transitivité des choix, etc.).

**3. Détermination théorique du taux d'actualisation : le taux d'actualisation est défini localement comme un taux de préférence psychologique portant sur les flux de revenus. La méthode de la VAN n'est donc valide que pour un projet modifiant marginalement les flux financiers et pour des flux réels (non monétarisation des externalités).**

Comme on va le voir, la méthode de la VAN découle en fait directement du modèle microéconomique de base du consommateur. Nous en supposons vérifiées les hypothèses habituelles (existence d'un pré-ordre sur les paniers de consommation, etc.) ce qui garantit l'existence des fonctions d'utilité.

Considérons donc un agent économique dont les préférences peuvent être traduites par une fonction d'utilité  $U(x_{i,n})$  où  $x_{i,n}$  est la quantité de bien  $i$  consommée l'année  $n$ . Les caractéristiques traditionnelles de la fonction  $U$  (quasi concavité...) sont très générales et ne préjugent en aucune façon de la manière dont l'agent considéré réalise des arbitrages intertemporels. Ainsi, on peut constater que aucune des « anomalies » au modèle de la VAN qui ont été décrites au §2 n'en est une à ce stade<sup>8</sup>. Elles sont en effet compatibles avec des préférences que peut traduire la fonction d'utilité (par exemple la fonction  $U$  peut très bien traduire une préférence pour le futur).

- **Un taux d'actualisation pour chaque bien à chaque période**

Une première manière d'écrire simplement, à l'aide de taux, les arbitrages intertemporels que traduit la fonction  $U$  consiste à définir le taux de préférence psychologique pour le présent concernant un bien donné. Ainsi, pour le bien  $i$  entre l'année  $n$  et l'année  $n+1$ , on peut définir un taux de préférence pour le présent  $\psi_{i,n}$  par l'intermédiaire du taux marginal de substitution suivant :

$$1 + \psi_{i,n} = \left. \frac{-dx_{i,n+1}}{dx_{i,n}} \right|_{U=\text{constante}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_{i,n}}}{\frac{\partial U}{\partial x_{i,n+1}}}$$

L'interprétation en est classique : pour le bien  $i$ , le consommateur est indifférent entre en gagner une unité à la date  $n$  et en gagner  $1 + \psi_{i,n}$  unités à la date  $n+1$ . Il est important de remarquer qu'il s'agit ici d'une définition locale (au voisinage d'un panier de consommation intertemporel), marginale (pour de petites variations), pour un individu fixé, pour un bien donné, et entre deux dates données. On est donc loin d'un taux d'actualisation commun à tous les biens et constant sur toutes les périodes. On remarquera ici que cette définition de  $\psi_{i,n}$  ne pose toujours aucun problème par rapport aux « anomalies » du §2. On peut en particulier actualiser de manière différente chaque bien de consommation, et  $\psi_{i,n}$  peut être négatif (préférence pour le futur).

- **Un taux d'actualisation pour les revenus à chaque période**

Pour passer à un taux d'actualisation au sens plus habituel du terme, c'est à dire appliqué à des flux financiers et non à des quantités de biens, on peut introduire le revenu  $R_n$  que le consommateur considéré touche à la période  $n$ , et le prix de chaque bien  $i$  à chaque période  $p_{i,n}$ <sup>9</sup>. En résolvant le programme de maximisation de l'utilité sous contrainte de budget, on trouve la fonction d'utilité indirecte  $V(R_n)$  qui donne le niveau d'utilité (maximum) qu'atteint le consommateur lorsqu'il reçoit la série de

<sup>8</sup> Sauf celle sur le mode de financement. Le modèle microéconomique de base repose sur l'idée que la satisfaction des consommateurs repose uniquement sur les biens consommés, pas sur le mode de financement qui permet d'atteindre le panier de consommation désiré.

<sup>9</sup> Rappel : par hypothèse simplificatrice dans cette section, toutes ces valeurs futures sont supposées connues avec certitude.

revenus  $R_n$ .<sup>10</sup> On peut alors définir un taux de préférence psychologique pour le présent concernant les revenus  $\psi_n$  aussi appelé taux d'escompte psychologique, à nouveau *via* un taux marginal de substitution

$$1 + \psi_n = \left. \frac{-dR_{n+1}}{dR_n} \right|_{V=\text{constante}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial R_n}}{\frac{\partial V}{\partial R_{n+1}}}$$

L'interprétation est là encore classique : le consommateur est indifférent entre recevoir 1 € à la date  $n$  et en recevoir  $1 + \psi_n$  à la date  $n+1$ . Il faut encore noter ici qu'il s'agit d'une définition locale (au voisinage d'une séquence de revenus), entre deux dates données. Elle n'est valable que pour les revenus réels, et non, par exemple, pour des effets externes valorisés.

Le résultat précédent légitime la méthode de la VAN, sous réserve de ne travailler que sur des projets modifiant marginalement les flux reçus par un agent économique, de ne prendre en compte que les flux réels (et non des valorisations d'externalités), et d'utiliser comme taux d'actualisation entre deux périodes le taux marginal de substitution de la fonction d'utilité indirecte. C'est ici un taux purement psychologique (découlant des préférences traduites par la fonction d'utilité).

- **Exemple : démonstration de la légitimité de la règle de la VAN dans un cas simple**

Pour mieux voir le lien entre ce qui précède et la méthode habituellement utilisée, et pour en retrouver le cadre habituel, prenons comme agent l'Etat (en supposant qu'il existe bien une fonction d'utilité collective) et traitons un cas simple où le projet à analyser ne joue que sur deux périodes. Supposons que la collectivité perçoive des flux  $R_n$ , et qu'elle envisage un projet se traduisant par des flux additionnels  $F_1$  et  $F_2$  petits devant  $R_1$  et  $R_2$ . La théorie économique nous dit qu'il faut entreprendre ce projet si et seulement si :

$$\begin{aligned} V(R_1 + F_1; R_2 + F_2; R_n) &\geq V(R_1; R_2; R_n) \\ \Leftrightarrow V(R_1; R_2; R_n) + F_1 \frac{\partial V}{\partial R_1} + F_2 \frac{\partial V}{\partial R_2} &\geq V(R_1; R_2; R_n) \\ \Leftrightarrow F_1 + F_2 \frac{\frac{\partial V}{\partial R_2}}{\frac{\partial V}{\partial R_1}} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow F_1 + F_2(1 + \psi_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme  $VAN \geq 0$  en prenant  $\psi_1$  comme taux d'actualisation.

Il faut ici rappeler que le projet envisagé doit être petit ( $\psi$  est défini localement et varie avec  $R_1$  et  $R_2$ ).

- **Comment déterminer le taux d'actualisation, *i.e.* le taux d'escompte psychologique à chaque période**

En théorie, la valeur du taux d'escompte psychologique découle de la spécification de la fonction d'utilité qu'il suffit donc de connaître pour trouver le taux d'actualisation à employer dans la VAN. C'est évidemment impossible en pratique, surtout pour un taux collectif : on ne peut ni connaître directement

---

<sup>10</sup> On ne fait ici aucune hypothèse sur la manière dont le consommateur peut, ou non, transférer des revenus d'une période sur l'autre. On conserve ainsi le cas le plus général. En ajoutant certaines hypothèses sur le marché financier (cf. §4) on peut montrer d'autres résultats intéressants, mais plus particuliers (lien entre taux d'actualisation et taux d'intérêt).

les préférences de la collectivité (aucun agent ne les porte<sup>11</sup>) ni les obtenir par agrégation des préférences individuelles (cf. §2).

Une alternative pourrait consister à poser normativement certaines valeurs, même de manière arbitraire. En effet, même s'il ne reflète pas correctement les préférences, l'emploi d'un taux précis présente un grand mérite : celui d'assurer la cohérence des choix.

Heureusement, faute d'observer directement la psychologie d'un décideur, on peut recourir à la théorie pour trouver des substituts permettant d'approcher le taux d'escompte psychologique, ce que détaille la section suivante. La limite de cette solution provient du fait, comme on va le voir, que ces substituts reposent sur des modèles théoriques qui ne sont guère validés empiriquement.

---

<sup>11</sup> De plus, les générations futures ne sont notoirement pas représentées.

**4. Les substituts à l'observation directe du taux d'actualisation militent pour des taux réels de 2 %, décroissants avec le temps mais jamais nuls.**

Différents modèles économiques permettent de relier le taux d'actualisation  $\psi$  (c'est à dire le taux d'escompte psychologique décrit à la partie 3) à d'autres paramètres empiriquement plus faciles à mesurer. On peut en particulier comparer les valeurs ainsi obtenues aux dernières préconisations du Commissariat Général au Plan, datant du milieu des années 1980, qui fixaient à 8 % le taux d'actualisation des projets publics.<sup>12</sup>

#### 4.1. Le taux d'intérêt

Sous certaines hypothèses, on peut montrer que le taux d'escompte psychologique  $\psi$  est égal au taux d'intérêt  $\rho$  sur le marché financier.

Pour rappeler la démonstration de ce résultat, et surtout les hypothèses qui le légitiment, considérons le modèle simple à un bien et portant sur deux périodes. Un consommateur cherche à maximiser son utilité  $U(C_1, C_2)$  en choisissant le niveau de consommation  $C_i$  à chaque période compte tenu de son revenu  $R_i$  à chaque période ( $i=1$  ou  $2$ ). Le prix  $p_i$  du bien de consommation à chaque période est connu à l'avance<sup>13</sup>. On suppose qu'il existe un marché financier permettant de transférer n'importe quelle valeur d'une période à l'autre avec un taux d'intérêt réel<sup>14</sup>  $\rho$ .

On vérifie facilement que la contrainte budgétaire s'écrit alors de la manière suivante :

$$p_1 C_1 + \frac{p_1 C_2}{1 + \rho} = R_1 + \frac{R_2}{1 + \rho}$$

Le terme de droite est le revenu actualisé, celui de gauche la dépense actualisée (au taux d'intérêt réel).

Pour maximiser  $U(C_1, C_2)$  sous la contrainte précédente, on peut utiliser la méthode de Lagrange. Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  associé à la contrainte doit alors vérifier

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} + \lambda p_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial C_2} + \lambda \frac{p_1}{1 + \rho} = 0$$

On en déduit facilement  $\frac{\partial U}{\partial C_1} = 1 + \rho$  soit

$$\psi = \rho$$

En conséquence, un consommateur maximisant son utilité sous contrainte intertemporelle de revenus ajuste sa consommation de telle sorte que son taux d'escompte psychologique soit égal au taux d'intérêt réel sur le marché des fonds prêtables. Avec plusieurs agents, l'équilibre sur le marché de l'offre et de la demande de fonds prêtables (sans risque) traduit dans ce cadre la préférence collective pour le transfert de richesse d'une période sur une autre.

De plus, le modèle ci-dessus a un atout majeur : il montre que tous les projets rentables peuvent être financés par appel au marché financier (parfait). Autrement dit, sous les hypothèses de ce modèle, l'Etat est sûr qu'il trouvera de quoi financer les projets dont la valeur actualisée nette au taux  $\psi = \rho$  est positive.

Ceci ne fonctionne toutefois que si les externalités sont tarifées et font l'objet de réels flux monétaires (cf. encadré à la section 1). Dans le cas contraire, la VAN financière pour l'Etat est négative, et les finances publiques sont entraînées dans un déficit non soutenable à terme.

---

<sup>12</sup> Rappelons qu'une valeur normative présente toujours l'avantage d'assurer la cohérence des choix de projets entre eux.

<sup>13</sup> On se situe toujours ici en certitude.

<sup>14</sup> En éliminant le taux d'inflation  $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ , l'emploi d'un taux réel facilite l'écriture de la contrainte budgétaire car le

prix  $p_2$  du bien en deuxième période n'apparaît plus contrairement à ce qui arriverait avec le taux nominal.

Les taux sans risque actuellement mesuré sur les marchés financiers pour une maturité de 10 ans est compris entre 3 et 4 % en terme nominaux (taux moyen pondéré de 4,43 % pour l'adjudication du 6/11/2003 des OAT (Obligations assimilables du Trésor) de maturité 10 ans). Le passage à des taux d'intérêt réels nécessite d'anticiper l'inflation future. Les OAT indexées sur l'inflation donnent des taux réels de 2,21 % à maturité juillet 2013.

L'approche par les taux d'intérêt est critiquable à plusieurs titres car le modèle sous-tendant l'égalité  $\psi = \rho$  connaît des défauts :

- Comme on l'a vu à la section 2, l'idée même d'un arbitrage intertemporel traduit uniquement par une fonction d'utilité  $U(C_1, C_2)$  est contredite par l'expérience ;
- L'hypothèse d'un marché financier parfait - c'est à dire où n'importe quel montant peut être transféré d'une période à l'autre au même taux - n'est pas vérifiée en pratique (la fiscalité des emprunts ou des placements perturbe le taux réel proposé aux agents ; le crédit est rationné, même pour les Etats avec les contraintes monétaires internationales) ;
- Le marché financier sans risque décrit est en pratique celui des emprunts d'Etat. C'est donc principalement la contrainte budgétaire de l'Etat qui fixe alors le taux d'actualisation et non l'inverse. On ne finance pas nécessairement tous les projets rentables mais ceux qui respectent la contrainte budgétaire. A l'opposé, on peut financer des projets non rentables parce que les taux sont faibles et l'argent facilement disponible.
- En outre, les taux d'intérêt ne sont pas concrètement disponibles pour des échéances supérieures à 30 ans, et on sait qu'ils varieront jusqu'à cette échéance (nous traiterons dans la partie 5 la question du caractère aléatoire des fluctuations des taux d'intérêt au cours du temps).

En résumé, les taux d'intérêt disponibles sur les marchés sont pertinents dans une optique financière (les taux sont définis à partir des besoins de financement de l'Etat), mais ils ne reflètent alors probablement pas les préférences intertemporelles de la collectivité.

#### 4.2. Effet richesse et préférence pure pour le présent

Sous certaines hypothèses, on peut montrer que le taux d'escompte psychologique  $\psi$  est égal à la somme de deux termes qui traduisent deux raisons pour lesquelles un agent est amené à préférer les consommations présentes : un effet richesse (le niveau de vie futur sera plus élevé ; donc un même surcroît marginal de consommation y apportera moins de satisfaction que maintenant) et une préférence pure pour le présent (plus difficile à expliquer psychologiquement<sup>15</sup>).

Pour rappeler la démonstration de ce résultat, et surtout les hypothèses qui le légitiment, reprenons le modèle simple à deux périodes en supposant de plus que la fonction d'utilité est de la forme :

$$U(C_1, C_2) = \frac{C_1^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{1}{1+r} \frac{C_2^{1-\mu}}{1-\mu}$$

L'idée –que nous détaillerons ultérieurement - est que le paramètre  $r$  est lié à la préférence pure pour le présent (à cause de  $r$ , un certain niveau de consommation dans l'avenir apporte moins de satisfaction qu'un niveau identique dans le présent) et que  $\mu$  mesure l'effet richesse (c'est à dire la décroissance de l'utilité marginale avec le niveau de consommation).

Par définition du taux d'actualisation  $\psi$ ,  $1 + \psi = \frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_2}}$  d'où

$$1 + \psi = (1+r) \left( \frac{C_2}{C_1} \right)^\mu$$

<sup>15</sup> En fait, cette préférence pure pour le présent peut provenir du fait que le consommateur sait qu'il mourra un jour. Cet argument n'a que peu de place pour l'Etat ou la collectivité au sens large (générations futures comprises). De plus, dans l'hypothèse de certitude retenue ici, l'inquiétude quant à sa finitude n'a pas à être retenue.

Si la croissance économique fait augmenter le niveau de consommation au taux  $\kappa$ , on obtient :

$$1 + \psi = (1 + r)(1 + \kappa)^\mu \approx 1 + r + \mu\kappa$$

d'où :

$$\boxed{\psi = r + \mu\kappa}$$

Il est donc légitime de décomposer le taux de préférence psychologique en deux éléments :

- L'effet richesse mesuré par le produit  $\mu\kappa$ , produit qui augmente avec la croissance de l'économie<sup>16</sup> et avec la décroissance de l'utilité marginale ;
- La préférence dite « pure » pour le présent  $r$ .

L'effet richesse correspond à la prise en compte de l'anticipation (au regard du passé) du niveau de vie des populations dans le futur. Etant plus aisé, un habitant dans le futur retire une moindre utilité de 1 € supplémentaire de revenu. Cela correspond à l'hypothèse habituelle d'utilité marginale décroissante. Pour estimer cet effet richesse, on peut prendre en compte le taux de croissance moyen du revenu par habitant sur des longues périodes ( $\kappa \approx 2\%$ ) et une sensibilité de la valorisation des biens aux variations de revenu ( $\mu = \frac{1}{2}$ ), soit un effet richesse d'environ 1 %.

La préférence pure pour le présent part de la constatation que les individus accordent dans la plupart des situations une plus grande importance au présent qu'au futur (voir §2). Si cette préférence pure n'était pas strictement positive (abstraction faite des autres composantes de la préférence pour le présent), on constaterait des taux d'épargne très supérieurs à ce qu'ils sont et les agents renonceraient à toute consommation présente pour consommer plus tard. Cette préférence pure est certainement faible, de l'ordre de 1 %.

En combinant ces deux éléments, on peut estimer un taux d'actualisation réel d'environ 2 %.

Cette approche est critiquable sous plusieurs aspects. D'une part les hypothèses théoriques (et en particulier les formes des fonctions d'utilité retenues) sont discutables. D'autre part, l'effet richesse et surtout la préférence pure pour le présent sont difficiles à évaluer. Les hypothèses sur la croissance future par tête à long terme sont discutables et discutées (modèles macro-économiques de long terme, croissance endogène, soutenabilité de la croissance actuelle ...), tout comme celles portant sur l'utilité marginale (celle-ci varie d'un individu à un autre, il est donc nécessaire d'agréger les fonctions d'utilité individuelles).

Finalement rien ne garantit avec cette approche le financement de l'ensemble des projets jugés rentables. En outre, le taux d'actualisation retenu risque de conduire à la substitution des investissements publics aux investissements privés dans la mesure où le taux retenu n'est pas nécessairement compatible avec ceux observés sur les marchés.

### 4.3. La décroissance du taux d'actualisation avec le temps

Dans un modèle de générations imbriquées, C. Henry montre que - dans la mesure où chaque génération ne s'intéresse qu'à son bien-être et à celui de ses enfants - l'ensemble des décisions inter temporelles qui sont prises sont équivalentes à celles que prendrait un planificateur à la date zéro, fixant les décisions pour tout l'avenir, à condition de prendre un taux d'actualisation décroissant avec le temps.

Le décroissance du taux d'actualisation est cohérente avec les constatations empiriques faites au §2.

Cette décroissance à très long terme du taux d'actualisation permet de prendre en compte les impacts dans un futur lointain sans pour autant hypothéquer la rationalité des taux à court et moyen terme qui doivent être cohérents avec ceux observés sur les marchés par exemple.

Le modèle développé présente néanmoins un caractère normatif, et les paramètres s'avèrent difficiles à estimer.

---

<sup>16</sup> A l'équilibre,  $\kappa$  est aussi le taux de croissance général de l'économie décrite ici.

## La difficile prise en compte des générations futures<sup>17</sup>

### ou l'impossibilité d'être équitable

Est-il possible de traduire en une seule valeur (un seul nombre) la satisfaction que retire la collectivité d'un flux d'utilités affectant chaque génération, présente et futures ? La réponse est négative dès lors que l'on demande au processus de calcul d'une telle valeur de vérifier l'axiome d'équité intergénérationnelle.

Autrement dit, dès que l'on accepte de résumer en une seule valeur présente toute une séquence de flux affectant des générations futures, on est condamné à faire l'hypothèse que certaines générations valent plus que d'autres, qu'un même bénéfice vaut moins pour certaines (actualisation non nulle).

La preuve mathématique de ce résultat s'obtient en modélisant le problème de la manière suivante. Considérons une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  d'utilités traduisant le fait que la génération  $i$  reçoit l'utilité  $u_i \in \mathfrak{R}$ . Attribuer à cette suite d'utilités générationnelles, une valeur présente pour la collectivité revient à chercher une fonction  $V$  qui à la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  attribue un réel  $v$ .

Il est naturel de demander que la fonction  $V$  vérifie l'axiome de Pareto : si toutes les générations gagnent plus (ou autant) avec la séquence  $(u'_n)_{n \geq 0}$  qu'avec la séquence  $(u_n)_{n \geq 0}$ , la valeur  $v'$  de la première séquence doit être supérieure (ou égale) à celle  $v$  de la seconde.

Comment traduire ensuite l'idée d'équité intergénérationnelle ? De la manière suivante : si, dans deux séquences  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(u'_n)_{n \geq 0}$ , les utilités de chaque génération sont les mêmes sauf pour deux générations ( $j$  et  $k$ ) où elles sont permutées, alors la fonction  $V$  doit attribuer à ces deux séquences la même valeur. Ceci revient à dire que la génération  $j$  compte autant que la génération  $k$ . Autrement dit, si  $u_j = u'_k$  et  $u'_j = u_k$ , et que  $\forall i \notin \{j; k\} u_i = u'_i$  alors  $v = v'$ .

On peut alors montrer qu'il n'y a aucune fonction  $V$  qui satisfasse simultanément cet axiome d'équité intergénérationnelle et celui de Pareto.

#### 4.4. La rentabilité du capital productif

L'équilibre du marché de l'épargne et de l'investissement conduit à l'équilibre entre le taux d'intérêt pour le financement d'un projet et la rentabilité marginale du capital productif. En effet, les projets dont la rentabilité marginale est supérieure au taux d'intérêt demandé par les épargnants sont réalisés, les autres non.

Dans la mesure où la rentabilité du capital productif présente un fort caractère aléatoire, il doit nécessairement être étudié dans un cadre prenant en compte l'incertitude. Nous renvoyons donc ce substitut à la section suivante (§5.3.3).

---

<sup>17</sup> « Aggregating infinite utility streams with intergenerational equity : the impossibility of being paretian », K. Basu, T. Mitra, *Econometrica*, Vol 71, n°5, Septembre 2003.

**5. La prise en compte du risque<sup>18</sup> ne peut en aucun cas passer par un changement du taux d'actualisation.**

Jusqu'à maintenant, ce document s'est limité au cas où les flux futurs étaient certains. Cette hypothèse est bien sûr très restrictive, l'incertitude jouant un rôle fondamental dans les critères de décision tant des individus que des pouvoirs publics. Dans certains cas (investissements de transport ou énergétiques à long terme, lutte contre le réchauffement climatique ...), la prise en compte du risque devient cruciale.

Après la modélisation essentiellement statique de la décision sous forme de résultat de la maximisation d'espérance d'utilité, le texte propose une discussion des critères de décision alternatifs (maximin gain, minimax regret) et quelques enseignements tirés des marchés d'actifs. Enfin, une distinction est faite entre petits et grands projets.

## **5.1. La décision par maximisation de l'espérance d'utilité**

### **5.1.1. Le modèle issu de l'axiomatique de Savage**

Leonard Savage dans les années 1940 met en évidence l'existence d'un jeu d'axiomes et démontre que, dans ce cadre, toute décision découle implicitement de la maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité, avec des probabilités (dites subjectives) attribuées aux différents scénarios à venir. La fonction d'utilité traduisant l'attitude du décideur vis à vis du risque est dite de Von Neuman Morgenstern (VNM).

En termes mathématiques, il existe une fonction d'utilité  $U$  (dépendant de la décision prise  $d \in D$  et de l'état de la nature) et une probabilité  $P$  sur les états de la nature, telles que toute décision résulte du programme mathématique suivant :

$$\text{Max}_{d \in D} E^P(U(d))$$

Cette approche semble *a priori* très prometteuse dans la mesure où elle exhibe un cadre cohérent pour décrire les décisions individuelles et collectives : si l'on admet que les axiomes de Savage sont satisfaits, alors il doit être possible de caractériser les décisions prises par un agent par une fonction d'utilité et par des probabilités de réalisation des scénarios futurs.

### **5.1.2. Les limites du modèle**

Malheureusement ce programme est de peu d'utilité pour déterminer la décision publique à prendre en cas d'incertitude, et ce en raison d'un certain nombre d'obstacles difficilement surmontables :

- Tout d'abord, il est légitime de mettre en cause la validité – notamment expérimentale - des axiomes de Savage. Si certains d'entre eux sont effectivement acceptables au regard de critères rationnels de décision (transitivité<sup>19</sup> des choix par exemple) certains autres, comme l'axiome dit « de la chose sûre »<sup>20</sup>, sont discutables. Par exemple, le paradoxe de l'urne d'Ellsberg montre expérimentalement que les individus ne se comportent pas en maximisateurs d'une espérance d'utilité selon l'axiomatique de Savage.<sup>21</sup>

---

<sup>18</sup> En théorie, on distingue le risque - qui correspond à un danger connu pondéré par une probabilité connue - de l'incertitude (situation où le danger ou la probabilité de survenance sont inconnus). Ici on ne tiendra pas compte de cette distinction.

<sup>19</sup> Malgré son caractère « évident », cette axiome n'est pas toujours vérifié empiriquement dans les décisions individuelles.

<sup>20</sup> L'axiome « de la chose sûre » affirme qu'un choix ne doit pas être modifié par l'ajout d'une même loterie à tous les scénarios envisagés. La remise en cause de cet axiome a conduit à généraliser la théorie de Savage par la notion d'ambiguïté. Cette dernière notion [Gilboa I. et Schmeidler D. « Maximin expected utility with non-unique prior », *Journal of Math. Economics*, 18, 1989] s'avère encore plus difficilement applicable en pratique.

<sup>21</sup> Dans cette expérience, on propose aux individus de parier sur la couleur de la boule qui va être retirée d'une urne opaque. Deux urnes leur sont proposées. La composition de la première (i.e. la proportion de boules de chaque couleur) est parfaitement connue ; dans la seconde, le joueur ignore cette répartition. On montre que les décisions prises sont incompatibles avec la maximisation d'une espérance de gain (aucune probabilité subjective sur la composition de la seconde urne ne permet d'expliquer les choix constatés).

- La détermination empirique des fonctions d'utilité et des probabilité subjectives implicites dans l'axiomatisation de Savage est très difficile, les fonctions d'utilité calculées se rapportant souvent à des situations de jeu ou de loterie peu compatibles avec les décisions réelles en situation complexe. Quant aux probabilités, il faut bien noter qu'il ne s'agit ici pas nécessairement de probabilités objectives ou historiques<sup>22</sup>.
- Quand bien même les individus obéiraient à l'axiomatique de Savage et que l'on pourrait trouver les fonctions d'utilité et les probabilité subjectives propres à chacun, l'agrégation de ces fonctions d'utilité individuelles (comme celle des probabilités subjectives) pour préciser une règle de décision pour la collectivité serait impossible. Le problème est comparable à celui évoqué dans la section 2 (le paradoxe de Condorcet montre à un niveau simple la difficulté liée à l'agrégation des préférences individuelles, Kenneth Arrow obtenant un résultat plus général en démontrant que tous les systèmes de vote, la dictature exceptée, conduisent à des décisions incohérentes).

Malgré ces défauts, l'approche de Savage fournit une approche intéressante du point de vue normatif.

### 5.1.3. La notion d'aversion pour le risque

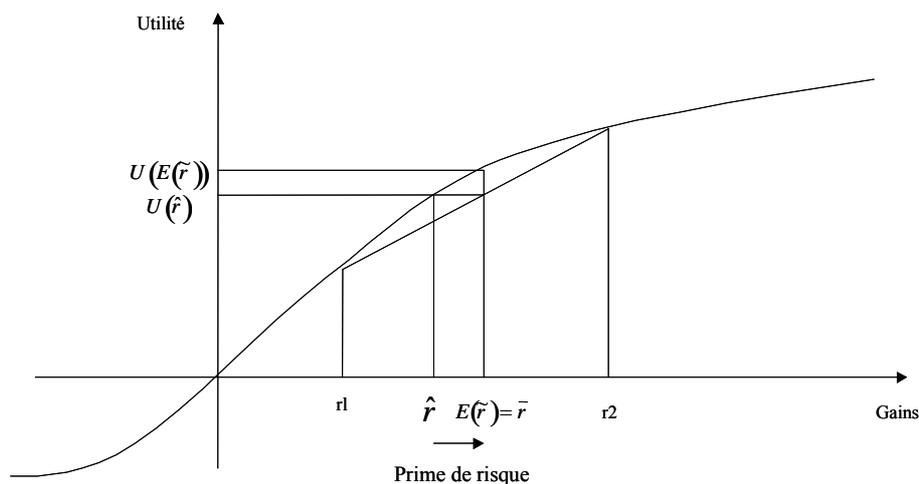
Malgré ses limites, l'approche de Savage permet d'introduire la notion d'aversion pour le risque.

#### Définition qualitative

Face à une loterie binaire (gain  $r_i$  avec probabilité  $\pi_i$ ,  $i=1,2$ ), on peut définir en effet :

- l'espérance de gain  $E(\tilde{r}) = \bar{r} = \sum_i \pi_i r_i$
- l'espérance d'utilité de gain  $E(U(\tilde{r})) = \sum_i \pi_i U(r_i)$
- l'équivalent certain  $\hat{r}$  tel que  $U(\hat{r}) = E(U(\tilde{r}))$
- la prime de risque  $\bar{r} - \hat{r}$

On peut représenter ces différents gains sur le graphique donnant l'évolution de la fonction d'utilité Von Neuman Morgenstern  $U$  selon le gain  $r$  (cf. exemple sur le schéma ci dessous, en prenant  $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ ).



<sup>22</sup> Une probabilité est dite historique ou objective si elle se fonde sur l'utilisation de la loi des grands nombres, ce qui suppose que l'on dispose d'un échantillon de données.

Quand la prime de risque est positive, le décideur est averse au risque (il préfère un revenu sûr à n'importe quel revenu aléatoire de même espérance). L'aversion au risque se traduit donc par la concavité de la fonction d'utilité Von Neuman Morgenstern.

Appréciation du risque	Prime de risque	$U''(r)$	$U$
Aversion	Positive	Négative	Concave
Neutralité	Nulle	Nulle	Affine
Goût	Négative	Positive	Convexe

#### Définition quantitative

L'aversion au risque est évaluée par le coefficient absolu d'aversion face au risque (Arrow-Pratt), coefficient local invariant par transformation affine de la fonction d'utilité :

$$\rho(r) = -\frac{U''(r)}{U'(r)}$$

Le terme en  $U''(r)$  traduit la concavité de la fonction d'utilité. Celui en  $U'(r)$  permet de s'affranchir du choix particulier d'une définition de  $U$  (les fonctions d'utilité VNM sont définies à une fonction affine près).

$\rho$  est d'autant plus grand que le décideur est averse au risque. Il est nul quand le décideur est neutre au risque, et négatif quand il est risquophile.

#### Remarques

- La définition de l'aversion au risque est locale (au voisinage de  $r$ ) et non globale. La valeur et le signe de  $\rho$ , peuvent varier tout au long de la courbe d'utilité. Il s'agit donc là encore d'une notion applicable au voisinage d'un niveau de revenus. Habituellement, un décideur est averse au risque à certains niveaux et risquophile à d'autres. Ce sont ces comportements risquophiles pour de faibles montants qui expliquent par exemple pourquoi une part importante de la population joue au loto, en dépit du fait que l'espérance de gain est négative.

- L'aversion au risque n'est définie que pour des loteries sur des gains. Autrement dit, cette notion est statique. Aucune notion d'aversion au risque n'a actuellement pu être définie en dynamique, notamment face à des flux futurs de revenus, et encore moins en cas d'acquisition progressive d'informations.

#### **5.1.4. Le taux d'actualisation**

L'approche de Savage sous les hypothèses et les limites que nous avons précisées précédemment définit un cadre complet de décision. Dans la mesure où l'on considère comme différents des biens consommés à des dates différentes, la fonction d'utilité définit implicitement les préférences intertemporelles de l'agent. Malheureusement, cette fonction peut être très complexe et rien ne permet d'affirmer que les choix intertemporels puissent être caractérisés par un seul paramètre non aléatoire : le taux d'actualisation.

### **5.2. Les critères de décision alternatifs**

Face à une décision à prendre en incertitude, chaque agent économique réagit selon sa psychologie et avec plus ou moins de rationalité. La diversité des comportements constatés peut s'expliquer par l'emploi de différents critères de décision.

Parmi ces derniers, on retient généralement ceux qui ont de bonnes propriétés, c'est à dire qui assurent notamment la transitivité des choix. On distingue en particulier le maximin du gain et le minimax du regret détaillés ci après. Dans les deux cas, on appelle  $\Omega$  l'ensemble des scénarios possibles  $\omega$  (états de la nature), et  $I$  l'ensemble des décisions possibles  $i$ . Le gain obtenu avec la décision  $i$  dans la situation  $\omega$  est noté  $V_{\omega}^i$ .

### 5.2.1. Maximin gain

L'attitude la plus « prudente » consiste à retenir le projet qui donne le meilleur retour dans la situation la plus défavorable. On retient alors le(s) projet(s)  $i^*$  tel(s) que  $i^*$  réalise(nt)  $\max_{i \in I} \left( \min_{\omega \in \Omega} (V_{\omega}^i) \right)$ . En d'autres termes, on a :

$$i^* \in \arg \max_{i \in I} \left( \min_{\omega \in \Omega} (V_{\omega}^i) \right).$$

Autrement dit, l'approche maximin de gain suppose d'anticiper que le pire va arriver et entend maximiser le gain obtenu dans le pire état de la nature envisageable. Le tableau ci dessous donne l'exemple d'un problème très simple.

Tableau des gains	Situation favorable	Situation défavorable
Choix peu risqué	0	0
Choix risqué	1 000	-500

Le choix « peu risqué » donne un gain minimal de zéro, contre un gain minimal de -500 pour le choix « risqué ». Le critère du maximin de gain conduit donc à privilégier le choix « peu risqué ».

### 5.2.2. Minimax regret

Une autre attitude consiste à minimiser les regrets possibles. Pour un état de la nature  $\omega$  et pour un projet  $i$ , le regret est l'écart entre la VAN du projet  $i$  dans cette situation  $\omega$  et la VAN du projet  $i_{\omega}$  qui aurait été le plus rentable dans cette situation  $\omega$ . En d'autres termes, pour un projet  $i$ , le regret s'écrit en fonction de la situation  $\omega$  effectivement rencontrée de la manière suivante :

$$\text{Regret}(\omega, i) = \max_{\tilde{i} \in I} (V_{\omega}^{\tilde{i}}) - V_{\omega}^i = V_{\omega}^{i_{\omega}} - V_{\omega}^i.$$

Le choix du minimax regret consiste alors à retenir le(s) projet(s)  $i^*$  tel(s) que  $i^*$  réalise(nt)  $\min_{i \in I} \max_{\omega \in \Omega} (\text{Regret}(\omega, i))$ . En d'autres termes, on a :

$$i^* \in \arg \min_{i \in I} \max_{\omega \in \Omega} (\text{Regret}(\omega, i))$$

Autrement dit, il s'agit d'un critère de décision visant non plus à limiter les conséquences de la situation la plus défavorable mais à minimiser le regret qui serait le plus élevé. Le regret est défini précisément comme la différence entre le maximum des gains qu'il aurait été possible de faire dans l'état de la nature donné et la situation étudiée. Cette approche présente l'avantage de prendre en compte les opportunités. Dans l'exemple simple précédent, le tableau des regrets s'écrit :

Tableau des regrets	Situation favorable	Situation défavorable
Choix peu risqué	1 000	0
Choix risqué	0	500

Le regret maximal est de 1 000 avec le choix peu risqué contre 500 pour le choix risqué. C'est ce dernier qui est donc préféré.

### 5.2.3. Avantages et inconvénients des critères alternatifs

Les critères alternatifs du Maximin de gain et du Minimax regret ne nécessitent pas de connaître les probabilités d'occurrence pour s'appliquer. Cela peut sembler au premier abord un avantage, dans la mesure où la détermination des probabilités des états futurs est parfois très difficile, mais cela conduit en

fait à des décisions trop « extrêmes » ou « simplistes ». En reprenant l'exemple exposé précédemment, si la probabilité que l'état défavorable se produise est infime, égale à  $10^{-10}$  par exemple, le comportement en maximin de gain semble difficilement acceptable, car l'événement « cas favorable » est pratiquement sûr de se produire. Ce critère traduit l'approche de précaution poussée à ses limites : aussi faible que soit un risque, il faut en tenir compte et agir en conséquence de sorte à minimiser les dégâts associés à cette situation. Il s'agit d'une demande de risque zéro, incompatible avec une prise de décision dans le monde réel<sup>23</sup>. Il en va de même avec le minimax regret où la peur de perdre une opportunité est tellement grande que l'on est prêt à prendre des décisions inconsidérées. Par ailleurs, pour éprouver un regret, encore faut-il savoir que l'on a perdu quelque chose, autrement dit connaître le gain que l'on aurait pu obtenir avec une décision plus adaptée à l'état de la nature. Tel n'est pas toujours le cas (par exemple, si l'on ne prend pas le risque de creuser un puits, on ne saura pas s'il y a du pétrole en sous-sol).

Enfin, les deux critères sont peu robustes, au sens où ils donnent un résultat excessivement sensible à la description des conséquences du scénario du pire (maximin gain) ou du scénario du meilleur (minimax regret).

### 5.3. Les enseignements tirés des marchés d'actifs

Plutôt que de s'intéresser à la décision de tel ou tel agent face à tel ou tel problème, on peut examiner directement comment sont valorisés collectivement les actifs présentant des risques (actions, etc.). En effet, dès lors que ces actifs sont échangés sur des marchés suffisamment parfaits, leur prix intègre l'appréciation collective des risques. On peut alors :

- trouver la valeur d'un projet en construisant des portefeuilles d'actifs cotés fournissant exactement les mêmes revenus dans les mêmes circonstances (§5.3.1.) ;
- s'inspirer du lien entre le risque et l'espérance de rentabilité des actifs cotés pour déterminer un taux d'actualisation compatible avec l'incertitude (§5.3.2.) ;
- exploiter l'espérance de rentabilité du capital productif (§5.3.3.).

Les deux premières méthodes amènent à présenter les deux grandes catégories de modèles pour la valorisation des actifs : la valorisation par équilibre et la valorisation par arbitrage.

#### 5.3.1. La valorisation par arbitrage<sup>24</sup>

Cette méthode consiste à trouver une combinaison d'actifs cotés ayant exactement les mêmes caractéristiques de profitabilité que le projet que l'on cherche à évaluer. La combinaison d'actifs trouvée et le projet sont alors deux biens économiques identiques : leur prix doit donc être le même et la valeur du projet n'est autre que le prix de la combinaison d'actifs (les actifs étant cotés, leur prix est connu).

On va détailler ci-dessous les fondements théoriques de cette méthode, et on en donnera un exemple d'application tiré du secteur financier. Le lecteur pressé, ou peu intéressé par les mathématiques financières, peut se contenter de retenir le principe sur lequel repose la méthode par arbitrage (cf. § ci dessus) et doit savoir qu'elle est d'application limitée dans le monde réel (faute d'actifs cotés permettant de construire la combinaison recherchée)<sup>25</sup>.

Sous des hypothèses de marché complet (on connaît le prix d'un ensemble d'actifs dits « primaires » et d'un actif sans risque) et d'absence d'opportunité d'arbitrage<sup>26</sup>, la valorisation d'un projet peut être réalisée par la construction d'un portefeuille d'actifs primaires donnant à chaque période les mêmes gains dans les mêmes états de la nature<sup>27</sup>. Le prix du portefeuille répliquant est alors la valeur économique du projet

<sup>23</sup> Surtout que, en pratique, il y a des risques tant à prendre une décision qu'à rester dans l'inaction.

<sup>24</sup> La terminologie de valorisation par arbitrage fait référence à l'utilisation de la propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés pour la valorisation d'un actif.

<sup>25</sup> La méthode par arbitrage fonctionne toutefois bien pour certains projets, dans le secteur pétrolier par exemple : on peut trouver des actifs cotés dont la possession équivaut au développement et à l'exploitation d'un champ pétrolifère...

<sup>26</sup> On dit qu'il existe une situation d'arbitrage sur un marché quand il est possible de faire un gain strictement positif sans prendre aucun risque. Une telle situation n'est bien entendu pas pérenne.

<sup>27</sup> La composition du portefeuille peut varier au cours du temps pour respecter cette contrainte, l'hypothèse de complétude des marchés assure qu'un tel portefeuille existe

envisagé. Cette approche présente l'avantage fondamental de ne nécessiter que la connaissance du prix de l'actif sans risque<sup>28</sup> pour évaluer un projet intertemporel.

On peut alors démontrer que la valeur du projet correspond aux flux futurs actualisés au taux d'intérêt sans risque sous des probabilités dites « risque-neutres ». On se situe donc bien dans le cadre de la maximisation de l'espérance de VAN. Ceci équivaut à une fonction d'utilité qui s'écrit comme une VAN au taux sans risque et avec des probabilités calculables (elles dépendent du prix des actifs primaires et des probabilités associées aux états du monde).

L'encadré ci-dessous détaille un exemple d'application de cette méthode.

### Exemple de valorisation par arbitrage

On va appliquer cette méthode pour trouver la valeur d'une option d'achat sur un actif risqué, par exemple une option d'achat sur une action France Telecom. L'option d'achat considérée est un titre qui donne le droit, mais pas l'obligation, d'acquérir l'année prochaine l'actif (une action France Telecom) pour un prix fixé à l'avance (disons 100 euros). Evidemment, si l'action France Telecom vaut moins de 100 euros l'an prochain, 90 euros par exemple, l'option ne servira à rien et son prix sera nul. En revanche, si l'action France Telecom vaut plus de 100 euros l'an prochain, disons 120 euros par exemple, l'option sera intéressante à utiliser et aura une valeur positive (120-100=20 euros dans l'exemple pris ici). S'il est donc facile de déterminer le prix de l'option dans un an (à son échéance) en fonction du cours de son sous-jacent (l'action France Telecom), il est plus difficile de trouver son prix actuel. Le réflexe naturel pour trouver ce dernier consiste généralement à écrire que le prix actuel de l'option est égal à l'espérance actualisée de sa valeur future mais – comme on va le voir – la méthode par arbitrage permet en fait de trouver directement la valeur actuelle sans se préoccuper de fixer un taux d'actualisation.

Considérons donc un actif risqué valant 100 à la date 0, et dont la valeur à la date 1 est aléatoire, avec une probabilité 0,5 de valoir 120 et une probabilité 0,5 de valoir 90. On cherche à calculer le prix à la date 0 d'une option d'achat sur l'actif risqué, d'échéance un an et de prix d'exercice 100. Cette option vaut évidemment 20 à la date 1 si le sous-jacent (l'actif risqué) vaut 120 et 0 dans le cas contraire. On suppose en outre l'existence d'un actif sans risque ayant un rendement fixe de 3 % (penser aux bons du Trésor...). Le tableau suivant résume cette situation :

Valeur à la date 1	Etat haut	Etat bas
Actif sans risque	103	103
Actif risqué	120	90
Option	20	0

Pour valoriser l'option à la date 0, on cherche à constituer un portefeuille constitué de l'actif risqué et de l'actif sans risque qui, à la date 1, donne les mêmes flux que l'option. Essayons donc un portefeuille constitué de  $\delta$  actifs risqués et  $\lambda$  actifs sans risque (nous allons déterminer  $\delta$  et  $\lambda$  pour que ce portefeuille convienne). Les équations suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que ce portefeuille ait les mêmes flux que l'option à la date 1 :

$$\begin{cases} \delta * 103 + \lambda * 120 = 20 \\ \delta * 103 + \lambda * 90 = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{20 - 0}{120 - 90} = \frac{2}{3} \\ \delta = -\frac{90}{103} * \lambda = -\frac{60}{103} \end{cases}$$

<sup>28</sup> Le taux d'actualisation sans risque est facilement mesurable sur les marchés, il correspond au taux d'intérêt des emprunts d'Etat (dans la mesure où ces Etats sont estimés fiables économiquement, principalement les pays du G7).

Avec ces valeurs pour  $\delta$  et  $\lambda$ , le portefeuille réplique bien l'option. (On peut remarquer que  $\delta$  est négatif : cela n'est pas gênant ; le portefeuille répliquant contient une dette en actif risqué<sup>29</sup>.)

La valeur de l'option (en raison de l'absence d'opportunité d'arbitrage) est alors égale à la valeur en zéro du portefeuille répliquant :

$$V_0 = 100 * \frac{2}{3} - 100 * \frac{60}{103} \\ \approx 8,14$$

Il est aisé de vérifier que la valeur de l'option est égale à l'espérance de valeur actualisée en prenant comme taux d'actualisation le taux sans risque de 3 % et comme probabilités les valeurs  $q_+$  et  $q_-$  définies par :

$q_+ = \frac{1+r-d}{u-d}$  ;  $q_- = \frac{u-1-r}{u-d}$  avec  $u$  (*up*) et  $d$  (*down*) définis comme la valeur de l'actif risqué à la date 1 sur sa valeur à la date 0 pour les états haut et bas respectivement (ici :  $u = \frac{120}{100}$  ;  $d = \frac{90}{100}$  d'où  $q_+ = \frac{13}{30}$  et  $q_- = \frac{17}{30}$ ).

On vérifie facilement que  $q_+ + q_- = 1$  (d'où le fait que ces deux grandeurs soient assimilables à des probabilités). On les appelle probabilités risque - neutres et on vérifie facilement qu'elles n'ont rien à voir avec les probabilités historiques égales ici à 0,5 et 0,5.

Finalement on vérifie bien que :

$$V_0 = \frac{1}{1+r} [q_+ \cdot V_1^+ + q_- \cdot V_1^-] \\ = \frac{1}{1+0,03} \left( \frac{13}{30} * 20 + \frac{17}{30} * 0 \right) \\ \approx 8,14$$

En conclusion, l'approche par arbitrage permet de trouver directement la valeur d'un projet sans passer par le calcul d'une espérance actualisée, mais la valeur à laquelle cette méthode conduit est équivalente à une espérance de VAN à condition de prendre comme taux d'actualisation le taux sans risque et comme probabilités des probabilités dites risque - neutres (sans rapport avec les probabilités historiques).

L'approche par arbitrage, quoique très prometteuse, trouve ses limites dans l'hypothèse de l'existence d'un marché complet, peu réaliste pour certaines problématiques (par exemple : santé, environnement). Le développement des marchés financiers (obligations sur les catastrophes naturelles, marché de quota d'émission ...) permet néanmoins d'espérer élargir le champ d'utilisation de cette méthode.

### 5.3.2. La valorisation par équilibre<sup>30</sup> (le Modèle d'Estimation Des Actifs Financiers - MEDAF<sup>31</sup>)

Il est assez naturel de supposer que, à espérance de rentabilité donnée, un investisseur préfère une plus faible volatilité ou, ce qui est équivalent, qu'à volatilité donnée, on préfère le placement dont l'espérance de rentabilité est la plus forte. Par exemple, si l'on peut placer son argent sans risque à 3 % qui acceptera un investissement risqué dont l'espérance de rentabilité est de 2 % ?

Admettre cette hypothèse, qui paraît naturelle, suffit en fait à déterminer le prix de tous les actifs. Plus précisément, on est capable de relier l'espérance de rentabilité que doit offrir un actif à la volatilité de cette

<sup>29</sup> On parle de position « short » en langage financier.

<sup>30</sup> La terminologie de valorisation par équilibre se réfère à l'utilisation d'un modèle d'équilibre pour l'ensemble des agents. Les modèles de valorisation par équilibre sont plus contraints que les modèles par arbitrage (voir §5.3.1 ou le modèle APT, Arbitrage Pricing Theory), ils donnent donc des résultats plus précis (prix de l'ensemble des actifs) mais plus discutables. Il est à noter en particulier que le modèle MEDAF n'est pas applicable à un actif non coté sur les marchés (c'est-à-dire ne faisant pas partie du portefeuille de marché).

<sup>31</sup> Capital Asset Pricing Model (CAPM) en anglais.

rentabilité. On propose ci-dessous la présentation mathématique du modèle – le MEDAF – sur lequel repose ce résultat. Le lecteur non féru de mathématiques financières peut se contenter de retenir l'idée que, plus un actif est risqué (au sens relatif : par rapport aux autres actifs), plus il doit servir une rentabilité élevée en espérance.

A partir d'hypothèses sur le comportement des agents (arbitrage entre la moyenne d'une rentabilité et sa variance) et donc d'une spécification de leur fonction d'utilité, il est possible de modéliser le prix de l'ensemble des actifs (il n'y a plus ici - contrairement au cas de la valorisation par arbitrage -) deux catégories d'actifs : primaires dont le prix est connu, et secondaires ou dérivés dont le prix est inconnu).

La valeur d'un actif, ou d'un projet, est alors donnée par l'espérance actualisée  $E\left(\sum_{i=0}^n \frac{B_i}{(1+\mu)^i}\right)$  où  $B_i$  est le flux de revenu net à la date  $i$  et où le taux d'actualisation  $\mu$  est donné par la formule suivante (une interprétation intuitive en est proposée juste après) :

$$\mu = r + \frac{\text{Cov}(\tilde{p}_{ref}, \tilde{p})}{\text{var}(\tilde{p}_{ref})} (\mu_{ref} - r)$$

où  $\tilde{p}_{ref}$  correspond au rendement (aléatoire) d'un portefeuille de référence (défini comme celui de l'ensemble des actifs),  $\tilde{p}$  au rendement (aléatoire) du projet considéré,  $r$  au rendement (certain) de l'actif sans risque et où  $\mu_{ref}$  est l'espérance de rendement du portefeuille de référence. Le coefficient  $\frac{\text{Cov}(\tilde{p}_{ref}, \tilde{p})}{\text{var}(\tilde{p}_{ref})}$  est généralement noté  $\beta$ .

La formule précédente, qui peut paraître compliquée, traduit en fait une idée simple : l'espérance de rentabilité d'un actif ( $\mu$ ) est la somme de la rentabilité de l'actif sans risque ( $r$ ) plus une prime de risque. Cette dernière est le produit de l'écart de taux moyen<sup>32</sup> du marché ( $\mu_{ref} - r$ ) par un facteur traduisant le risque relatif de l'actif considéré ( $\frac{\text{Cov}(\tilde{p}_{ref}, \tilde{p})}{\text{var}(\tilde{p}_{ref})}$ ), le terme 'relatif' signifiant 'par rapport à la moyenne de tous les actifs'.

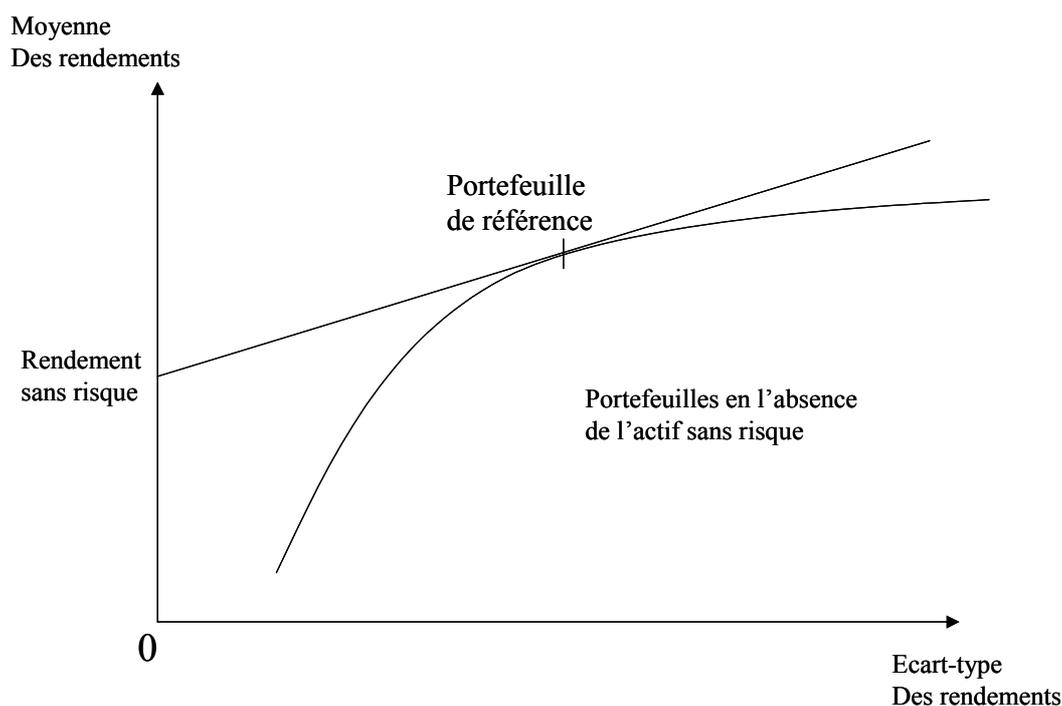
On peut aussi interpréter cette formule de la manière suivante, en s'intéressant à un actif qui ne serait pas corrélé avec l'actif de référence : l'écart ( $\mu - r$ ) est le produit de la prime de risque moyenne du marché égale à  $\frac{(\mu_{ref} - r)}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{p}_{ref})}}$  par un facteur  $\sqrt{\text{var}(\tilde{p})}$  quantifiant le risque de l'actif étudié.

Le cas d'un actif quelconque, un peu plus difficile, fait quant à lui intervenir la corrélation entre l'actif étudié et l'actif de marché, l'écart de rendement étant alors égal au produit de la prime de risque, du coefficient de corrélation et de la volatilité de l'actif :

$$\mu - r = \frac{\text{Cov}(\tilde{p}_{ref}, \tilde{p})}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{p}_{ref})\text{Var}(\tilde{p})}} \frac{(\mu_{ref} - r)}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{p}_{ref})}} \sqrt{\text{var}(\tilde{p})}$$

Comme l'illustre le graphique ci-dessous, un actif caractérisé par  $(\sqrt{\text{Var}(\tilde{p})}, \mu)$  et non corrélé avec l'actif de marché est nécessairement sur la droite de marché qui relie l'actif sans risque  $(\sqrt{\text{Var}(\tilde{p})} = 0, \mu = r)$  et le portefeuille de référence  $(\sqrt{\text{Var}(\tilde{p}_{ref})}, \mu = \mu_{ref})$ .

<sup>32</sup> Cet écart de taux est parfois abusivement appelé « prime de risque ». Dans sa définition, la prime de risque prend également en compte la variabilité des rendements du portefeuille de marché. En supposant, par exemple, que l'écart de rendement entre l'actif de marché et l'actif sans risque est fixé, la prime de risque diminue avec la variabilité du portefeuille de marché. Ce qui se traduit en disant que, dans un marché en moyenne très volatil, la prime de risque est moins élevée : familier d'une forte volatilité les agents rémunèrent moins celle-ci. La prime de risque est un coefficient de rémunération du risque (mesuré dans le modèle du MEDAF par la volatilité des actifs).



On peut trouver le même type de graphique en portant en abscisse le paramètre  $\beta$  : une droite de marché relie l'espérance de rentabilité d'un actif à  $\beta$ .

Le taux d'actualisation dépend donc finalement uniquement de la corrélation entre le rendement du projet et l'actif de marché, le taux d'actualisation est d'autant plus faible que le rendement du projet est anti-corrélé avec celui du portefeuille de référence.

La détermination du paramètre  $\beta$  se fonde généralement sur des données historiques d'évolution des rendements de l'actif étudié (ou d'un actif proche) et du portefeuille de référence (comme approximation de celui-ci on peut utiliser les indices des marchés, par exemple le CAC40, indice des 40 premières valeurs de la bourse de Paris). Les actifs réels<sup>33</sup> comme la qualité de l'environnement, ne sont pas inclus dans le portefeuille de référence. Toutefois, il est par exemple assez naturel de penser que la pollution automobile est corrélée à la consommation des ménages donc à l'ambiance macroéconomique générale et au portefeuille moyen du marché. A un autre extrême, le rendement d'un projet d'investissement dans un programme de prévention du tabagisme est aléatoire mais non corrélé a priori avec le rendement du portefeuille de référence donc son  $\beta$  est nul (son taux d'actualisation devrait alors être le même que celui du portefeuille de référence).

Cette approche principalement utilisée dans la gestion de portefeuille d'actifs financiers présente l'inconvénient de n'être adaptée que dans le cas où les projets étudiés sont marginaux et n'influencent pas la composition du portefeuille de référence. De plus, on peut se demander pourquoi l'Etat devrait se comporter comme des investisseurs privés (mêmes préférences, même arbitrage moyenne-variance). En outre les taux donnés par l'observation des marchés financiers sont très fluctuants.

### 5.3.3. La rentabilité du capital productif

Comme nous l'avons rappelé dans la section 4, le taux d'actualisation psychologique doit - sous certaines hypothèses - être égal au taux d'intérêt sur le marché financier. Par ailleurs, l'arbitrage entre l'épargne et l'investissement conduit à l'équilibre à une égalité entre le taux d'intérêt financier et la rentabilité (marginale) du capital. Or on constate en pratique que la rentabilité du capital observée est nettement plus élevée que le taux d'intérêt financier. La raison en est simple :

<sup>33</sup> C'est à dire ne faisant pas l'objet de cotations sur les marchés.

- a) l'égalité entre taux d'intérêt et rentabilité du capital ne vaut qu'en certitude alors que la rentabilité du capital est en pratique aléatoire (la fiscalité du capital vient également perturber l'égalité théorique) ;
- b) ce que l'on observe empiriquement n'est généralement pas la rentabilité marginale du capital mais la rentabilité moyenne.

Autrement dit, il convient d'être très prudent quand on essaie d'approcher le taux d'actualisation par la rentabilité du capital. La rentabilité du capital investi dans un projet précis est incertaine, varie de projet à projet, et au niveau agrégé auquel se font les observations, on obtient une rentabilité du capital qui est une moyenne de rentabilités disparates et variables intégrant des primes de risque. Il n'est donc pas possible d'utiliser les observations venant de la rentabilité du capital sans définir un cadre théorique tenant compte de l'incertitude.

Une première idée peut consister à relier la rentabilité du capital investi à celle des actions qui assurent le financement de l'investissement (actions pour lesquelles on dispose d'un cadre théorique convenable et de données (cf. §5.3.2.)). Ainsi, en observant la rentabilité des titres, on obtiendrait la rentabilité des investissements productifs. Toutefois, les investissements sont financés non seulement par actions mais aussi par endettement<sup>34</sup>. Cela renvoie au Coût Moyen Pondéré du Capital (CMPC) qui peut apparaître comme un taux d'actualisation légitime et qui, de fait, est utilisé par certaines entreprises. Nous ne nous étendrons pas sur le CMPC dans la mesure où il est manifestement hors de propos pour les choix publics (financement différent). Par ailleurs, le taux fourni par le CMPC présente le défaut d'être excessivement variable avec la valorisation boursière de l'entreprise et donc d'être lui-même incertain.<sup>35</sup>

En fait, la rentabilité du capital conduit qualitativement aux mêmes arguments que la rentabilité des titres financiers (MEDAF au §5.3.3). L'investissement présente généralement un caractère risqué ; dans ce cas l'aversion au risque de l'investisseur conduit celui-ci à demander une prime de risque pour l'argent investi, qu'il s'agisse d'actions ou de créances. Les taux dépendent donc du niveau de risque de l'investissement.

Pour obtenir le taux de rendement financier d'un actif, il convient d'ajouter le profit additionnel que l'investisseur attend de son placement. Schématiquement on a la décomposition :

Taux d'intérêt sans risque	+	Prime de risque	+	Marge	=	Taux de rendement financier <sup>36</sup>
----------------------------	---	-----------------	---	-------	---	---

On constate que le taux de rentabilité net du capital varie d'un secteur à l'autre de l'économie : d'environ 13 % pour les industries des biens d'équipement en 2001, il se situe aux environs de 4 % pour les transports et l'énergie<sup>37</sup>.

Au total, il semble peu pertinent d'utiliser ces taux observés pour fonder le taux d'actualisation :

- ce ne sont pas des taux marginaux mais moyens ;
- ils sont variables et reflètent plus les contraintes actuelles de marché des entreprises sous-jacentes que des arbitrages intertemporels.

Toutefois, cette approche permet de prendre en compte le risque d'évincement de l'investissement privé par l'investissement public (qui absorbe de l'épargne) alors que les projets publics ne sont pas nécessairement les plus rentables. En effet, l'équilibre entre l'épargne disponible et les investissements à réaliser (publics et privés) n'est plus assuré, d'où l'intérêt de prendre en compte par ailleurs cet aspect des choses.

<sup>34</sup> Le partage des risques entre créanciers et actionnaires mériterait à elle seule un long développement. Le lecteur intéressé pourra se référer à Doherty, Neil A., « Integrated risk management », New York: McGraw-Hill, 2000.

<sup>35</sup> Si  $D$  désigne la dette (rémunérée au taux  $\rho$ ) et  $K$  les capitaux propres (rémunérés au taux  $\mu$ ), le CMPC est donné par  $CMPC = \rho \frac{D}{D+K} + \mu \frac{K}{D+K}$  qui varie beaucoup.

<sup>36</sup> La fiscalité vient aussi perturber cette analyse. Nous la négligeons ici.

<sup>37</sup> Source : « Le taux d'actualisation public », Direction de la Prévision, septembre 2003.

## 5.4. Le cas des petits projets : neutralité au risque

Jusqu'à présent, les méthodes présentées pour traiter le cas du risque peuvent sembler assez décevantes car difficiles d'application. Heureusement, et cela est d'autant plus vrai que l'on s'intéresse au décideur public, on peut se ramener aux cas en certitude traités aux sections 3 et 4 dès lors que les conséquences de la décision envisagée sont suffisamment petites.

Dans le cas où les flux engendrés par le projet sont faibles au regard des autres flux reçus par le décideur, il est légitime de faire une approximation linéaire de la fonction d'utilité, et - en suivant l'axiomatique de Savage - de maximiser l'espérance d'utilité. Dans la mesure où l'on considère des projets d'envergure modeste (au regard du budget total), le décideur public se retrouve ainsi neutre au risque.

Dans ce cadre le taux d'actualisation est choisi avec des critères comparables à ceux utilisés dans le cas où les flux futurs sont certains.

Illustration (cas simple d'un petit projet incertain) :

Soit  $U$  une fonction d'utilité VNM, on suppose qu'initialement les flux de la collectivité sont certains et valent  $R_n$  (c'est-à-dire le bilan des bénéfices nets des coûts à la date  $n$ ).

Considérons alors le cas d'un projet envisagé par l'Etat qui conduit aux flux incertains en date  $\tilde{F}_0$  en date 0 et  $\tilde{F}_1$  en date 1.

Dans la mesure où l'on considère que l'Etat est rationnel (se conforme à l'axiomatique de Savage) et s'attache à maximiser le bien-être collectif, le projet ne sera accepté que si l'espérance de gain avec le projet est supérieure au gain sans, c'est-à-dire :

$$E\left(U\left(R_0 + \tilde{F}_0; R_1 + \tilde{F}_1\right)\right) \geq U\left(R_0, R_1\right)$$

En faisant un développement limité de la fonction d'utilité au voisinage du point  $(R_0, R_1)$  et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, on trouve les conditions équivalentes suivantes :

$$E\left(U\left(R_0, R_1\right) + \tilde{F}_0 \frac{\partial U}{\partial R_0}\left(R_0, R_1\right) + \tilde{F}_1 \frac{\partial U}{\partial R_1}\left(R_0, R_1\right)\right) \geq U\left(R_0, R_1\right)$$

$$E\left(\tilde{F}_0\right) + E\left(\tilde{F}_1\right) \frac{\frac{\partial U}{\partial R_1}\left(R_0, R_1\right)}{\frac{\partial U}{\partial R_0}\left(R_0, R_1\right)} \geq 0$$

On retrouve alors l'expression d'une espérance de VAN avec le même taux d'actualisation que dans le cas déterministe. Il faut toutefois noter ici que la fonction d'utilité présidant à la définition du taux marginal de

substitution  $\frac{\frac{\partial U}{\partial R_1}\left(R_0, R_1\right)}{\frac{\partial U}{\partial R_0}\left(R_0, R_1\right)}$  est la fonction VNM découlant de l'axiomatique de Savage, et non celle venant

du modèle microéconomique du consommateur. Dans la mesure où les consommateurs vérifient simultanément les hypothèses micro-économiques classiques et les critères de décision des axiomes de Savage, les fonctions d'utilité sont les mêmes, les taux d'actualisation de la partie 4 sont donc utilisables.

## 5.5. Le cas des grands projets : quelle relation au risque pour la collectivité ?

L'Etat est permanent et a toujours théoriquement la capacité de diversifier les risques ou de transférer ses revenus d'une période sur une autre. A la lumière des considérations précédentes sur l'axiomatique de Savage et la forme de la fonction d'utilité dans le cas de « petits » projets, on peut donc considérer que l'Etat doit être neutre au risque et donc raisonner simplement en espérance de gain.

Dans cette optique, une analyse coûts-bénéfices doit se fonder sur la comparaison des espérances des gains et des coûts. Le choix du taux d'actualisation se ramenant alors à la problématique développée dans un cadre certain.

On notera néanmoins que le choix d'un tel comportement pour la décision publique n'est pas exempt de critiques :

- si l'Etat est permanent, les électeurs ne le sont pas et présentent généralement une aversion au risque<sup>38</sup>. Un tel critère de décision peut donc donner l'impression que l'Etat agit de façon irresponsable ;
- l'Etat est également soumis à des contraintes qui l'empêchent de transférer n'importe quelle valeur d'une période sur une autre (endettement limité ...) ;
- certains risques sont suffisamment importants pour menacer l'existence d'un Etat, le risque de défaut n'est pas nul.

De façon générale, hors du cadre très spécifique du MEDAF, rien ne justifie en tout état de cause de modifier le taux d'actualisation pour rendre compte du risque. En particulier, l'idée que le risque doit conduire à modifier le taux d'actualisation – que ce soit dans le sens d'une augmentation ou d'une diminution – conduit à des résultats aberrants comme le montre l'encadré ci-dessus.

#### **Pourquoi il ne faut pas modifier le taux d'actualisation (à la hausse ou à la baisse) pour prendre en compte le risque**

On entend souvent dire que la nécessité d'être prudent doit conduire l'Etat à utiliser un taux d'actualisation différent pour des projets risqués et des projets sans risque. L'idée est que la modification du taux d'actualisation peut permettre de faire apparaître un projet risqué comme moins rentable que le projet certain équivalent. Autrement dit, la méthode est censée diminuer la valeur économique des projets risqués par rapport à ce que donne une analyse en espérance actualisée où les flux incertains sont remplacés par leur espérance.

Il n'en est rien comme on le constate aisément avec l'exemple suivant à deux périodes.

Projet 1 : utilisation d'un pesticide nouveau. Les gains liés à l'élimination des espèces nuisibles - immédiate – sont sûrs (+98) ; en revanche, les coûts écologiques - en deuxième période - sont incertains (-50 ou -150 équiprobables).

Projet 2 : construction d'une centrale électrique. Le coût immédiat est sûr (-80). Le gain futur incertain en raison du prix inconnu de l'électricité (+50 ou +150 équiprobables).

Si l'on raisonne en équivalent certain, les projets valent respectivement (en espérance actualisée à 4 %, supposé être le taux sans risque) :

$$V1 = +2$$

$$V2 = +16$$

et les deux projets apparaissent donc rentables.

Que se passe-t-il si, au nom du risque, on décide d'utiliser un taux d'actualisation différent de 4 % ?

V1 augmente avec le taux d'actualisation, et devient nulle quand le taux est inférieur à 2 %.

V2 diminue avec le taux d'actualisation, et devient nulle quand le taux est supérieur à 25 %.

Autrement dit, si la prudence impose de donner une valeur moindre aux projets risqués, il faut tantôt accroître tantôt diminuer le taux d'actualisation au nom du risque (tout dépend de la structure de la séquence des flux futurs). Une autre façon de commenter ce résultat est de dire que accroître le taux d'actualisation ne favorise en aucune façon la sélection des projets les moins risqués. Diminuer le taux non plus.

<sup>38</sup> Encore une fois, même si l'on peut observer dans le comportement des individus une certaine relation au risque (accidents de la route, etc.), rien ne permet d'agrèger les observations pour en déduire une aversion au risque collective.

## 6. Conclusion : proposition pour l'actualisation publique

La taille de la plupart des projets publics légitime l'hypothèse de neutralité au risque, et conduit donc à recommander le critère de maximisation de l'espérance de valeur actualisée nette (VAN) avec comme taux d'actualisation :

- le taux d'intérêt sans risque sur les marchés financiers tant que ces marchés existent (30 ans) soit entre 2 et 3 % en termes réels actuellement ;
- au delà de toute référence au marché, un taux faible mais non nul (préférence pure pour le présent) d'1 %.

Pour les projets mettant en jeu des sommes ne permettant plus de considérer que l'Etat est neutre au risque, les hypothèses légitimant l'emploi de la VAN ne sont plus vérifiées et il est donc a fortiori vain de tenter de traiter l'aversion au risque via cet outil. Il convient alors d'utiliser la méthode par Absence d'Opportunité d'Arbitrage quand cette méthode peut s'appliquer.

### Remarques :

- Cette recommandation est très normative dans certains cas mais c'est la seule qui garantisse la cohérence dynamique des choix collectifs (i.e., sur très longue période, on maximise bien la richesse nationale en appliquant la règle à chaque période). Il importe en effet de ne surtout pas changer la règle selon les projets considérés ou selon le moment où on l'applique.

- La séquence de taux ainsi définie permet, à horizon d'investissement humain, d'actualiser les flux de façon cohérente avec le fonctionnement des marchés et, simultanément, de ne pas hypothéquer le développement durable par la prise en compte d'éventuels impacts sur plusieurs générations.

- La règle proposée doit servir à déterminer si un projet est rentable ou non pour la collectivité. Elle ne préjuge pas de sa réalisation effective ; la contrainte de financement intervient par ailleurs.

La règle proposée convient pour les effets externes valorisés sur une base de marché (prix hédoniques, coûts, etc.). En revanche, l'intégration dans un calcul actualisé d'effets externes valorisés sur des bases non marchandes (évaluation contingente) n'est justifiée par aucun des modèles théoriques décrits dans cette note et donne des résultats contraires aux observations empiriques.

## BIBLIOGRAPHIE

- « Effet de serre et actualisation », Kenneth J. Arrow, La Revue de l'Energie, n°471, octobre 1995.
- « Economie de l'environnement : méthodes et débats », Commissariat Général du Plan, rapport rédigé par Olivier Beaumais, Avril 2002.
- « La décision publique face aux risques », Commissariat Général au Plan, Rapport du séminaire « Risques » animé par M. Matheu.
- « Time Discounting and Time Preference : A Critical Review », S. Frederick, G. Loewenstein, T. O'Donoghue, Journal of Economic Literature, vol. XL (Juin 2002).
- « Statistique pour l'environnement, traitement bayésien de l'incertitude », J. Bernier, E. Parent, J.J. Boreux, Editions TEC&DOC.
- « Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis », J.O. Berger, Springer et Verlag, 1985.« Aggregating infinite utility streams with intergenerational equity : the impossibility of being paretian », K. Basu, T. Mitra, Econometrica, Vol 71, n°5, Septembre 2003.
- « Maximin expected utility with non-unique prior », Gilboa I. et Schmeidler D., Journal of Math. Economics, 18, 1989
- « Integrated risk management », Doherty, Neil A., New York: McGraw-Hill, 2000.
- « Le partage privé-public dans le financement de l'économie », D. Martimort, J.-C. Rochet, Revue Française d'Economie, vol 14, n°3, 1999.