

DRAST / PREDIT No. 00MT66

Groupe Thématique : Recherches Stratégiques

## **Rapport final du projet QUATUOR**

**Calage et résultats de simulations dynamiques  
sur des réseaux de grande taille**

**Année 3**

THEMA/TT&R, Université de Cergy-Pontoise

Responsable : Professeur André de Palma

Collaborateurs : Eric Delattre, Fabrice Marchal, Omar Mekkaoui et Kiarash Motamedi

CORE, Université Catholique de Louvain

Responsable : Professeur Yurii Nesterov

RAND-EUROPE (HCG France)

Responsable : Professeur Moshe Ben-Akiva



**Avril 2002**

## Remerciements

Le projet QUATUOR a été mené en collaboration avec M. Ben-Akiva de Rand Europe (anciennement HCG) ainsi que Yurii et Svieta Nesterov (CORE, UCL).

Le groupe de recherche THEMA - Transport & Réseaux de l'Université de Cergy-Pontoise tient à remercier Messieurs G. Brun, A. Peny, M. Bernadet et M. du Crest du PREDIT et les co-financeurs, la SNCF et la DREIF pour leur soutien au projet QUATUOR ainsi que les membres du comité de suivi (A. Anas, R. Arnott, P. Laconte, F. Laurent et E. Quinet) et les professeurs R. Deneckere, R. Lindsey et D. McFadden (professeur invité et lauréat 2000 du prix Nobel d'économie) pour leurs contributions et leurs précieux conseils.

Nous tenons à remercier Messieurs J. Berthet et D. Nguyen-Luong de l'IAURIF et Madame C. Duchène et Monsieur Y. Geffrin et Messieurs P. Ginier et F. Poupard de la DREIF, ainsi que Monsieur A. Palade et Madame A. Maître pour leur participation au projet QUATUOR et pour les bases de données mises à notre disposition.

Nous avons reçu le soutien informatique du CINES (CNRS) et d'adpC ainsi que le support administratif de Madame S. Blanchard.

Plusieurs étudiants et stagiaires (du département d'économie et de mathématiques) nous ont aussi aidé ponctuellement.

**PRESENTATION GENERALE ..... v****PARTIE 1 FONDLEMENTS METHODOLOGIQUES ..... 1**

Introduction .....	2
Chapitre 1 : la dynamique stationnaire dans un réseau de transport congestionné : résumé et perspectives .....	6
Introduction.....	7
Principaux résultats de l'approche de Beckmann.....	9
Portée du modèle de Beckmann.....	17
Modèle dynamique stable : présentation et exemples.....	21
Dynamique stable : dérivation pour un réseau.....	26
Variantes du modèle dynamique stable .....	30
Remarques et conclusions.....	35
Chapitre 2 : stationnement incitatif pour le trafic du matin et du soir .....	44
Introduction.....	45
Notations .....	47
Modèle de stationnement incitatif.....	49
Discussion et remarques finales.....	52
Chapitre 3 : mouvement pendulaire du soir .....	56
Introduction.....	57
Le modèle.....	60
Existence et unicité d'un équilibre sans tarification.....	61
Un exemple .....	68
Conclusion .....	79
Chapitre 4 : choix d'horaire et demande élastique.....	83
Introduction.....	84
Horaires optimaux et tarification optimale .....	85
Tarification d'équilibre.....	87
Choix d'horaire et modèle de choix discret.....	89
Conclusions.....	95

<b>PARTIE 2 AJUSTEMENT DES PARAMETRES DE SIMULATION A PARTIR D'INDICATEURS AGREGES DE MOBILITE .....</b>	<b>96</b>
Introduction .....	97
Chapitre 1 : méthodologie de calage utilisée précédemment.....	100
Les données disponibles .....	101
Les paramètres à caler : signification et valeurs attendues .....	103
Les critères de calage et leur agrégation .....	106
Descriptif de la méthode .....	109
Résultats obtenus .....	110
Chapitre 2 : le calage automatique .....	113
Constitution de la base de données pour le calage.....	115
Estimation des fonctions objectifs .....	118
Procédure économétrique.....	136
Comparaison et conclusions .....	160
 <b>PARTIE 3 ESTIMATION DESAGREGEE DE L'OFFRE ET DE LA DEMANDE : IMPLICATIONS .....</b>	 <b>221</b>
Introduction .....	222
Chapitre 1 : estimation des fonctions de congestion .....	225
Introduction.....	226
Variables d'intérêt .....	226
Modèles du flot de trafic .....	230
Modèle de stabilité locale d'écoulement (SLE) .....	235
Modèles à estimer .....	239
Traitement des données.....	239
Méthode d'estimation économétrique .....	246
Résultats des estimations .....	258
Conclusions.....	263

Chapitre 2 : estimation des paramètres de demande .....	267
Introduction.....	268
Caractéristiques de l'enquête.....	268
Estimations des paramètres dynamiques .....	284
Utilisation des résultats d'estimation dans METROPOLIS .....	294
Conclusion .....	295
<b>PARTIE 4 CALAGE DES SCENARIOS FINAUX .....</b>	<b>297</b>
Chapitre 1 : réseau IAURIF : calage du scénario final .....	298
Introduction.....	299
Paramètres comportementaux.....	299
Données statistiques de calage.....	301
Matrices origine-destination .....	309
Fonctions de congestion.....	312
Méthode de calage .....	316
Résultats agrégés du calage.....	317
Mesures d'efficacité et comparaisons.....	320
Conclusion .....	322
Chapitre 2 : réseau DREIF : calage du scénario final.....	324
Introduction.....	325
Présentation des données .....	325
Analyse des performances du réseau .....	330
Methodologie du calage .....	332
Résultats agrégés du calage.....	335
Mesures d'efficacité et comparaisons.....	337
Conclusion .....	339
Chapitre 3 : comparaison des résultats entre deux réseaux :	
IAURIF et DREIF .....	341
Introduction.....	342
Réseau IAURIF versus réseau DREIF.....	343
Scénarios de référence pour METROPOLIS .....	351

---

Résultats des scénarios de référence .....	352
Résultats des simulations et comparaisons .....	353
Conclusions .....	356
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>358</b>
<b>PRESENTATION DU LOGICIEL DE SIMULATION</b>	
<b>DYNAMIQUE METROPOLIS.....</b>	<b>366</b>

---

# Fondements méthodologiques

## **PARTIE 1**

### **FONDEMENTS METHODOLOGIQUES**

Cette partie présente les contributions méthodologiques relatives aux outils utilisés dans QUATUOR. La manipulation de modèles reste, malgré les progrès de la technologie, assez lourde étant donné la complexité de ces outils et des comportements modélisés. En effet, non seulement ces décisions ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais de plus, celles-ci se placent dans un environnement incertain. La philosophie de notre approche a été de nous baser sur des modèles simples (sans être naïfs, nous l'espérons) du point de vue technologique et sur la théorie économique, qui nous sert de guide, contraignant mais logique, pour décrire les comportements des usagers. Ces hypothèses de travail ont orienté notre recherche et nous ont permis de mettre au point l'un des outils les plus avancés du monde du point de vue de la modélisation de la mobilité dans un cadre dynamique. Dans notre modélisation, nous avons omis divers processus qui sont recensés dans les conclusions générales de ce rapport. Néanmoins, nous n'avons pas fermé la porte à l'interaction transport/occupation du sol, à la modélisation des systèmes d'information embarqués, à la tarification routière, aux chaînes de déplacement ou à l'étude des impacts de la circulation sur l'environnement). Nous pensons avoir construit des bases suffisamment solides et notre approche se veut cumulative, de telle façon que de tels phénomènes peuvent être envisagés dans les années à venir. Ces extensions sont possibles parce que nous avons travaillé de manière modulaire et systématique et que nous avons, le plus possible, basé notre travail sur les théories existantes les plus avancées.

Dans cette première partie du rapport nous complétons les contributions théoriques des autres années en apportant des éléments de réponses aux questions suivantes :

- (1) Peut-on construire un modèle basé sur des hypothèses minimales en ce qui concerne l'offre et la demande et l'équilibre dans un réseau de transport ?
- (2) Comment modéliser les boucles de déplacements, même dans le cas simple des déplacements entre domicile, lieu de stationnement, lieu de travail, lieu de stationnement et domicile ?
- (3) En quoi le pic du matin et le pic du soir diffèrent-ils du point de vue de la modélisation ?



*Chapitre 1 : la dynamique stationnaire dans un réseau de transport congestionné : résumé et perspectives*

Le chapitre 1, écrit en collaboration avec Yurii Nesterov du CORE, tente de répondre à la première question. Il se base sur le modèle de file d'attente déterministe en ce qui concerne l'offre de transport (ce modèle découle des hypothèses relatives à l'offre : chaque route possède une capacité qui correspond au flux maximal de véhicules pouvant l'emprunter pendant une période de temps donnée). Du point de vue de la demande, il est supposé que les usagers minimisent une fonction d'objectif individuelle (le temps de trajet). L'équilibre correspond à celui de Wardrop. Sur la base de ces hypothèses minimales purement logiques, il est possible de calculer un équilibre. Celui-ci peut être considéré comme l'état stationnaire d'un processus dynamique (que nous avons aussi qualifié de « dynamique stable »). Si cette formulation est bien adaptée au cas « hors pic », elle repose sur une hypothèse extrême dans le cas du pic horaire.

Des recherches sont en cours pour écrire les équations de la dynamique stable dans le cas où les évolutions temporelles seraient monotones dans le temps. Le but ultime de ces recherches est de construire une formulation mathématique des modèles dynamiques. Ce sujet est en évolution constante et d'après l'un des meilleurs spécialistes en la matière (M. Florian), il reste encore beaucoup de chemin à parcourir avant qu'une telle recherche ne puisse aboutir. De plus, celle-ci ne réduira pas à néant nos efforts dans le développement de modèles de simulation dynamique, objet de ce projet, car la théorie ne pourra pas intégrer différents éléments assurant le réalisme de la formulation tels que le phénomène de remontée de queue ou le choix stochastique des individus eux même immergés dans un environnement stochastique (dû à la présence d'accidents, par exemple). Les résultats obtenus avec le modèle confortent toutefois nos choix d'hypothèses de base.

*Chapitre 2 : stationnement incitatif pour le trafic du matin et du soir*

Le chapitre 2, écrit aussi en collaboration avec Yurii Nesterov s'attaque à un sujet très à la mode : les boucles de déplacement. Nous nous sommes placés dans le cas des déplacements entre domicile et lieu de travail et avons considéré la possibilité de parking de relais. Dans ce cas, il est essentiel de spécifier que les usagers doivent retourner le soir à l'endroit où ils ont garé leur voiture. Cette relation logique évidente nous a amené à doubler le réseau : nous avons construit un réseau pour le matin et un réseau pour le soir ; ces deux réseaux sont interconnectés logiquement. Nous montrons de quelle manière ce problème peut être formulé mathématiquement, dans le cadre de la dynamique stationnaire. Nous nous proposons, dans un proche avenir (mais après la fin de QUATUOR) d'introduire ce type d'approche dans le cadre de la dynamique complète (avec choix de l'heure de départ). En effet, les idées de base de notre modélisation sont susceptibles d'être intégrées dans ce cadre d'analyse plus vaste.

*Chapitre 3 : mouvement pendulaire du soir*

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la modélisation du pic du matin. Dans ce cas, les usagers effectuent le choix modal, le choix de l'heure de départ (en fonction de leur heure d'arrivée) et le choix d'itinéraire. Dans les modèles classiques (statiques), le pic du matin et les pics du soir sont modélisés de la même manière. Des résultats différents ne peuvent être obtenus que lorsque des données différentes sont utilisées (par exemple, des matrices origine-destination différentes). Cette symétrie n'est plus valable dans le cas des modèles qui prennent en compte la composante horaire. En effet, le matin, l'utilisateur est sujet à des contraintes au domicile (ignorées dans notre approche, pour des raisons d'économie) et à la destination. Le soir, les contraintes à l'origine (lieu de travail) sont prédominantes. Nous avons donc exploré analytiquement, dans ce chapitre 3 écrit en collaboration avec Robin Lindsey, les différences entre pics du matin et du soir, dans le cas d'une seule route et en présence d'hétérogénéité pour les usagers.

Nous proposons de poursuivre cette étude (après la fin de QUATUOR), pour pouvoir étudier les différences entre le pic du matin et le pic du soir sur le niveau de bien-être. Il serait aussi utile de se poser la question du choix de l'horaire dans un contexte non pas d'un jour mais d'une semaine ou d'un mois : en effet, si un retard est acceptable de temps en temps ; ce même retard, lorsqu'il fait partie d'une longue série de retards peut devenir inacceptable. Un

employé est soumis à une contrainte de 35 heures par semaine de sorte que les retards pour un jour donné ne sont pas comptabilisés de la même manière selon que celui-ci est arrivé ou non en retard les jours précédents. Les idées de base de notre formulation du pic du soir ont été appliquées dans le cadre de notre outil de simulation adapté à de grands réseaux.

#### *Chapitre 4 : choix d'horaire et demande élastique*

Nous avons aussi exploré, dans ce chapitre, le choix de l'heure de départ et la gestion des horaires dans le cadre des transports en commun. Contrairement à la majorité des travaux qui s'intéressent essentiellement à l'offre, nous nous sommes concentrés sur la demande. Jusqu'à présent, nous avons ignoré le choix modal dans le calcul de l'horaire et supposé que le coût relatif à l'utilisation des transports en commun était égal à un coût généralisé dépendant uniquement des origines et des destinations. Dans ce chapitre, nous proposons une formulation intégrée du choix modal et du choix de l'heure de départ. Nous nous plaçons d'une part du point de vue de l'utilisateur (qui fait face au choix modal et au choix de l'heure de départ) et d'autre part du point de vue du gestionnaire des transports en commun (qui est amené à déterminer le niveau de prix et le type d'horaire offert aux usagers).

## **PARTIE 2**

# **AJUSTEMENT DES PARAMETRES DE SIMULATION A PARTIR D'INDICATEURS AGREGES DE MOBILITE**

Nous explorons ici les possibilités de calage de notre outil de simulation. Les paramètres à calibrer sont de trois types. (1) Les paramètres relatifs à la demande. Il s'agit de ceux intervenant dans la fonction de coût généralisé (relatifs à la valeur du temps et aux paramètres de deshorage) et de ceux caractérisant l'hétérogénéité des choix de temps de départ et modal. Ces paramètres font l'objet du calage. (2) Les paramètres intervenant dans les fonctions de congestion sur les liens. (3) Les paramètres internes : ceux relatifs au processus d'ajustement de jour en jour et aux règles d'arrêt. Cette troisième classe de paramètres possède des valeurs par défaut établies suite à des expériences de simulation sur différents types de réseaux ; ces expériences suggèrent que ces valeurs sont stables. L'objectif de cette seconde partie est de déterminer les valeurs des paramètres de calage.

Le but de ce travail est de montrer que l'ajustement d'un modèle de simulation dynamique peut être effectué même pour un grand réseau de transport comme celui de l'Ile-de-France. Nous nous sommes concentrés sur la méthodologie utilisée et ne reportons que les résultats finaux de notre travail. En effet, nous avons exploré d'autres voies qui se sont avérées moins fructueuses. Néanmoins, la méthode que nous proposons ici n'est pas définitive, mais suffisamment robuste pour qu'elle puisse être utilisée par d'autres centres de recherches ou opérateurs dans le domaine des transports.

### *Chapitre 1 : méthodologie de calage utilisée précédemment*

Dans le chapitre 1, nous avons calé, en utilisant une procédure classique, les paramètres du modèle. Pour ajuster les paramètres du modèle, nous nous sommes basés sur notre connaissance des modèles dynamiques, sur les nombreuses contributions théoriques dans le domaine des modèles dynamiques, sur notre intuition et sur nos connaissances des conditions de circulation en Ile-de-France. Ce travail repose sur deux aspects.

Il est nécessaire d'établir des critères de calage : quand peut-on dire que le modèle reproduit correctement la réalité ? La réponse est déclinée suivant deux volets .

D'une part, les résultats du modèle doivent être satisfaisants de manière interne. Par exemple, le système, qui propose un processus d'ajustement de jour en jour doit effectivement converger vers un état stationnaire. Nous avons développé une procédure statistique pour mesurer rigoureusement la stationnarité des sorties du modèle et l'avons testé cette stationnarité. Les résultats suggèrent que le système de transport converge vers un état stationnaire stable après environ 80 itérations (jours). Etant donné que la condition initiale prise en compte le premier jour est totalement naïve (on suppose que les usagers ignorent la congestion), ceci suggère que le processus d'apprentissage de jour en jour des usagers du système de transport est satisfaisant et que les paramètres utilisés dans ce processus sont raisonnables (nous nous basons sur un processus de Markov d'ordre 1). Notons que tous nos résultats suggèrent que cet état stationnaire est largement indépendant des spécificités du processus d'apprentissage ; ceci révèle que le modèle est robuste et que ses résultats ont du sens étant donné qu'à ce jour très peu de connaissances ont été accumulées sur les processus d'ajustement de jour en jour des usagers.

D'autre part, il est nécessaire de confronter les résultats aux données de terrain accessibles. Dans cette seconde partie, nous nous sommes contentés d'utiliser des données agrégées et « semi-agrégées » telles que le temps de trajet moyen, le nombre de départs pendant une tranche horaire donnée ou la distribution des temps de trajet. Nous avons ensuite construit des indices mesurant la distance entre les résultats de simulation et les données de terrain (semblables aux critères classiques utilisés dans la régression linéaire).

Notre travail est facilité par le fait que l'outil de simulation se base essentiellement sur des données classiques accessibles (statiques) pour l'offre et pour la demande. Les résultats de simulations que nous avons effectuées suggèrent que trois paramètres jouent un rôle essentiel. Le paramètre  $\kappa$  qui permet de modifier de manière uniforme les capacités statiques des routes (qui seront introduites dans un modèle de congestion dynamique), le paramètre  $n$  qui permet de déterminer la fraction des déplacements entre domicile et lieu de travail par rapport à l'ensemble des déplacements et le paramètre  $\mu$  qui intervient comme une mesure de l'hétérogénéité des usagers.

[ $\kappa$ ] Le paramètre  $\kappa$  permet de modifier le niveau de congestion sur les routes. Par défaut, nous utilisons les valeurs calibrées par le modèle statique DAVIS. Etant donné que nous utilisons

un modèle dynamique pour lequel les flux entrant ne sont pas, contrairement aux modèles statiques, distribués uniformément au cours du temps, nous nous attendons à ce que les valeurs calibrées soient différentes pour le modèle dynamique. A priori, on peut s'attendre à des capacités plus petites que dans le cadre d'un modèle statique étant donné que ce dernier comporte davantage de flexibilité : en effet, les usagers qui rencontrent des niveaux de congestion plus élevés ont la possibilité de différer leur temps d'utilisation de la route, ce qui n'est pas possible dans le cadre d'un modèle statique.

[ $n$ ] Le paramètre  $n$  affecte l'importance relative de la congestion pendant et en dehors du pic horaire. Notons que dans notre formulation, les individus qui circulent pendant le pic et hors du pic sont en concurrence, de sorte que les deux processus ne sont pas indépendants. Nous avons besoin de déterminer ce paramètre étant donné que les données que nous avons reçues ne nous ont fourni que l'information pour le pic horaire.

[ $\mu$ ] Le troisième paramètre critique,  $\mu$ , intervient dans le modèle logit de choix de temps de départ. Plus sa valeur est élevée, plus les départs sont largement distribués dans le temps et plus le pic du matin est étendu.

Nous avons construit une fonction de distance entre les données et les sorties, que nous proposons de minimiser en fonction des trois paramètres :  $\kappa$ ,  $n$  et  $\mu$ . La situation par défaut est la même dans les deux cas : il s'agit de la procédure naïve de balayage systématique de l'espace des paramètres. Cette dernière procédure est évidemment extrêmement lourde : dans le cas de 3 paramètres et de 6 valeurs par paramètre, elle conduit à 216 simulations ! Nous les avons effectuées dans le but de cette recherche, mais bien évidemment, une telle procédure doit être évitée dans le cas d'applications pratiques.

## *Chapitre 2 : le calage automatique*

Dans le chapitre 2, nous explorons deux méthodes de calage de ces trois paramètres critiques : le paramètre  $\kappa$ , le paramètre  $n$  et le paramètre  $\mu$ . Pour ces deux méthodes, nous nous proposons de déterminer les paramètres qui permettent d'ajuster au mieux les sorties du modèle aux données de terrain accessibles. Les chercheurs pourront, en fonction de leurs objectifs, utiliser une de ces deux méthodes. Ces deux méthodes sont faciles à mettre en application.

### *Méthode algorithmique*

La minimisation d'une fonction constitue un problème simple dans le cas des fonctions convexes. Dans le cas qui nous préoccupe, nous n'avons pas été capable de montrer que la fonction d'erreur était convexe. Ceci est une conséquence du fait que nous ne possédons pas de formulation mathématique de notre problème. Néanmoins, les très nombreuses (quelques centaines) expériences de calcul effectuées suggèrent que la convexité de cette fonction d'erreur est assurée. La méthode proposée consiste à partir d'une condition initiale (meilleures valeurs des paramètres devinées par l'opérateur). Ensuite, des simulations explorent le voisinage de cette condition initiale et établissent un nouveau triplet de référence des paramètres  $[\kappa, n, \mu]$  qui rend la valeur de la fonction d'erreur plus petite. La procédure d'exploration s'apparente à une méthode de gradient classique. L'exploration des points explorés au voisinage du triplet de référence s'effectue de manière aléatoire. Une procédure de recherche aléatoire est plus coûteuse en temps de calcul mais elle permet aussi d'éviter de rester « bloqué » dans le voisinage d'un minimum local éventuel de la fonction d'erreur. Nos résultats permettent de comparer la méthode de gradient proposée avec la méthode naïve qui a consisté à utiliser une procédure de balayage systématique de l'espace des paramètres.

La méthode algorithmique a été codée dans le langage C++ et est fournie dans l'appendice du chapitre 2.

*Méthode économétrique*

Nous avons mis au point par ailleurs une seconde méthode de calage. Celle-ci part de la constatation du fait que la fonction d'erreur est convexe. Elle consiste d'abord à effectuer un petit nombre de simulations pour lesquelles les valeurs des fonctions d'erreur sont calculées. Ensuite, les paramètres d'une fonction analytique convexe sont estimés. Ces paramètres n'ont pas d'interaction, mais assurent à cette fonction convexe une flexibilité suffisante pour pouvoir rendre compte des points simulés de la fonction d'erreur. Comme l'approximation de la fonction d'erreur possède une formulation analytique, celle-ci peut être minimisée exactement. Une simulation est ensuite effectuée pour les valeurs des paramètres ( $\kappa$ ,  $n$  et  $\mu$ ) qui minimisent la fonction d'erreur analytique. Cette simulation fournit un nouveau point qui conduit à une nouvelle estimation des paramètres de la fonction d'erreur analytique. Cette procédure converge rapidement vers le même point que la base de données fournie à partir de la méthode de balayage systématique.



## **PARTIE 3**

# **ESTIMATION DESAGREGEE DE L'OFFRE ET DE LA DEMANDE : IMPLICATIONS**

Nous envisageons dans la partie III une approche différente pour le calage des paramètres. Elle se base sur le fait que le modèle dynamique que nous avons mis au point en Ile-de-France utilise une description microscopique pour la demande (modèle comportemental de choix discret) ainsi que pour l'offre (lois de congestion sur les liens du réseau de transport). Ces données désagrégées sont accessibles au même niveau de détail (individuel). Nous proposons, dans cette troisième partie, d'utiliser ces données désagrégées accessibles en Ile-de-France pour estimer directement (c'est-à-dire sans utiliser les résultats du simulateur) les paramètres essentiels de notre outil de simulation. Nous utiliserons dans ce cas les résultats du modèle de simulation pour effectuer un calage fin du modèle.

L'approche proposée dans cette partie possède deux avantages par rapport à celles envisagées dans la partie II. D'une part, une estimation au niveau désagrégé permet d'éviter la perte d'information inhérente au processus d'agrégation. D'autre part, comme cette approche ne se base pas sur les résultats de simulation, elle est plus générale. Bien souvent, par exemple, les matrices origine-destination ou les lois de congestion sont estimées en se servant des résultats du modèle (nous avons utilisé une telle procédure dans la partie II de ce rapport). Notons en outre que cette approche permet de valider de manière plus rigoureuse la pertinence des résultats du simulateur. En contrepartie, la méthode directe de calage proposée ici est plus difficile à mettre en place, nécessite davantage de données et se prête moins facilement à une procédure automatique.

### *Chapitre 1 Estimation des fonctions de congestion*

Nous avons utilisé jusqu'à présent deux types de lois pour décrire la congestion sur les liens du réseau. Des lois statiques que nous avons adaptées dans un contexte dynamique; celles-ci font intervenir des paramètres qui ont été estimés par les opérateurs. Par ailleurs, nous avons utilisé des modèles de file d'attente déterministes qui ne contiennent que deux paramètres :

vitesse à vide, et capacité de l'arc. Des valeurs par défaut des capacités des arcs sont fournies par les estimations effectuées dans le cadre de modèles statiques (après une agrégation temporelle). Ces estimations, qui sont généralement effectuées à partir des données de comptage, dépendent également du type de modèle de simulation utilisé. En effet, ces estimations sont construites pour des modèles statiques de sorte qu'elles ne sont qu'indirectement utilisables pour des modèles dynamiques ; notre expérience suggère néanmoins que les données statiques sont facilement utilisables, après une transformation homothétique, dans les modèles dynamiques.

Dans l'approche considérée ici, nous avons utilisé des données de comptage sur l'Ile-de-France pour estimer des modèles de congestion dynamiques. Ce sujet constitue un projet de recherche en soi, dont le niveau de technicité dépasse le cadre de la recherche proposée par QUATUOR, de sorte que nous nous sommes contentés d'utiliser des formes fonctionnelles de base, possédant un petit nombre de paramètres que nous avons estimé. Ces lois de congestion dynamiques ont ensuite été directement intégrées dans l'outil de simulation dynamique.

## *Chapitre 2 Estimation des paramètres de demande*

Nous avons repris les données fournies par le projet MADDIF pour estimer la forme fonctionnelle de la fonction de coût généralisée et les paramètres de la fonction de demande. Nous avons pris en compte les contraintes liées au lieu de travail et omis celles relatives au lieu de domicile. Les facteurs de pondération de cette fonction de coût généralisée possèdent une interprétation comportementale immédiate : valeur du temps, coût de deshorage pour les arrivées précoces et coût de deshorage pour les arrivées tardives. Deux paramètres (moyenne et écart-type) sont estimés pour chacun de ces facteurs. Ceci nous permet de simuler des valeurs pour chaque distribution et pour chaque individu. Nous n'avons pas pris en compte les corrélations entre les paramètres. Nous avons aussi estimé les paramètres retraçant les objectifs des usagers : distribution de la valeur des temps désirés d'arrivée à la destination (les usagers possèdent une plage idéale d'arrivée à la destination pendant laquelle ils ne sont affectés par aucune pénalité de retard ou d'avance). Enfin, nous avons estimé le paramètre d'hétérogénéité du modèle de choix de temps de départ. Ces paramètres sont ensuite directement utilisés dans notre outil de simulation dynamique qui se charge de créer une batterie de paramètres spécifiques à chaque individu.

## **PARTIE 4**

### **CALAGE DES SCENARIOS FINAUX**

Le but de cette dernière partie du rapport est de caler les résultats des simulations aux réalités du trafic de l'Ile-de-France sur deux réseaux : le réseau de l'IAURIF et le réseau de la DREIF. Une fois ces deux calages de scénarios effectués, nous présentons une comparaison des résultats obtenus sur les deux réseaux. Etablis pendant la période de transition entre le franc et l'euro, les résultats de ce chapitre seront présentés en euros. La principale valeur de passage entre les deux représentations est la valeur tutélaire du transport : 12,96 €/h.

Une fois le calage des modèles effectué, il est possible de procéder à des simulations de politique. Les politiques pouvant être simulées par notre outil incluent l'ensemble des politiques traitables par les modèles statiques. Néanmoins, l'analyse d'un grand nombre d'autres politiques est aussi possible dans le cadre des modèles dynamiques : impact des horaires flexibles et décalés, impacts d'incidents affectant les capacités des routes pendant une période donnée de la journée, impact des valeurs des paramètres relatifs aux coûts de deshorage, etc. Notons que les politiques qui peuvent être traitées par les modèles statiques et qui n'intègrent pas le choix de l'heure de départ, fournissent des résultats différents lorsqu'elles sont appréhendées par des modèles dynamiques. Les méthodes et résultats relatifs à cette approche sont présentés dans le rapport intermédiaire de l'année 2.

#### *Chapitre 1 : Réseau IAURIF : calage du scénario final*

A partir des données de calages issues des deux chapitres précédents (chapitre 1 pour les paramètres des fonctions de congestion et chapitre 2 pour les paramètres dynamiques relatifs à la demande), nous procédons au calage, par simulations, du réseau de l'IAURIF. Nous utilisons pour cela les données de déplacements fournies par l'EGT et l'IAURIF. En parallèle au projet QUATUOR, nous utilisons les résultats de l'enquête MADDIF. Cette enquête fournit des estimations des paramètres comportementaux dynamiques des usagers du réseau francilien en fonction de leur motif de déplacement, de leur origine et de leur destination.

Nous estimons également certaines forme de fonction de congestion à partir des données de comptages fournies par la DREIF et le SIER. L'objectif de ce chapitre est de calibrer le modèle en introduisant ces nouvelles données spécifiques à l'offre et à la demande, de façon à reproduire les données statistiques de l'EGT.

### *Chapitre 2 : Réseau DREIF : calage du scénario final*

Dans ce chapitre, nous effectuons une analyse descriptive du réseau de grande taille de la DREIF afin de le comparer au réseau de l'IAURIF. Nous discutons également des problèmes rencontrés lors de l'adaptation de l'outil au réseau de la DREIF et les solutions retenues. Par la suite, nous décrivons la méthode suivie pour le calage de l'outil de simulation au réseau de la DREIF, qui reste assez semblable à l'approche abordée dans la deuxième partie.

Nous n'avons pas analysé des politiques pour ce réseau, mais un ensemble de politiques a été effectué au cours des deux premières années. La démarche à suivre pour étudier ces politiques reste la même.

### *Chapitre 3 : comparaison des résultats entre deux réseaux : IAURIF et DREIF*

Le réseau de l'IAURIF est de type grande taille et agrégé, il représente l'ensemble de la voirie de l'Ile-de-France. Il est composé de 13.547 liens et de 522 zones répartis sur une surface de 12.012 km<sup>2</sup>. Il est considéré comme agrégé car il ne décrit pas les intersections des liens de façon détaillée. Le réseau de la DREIF est constitué de 39.854 liens et de 1.305 zones réparties sur une surface de 12.012 km<sup>2</sup> ; soit trois fois plus que le réseau de l'IAURIF en termes de liens et de zones.

Même si les temps d'affectation et de simulation sont différents, il n'en est pas moins vrai qu'ils sont très proches comparativement aux développements effectués dans ce domaine par les modèles statiques (DAVIS pour la DREIF et DAVISUM pour l'IAURIF). L'objectif de ce chapitre est de comparer dans un premier temps ces différents types de réseau et dans un second temps, les résultats des scénarios de référence effectués sur chacun des réseaux. Ce travail d'adaptation pour les deux réseaux nous a permis de montrer les avantages de METROPOLIS (modèle pour lequel un glossaire est fourni en annexe) par rapport aux modèles dynamiques microscopiques et statiques existants. En effet, METROPOLIS

contrairement aux autres modèles dynamiques qui se limitent à l'analyse de petits réseaux ne connaît pas de limites de ce point de vue. Nous avons également montré qu'il est possible d'utiliser des fonctions de congestion dites statiques pour effectuer des simulations dynamiques contrairement aux différents modèles existants qui nécessitent un calage de fonctions dynamiques microscopiques.

---

# Fondements méthodologiques

# Introduction

L'ensemble des développements empiriques effectués dans le rapport Quatuor s'appuient sur des méthodes de calcul numérique parfois assez lourdes puisqu'elles effectuent des simulations du comportement de plusieurs millions d'individus faisant face à des décisions multiples et complexes. En outre, ces méthodes numériques s'appuient sur des fondements théoriques qui sont présentés dans la partie 1.

A partir de fondements théoriques simples relatifs à l'économie et à la technologie, nous avons décrit les comportements des usagers. Ces hypothèses de travail initiales ont grandement orienté notre recherche et elles nous ont permis de mettre au point l'un des outils parmi les plus avancés au monde du point de vue de la modélisation de la mobilité dans un cadre dynamique.

Cette approche, même si elle a omis divers processus, n'a pas définitivement exclu l'intégration d'éléments tels que l'interaction transport/occupation du sol, la modélisation des systèmes d'information embarqués, la tarification routière, les chaînes de déplacement ou l'étude de l'impact de la circulation sur l'environnement et nous pensons avoir construit des bases suffisamment solides pour que de tels phénomènes puissent être analysés dans le futur.

Les fondements théoriques qui sont rappelés et complétés dans cette première partie du rapport sont basés autour de quatre axes.

Le chapitre 1, écrit en collaboration avec Yuri Nesterov, du CORE, tente de répondre à la question suivante : peut-on construire un modèle basé sur des hypothèses minimalistes en ce qui concerne l'offre et la demande et l'équilibre dans un réseau de transport ? Ce premier chapitre se base sur le modèle de file d'attente déterministe de base en ce qui concerne l'offre de transport : chaque route possède une capacité qui correspond au flux maximal de véhicules pouvant l'emprunter pendant une période de temps donnée. Du côté de la demande, on suppose que les usagers minimisent leur temps de trajet. On obtient alors un équilibre de Wardrop qu'il est possible de calculer et qui peut être considéré comme l'état stationnaire d'un processus dynamique (que nous avons aussi qualifié de « dynamique stable »). Si cette formulation est bien adaptée au cas « hors pic », elle repose sur une hypothèse extrême dans le cas du pic horaire.



D'après l'un des meilleurs spécialistes en la matière (M. Florian), il reste encore beaucoup de chemin à parcourir dans le domaine des équations de la dynamique stable lorsque les évolutions temporelles sont monotones dans le temps : le but ultime de ces recherches est de construire une formulation mathématique de ces modèles dynamiques. Lorsqu'elle aura abouti, cette recherche ne réduira pas à néant nos efforts dans le développement de modèles de simulation dynamique, objet de ce projet, puisque la théorie ne pourra pas intégrer différents éléments assurant le réalisme de la formulation tels que le phénomène de remontée de queue ou le choix stochastique des individus eux même immergé dans un environnement stochastique (du à la présence d'accidents, par exemple). Les résultats obtenus avec le modèle nous réconfortent toutefois dans nos choix d'hypothèses de base.

Le chapitre 2, écrit aussi en collaboration avec Yurii Nesterov s'attaque à un sujet très à la mode : comment modéliser les boucles de déplacements, même dans le cas simple des déplacements domicile-lieu de stationnement-lieu de travail-lieu de stationnement-domicile ? Nous nous plaçons dans le cas des déplacements entre domicile et lieu de travail et nous envisageons l'existence de parking de relais. Il est alors essentiel de spécifier que les usagers doivent retourner le soir à l'endroit où ils ont garé leur voiture ; ce qui nous amène à doubler le réseau. Il existe alors un réseau pour le matin et un réseau pour le soir qui sont interconnectés logiquement. Dans le cas de la dynamique stationnaire, nous formulons ce problème mathématiquement. Nous nous proposons, dans un proche avenir (mais après la fin de QUATUOR) d'introduire ce type d'approche dans le cadre de la dynamique complète (avec choix de l'heure de départ). En effet, les idées de base de notre modélisation sont susceptibles d'être intégrées dans ce cadre d'analyse plus vaste.

Dans les modèles classiques (statiques), le pic du matin et les pics du soir sont modélisés de la même manière. De notre part, nous avons considéré jusqu'ici uniquement la modélisation du pic du matin. Des résultats différents ne peuvent être obtenus que lorsque des données différentes sont utilisées (par exemple, des matrices origine-destination différentes). Cette symétrie n'est plus valable dans le cas des modèles qui prennent en compte la composante horaire. En effet, le matin, l'utilisateur est sujet à des contraintes au domicile (ignorées dans notre approche, pour des raisons d'économie) et à la destination. Le soir, les contraintes à l'origine (lieu de travail) sont prédominantes. Nous avons donc exploré analytiquement, dans ce chapitre 3 écrit en collaboration avec Robin Lindsey, les différences entre pics du matin et du

soir, dans le cas d'une seule route et en présence d'hétérogénéité pour les usagers. Les idées de base de notre formulation du pic du soir ont été appliquées dans le cadre de notre outil de simulation adapté à de grands réseaux.

Après la fin de QUATUOR, nous envisageons de prolonger cette analyse en étudiant les différences entre le pic du matin et le pic du soir sur le niveau de bien-être. Il serait aussi utile de se poser la question du choix de l'horaire dans un contexte non pas d'un jour mais d'une semaine ou d'un mois : en effet, si un retard est acceptable de temps en temps ; ce même retard, lorsqu'il fait partie d'une longue série de retards peut devenir inacceptable.

Le dernier chapitre de cette partie analyse le choix de l'heure de départ et la gestion des horaires dans le cadre des transports en commun et se focalise sur l'aspect demande. Jusqu'à présent, nous avons ignoré le choix modal dans le calcul de l'horaire et supposé que le coût relatif à l'utilisation des transports en commun était égal à un coût généralisé dépendant uniquement des origines et des destinations. Dans ce chapitre, nous proposons une formulation intégrée du choix modal et du choix de l'heure de départ en se plaçant d'une part du point de vue de l'utilisateur (qui fait face au choix modal et au choix de l'heure de départ) et d'autre part du point de vue du gestionnaire des transports en commun (qui est amené à déterminer le niveau de prix et le type d'horaires offerts aux usagers).

# Chapitre 1

## La dynamique stationnaire dans un réseau de transport congestionné : résumé et perspectives

## Introduction

Dans ce chapitre, nous évaluons les approches statiques pour modéliser la congestion du trafic dans les grands réseaux de transport. Les modèles statiques d'affectation ont été développés depuis environ un demi-siècle. La première description mathématique de ces modèles est due à Beckmann, Mc Guire et Winsten [3].

Les modèles d'affectation statiques sont décrits comme suit : étant donné un réseau, des lois de congestion et une matrice origine - destination (O-D), l'objectif est de déterminer un équilibre des usagers. Le concept d'équilibre des usagers (UE pour User-Equilibrium) est basé sur le (premier) principe de Wardrop[27], qui énonce essentiellement qu'à l'équilibre, chaque usager sélectionne le chemin le plus court. L'interprétation en théorie des jeux de ce principe, comme un jeu non coopératif de Cournot, a été mise en évidence par Haurie et Marcotte ([14]). Dans leur formulation originale, Beckmann et alii. ont montré, que le problème d'affectation statique dans un réseau, peut être formulé comme un programme d'optimisation convexe (avec une fonction objective non-linéaire et des contraintes linéaires). Les sorties de ce modèle sont les flux d'équilibre sur l'ensemble des arcs du réseau. A partir de cette information, il est possible de dériver un ensemble de mesures d'efficacité (MOE pour Measures Of Effectiveness) comme le temps de trajet total, le nombre de véhicules par kilomètre, le temps passé dans la congestion, la consommation d'énergie, les émissions de polluants, les indices d'équité, etc. La solution d'optimum social (OS) fournit une deuxième base. A l'optimum social, le coût total, égal à la somme des coûts de l'ensemble des usagers, est minimisé (deuxième principe de Wardrop). Ce second principe correspond à un idéal puisque la décentralisation de l'optimum social (via la tarification) n'est pas faisable en pratique. Autrement dit, il n'existe pas de politique réaliste qui permette d'internaliser l'ensemble des externalités, se référer à [17] et à d'autres travaux en Économie des Transports (discussion relative à la tarification au coût marginal, développée par W. Vickrey, en particulier dans le contexte des transports publics [1]).

Durant la dernière décennie, les modèles d'affectation statiques ont été étendus dans plusieurs directions. Plus loin, nous aborderons très brièvement les extensions majeures des modèles statiques. Les formulations des inégalités variationnelles des modèles d'affectation statiques ont été introduites par [7]. Dans ce chapitre, nous allons utiliser certaines formulations récentes des inégalités variationnelles parce qu'elles nous permettent de dériver des résultats d'existence sous des hypothèses peu contraignantes (voir également l'annexe A). Dans la formulation originale, le temps de trajet sur un arc dépend uniquement du flux entrant dans cet arc. Avec l'approche des inégalités variationnelles, l'interaction entre les flux (pour modéliser les intersections par exemple) est possible. De plus, lorsque les modèles d'affectation statiques sont formulés comme un problème des inégalités variationnelles, ils peuvent être résolus en utilisant les méthodes numériques standards. La formulation de l'équilibre stochastique (SUE pour Stochastic

User Equilibrium), dans lequel le choix de route des usagers est stochastique, définie par Daganzo et Sheffi [9] étend le cas déterministe introduit par [3]. A l'équilibre SUE, aucun automobiliste ne peut réduire son temps de trajet perçu en changeant unilatéralement son chemin (voir [9] et [25]). Dans ce cas, des usagers typiques sélectionnent leur chemin suivant les modèles de choix discrets (Logit ou Probit : voir [4] et [2]). Dans le cas d'une demande élastique, la matrice O-D n'est pas fixe et le nombre d'automobilistes dépend des conditions de circulation. La formulation du programme mathématique de ce problème a déjà été proposée dans [3]. Le modèle de choix est décrit dans [12] et par d'autres nombreux travaux. Finalement, le problème avec plusieurs classes d'usagers prend en compte différents segments (voir p.e. [7]). Un segment peut être caractérisé par une valeur du temps spécifique, un comportement de choix de route spécifique, une loi de congestion spécifique, etc. Plusieurs algorithmes ont été proposés pour résoudre ces problèmes. Commencant par l'algorithme de Frank et Wolf [13], d'autres procédures d'accélération ont été développées (voir, p.e. [16]). Pour une discussion plus générale sur les procédures numériques, voir p.e. [6].

Les phénomènes de congestion dynamique ont reçu plus d'attention durant les dernières décennies, d'abord au niveau de l'offre et plus récemment au niveau de la demande. Dans le modèle dynamique, le temps de trajet dépend de l'heure de la journée, et les décisions des usagers ne concernent pas seulement le choix de route (ou le mode) mais également l'heure de l'utilisation de l'infrastructure. Les modèles dynamiques ont donc créé de nouveaux paradigmes. En dépit de ce fait, la majorité des outils de planification utilise uniquement des modèles basés sur l'approche statique. Peut être que la raison principale, pouvant expliquer cette situation, est que les modèles statiques utilisent des formulations mathématiques qui peuvent être facilement résolues par les méthodes numériques modernes. Par ailleurs, l'existence et l'unicité reste très difficile à démontrer pour les modèles dynamiques, en général (y compris les effets de remontée de queue, etc.). Dans le but d'interpréter les sorties de ces modèles, nous devons trouver une explication dynamique intuitive raisonnable et possible des solutions statiques.

Intuitivement, il est clair que le processus dynamique est bien décrit par un modèle statique seul si l'ensemble des paramètres sont constants en fonction du temps. Autrement dit, nous espérons que le modèle statique puisse nous fournir un régime stationnaire du processus dynamique. Cependant, comme nous l'argumentons, pour les modèles standards du trafic, il est difficile de définir une telle interprétation. L'objectif principal de ce chapitre est de décrire les modèles statiques pour les transports publics et privés, comme un état stationnaire du processus dynamique. De plus, dans l'approche proposée, les paramètres et les sorties ont des explications physiques claires. Dans cet exposé, nous argumentons que l'approche statique due à Beckmann et al. n'est pas appropriée pour les transports privés, alors qu'elle fournit une description intuitive des transports publics. Pour les transports privés nous décrivons donc une nouvelle approche que nous

nommons Dynamique Stable (Stable Dynamics). Nous illustrons cette approche par des exemples puis nous fournissons une formulation pouvant être appliquée à tout type de réseau. Nous établissons également une nouvelle connection entre la Dynamique Stable et un problème classique de gestion de la production : le problème du coût minimal du transport de produits multiples avec des capacités pré-définies des arcs. Cette connection entre les modèles d'affectation statiques et les modèles de production est surprenante puisque le problème formulé est un équilibre des usagers dans les premiers (UE : User Equilibrium) alors que c'est un optimum social (SO : Social Optimum) dans les seconds.

L'objectif de cet exposé n'est pas de réviser les modèles d'affectation statiques et leur extension mais de fournir un cadre compréhensif et systématique de l'équilibre d'un modèle statique dans un réseau de transport (privé ou public) congestionné. La motivation de cette analyse est abordée plus loin dans la dernière section de ce chapitre.

Dans la section (2), les notations et les discussions du modèle standard de trafic avec congestion de Beckmann sont introduites. Contrairement aux pratiques courantes, nous argumentons que ce modèle n'est pas applicable au transport privé mais uniquement au transport public. Dans la section 2, un modèle pour les transports publics basé sur la formulation de Beckmann avec contrainte de capacité est développé. Dans la section 3, un modèle pour les transports privés, dit de Dynamique Stable, compatible avec le régime stationnaire du processus dynamique est proposé. Dans la section 3, les concepts de la Dynamique Stable sont illustrés avec deux exemples : deux routes en parallèle et le paradoxe de Braess. Ces exemples peuvent être résolus uniquement par des arguments logiques. La formulation de la Dynamique Stable pour un grand réseau est exposée dans la section 4. Dans la section 5, deux illustrations de l'approche de la Dynamique Stable (des matrices O-D endogènes et de choix modèle) sont discutées. Les remarques de conclusion sont abordées dans la section 6. Pour une description complète, se référer à l'appendice dans lequel nous présentons un exposé simple de la théorie des inégalités variationnelles dans le cas d'opérateurs monotones non-bornés.

## 1 Principaux résultats et l'approche de Beckmann

### 1.1 Principaux résultats des modèles statiques

Commençons par introduire quelques notations. Nous travaillons avec un réseau  $R$  incluant un ensemble de noeuds  $N$  et un ensemble d'arcs orientés  $A$  :

$$R = fN; Ag; \quad N = f1; :::; ng; \quad A = f1; :::; mg;$$

Pour chaque arc  $a \in A$ , nous associons une paire de noeuds  $i_a; j_a \in N$ . Pour chaque arc  $a \in A$ , nous notons le flux total traversant cet arc par  $f^{(a)}$ . Il est commode de traiter

l'ensemble des flux des arcs comme un vecteur :

$$\mathbf{f} = (f^{(1)}; \dots; f^{(m)})^T \in \mathbb{R}^m;$$

En vue de décrire le coût de déplacement dans le réseau, pour chaque arc  $\mathcal{A}$ , nous introduisons une fonction de coût :

$$c^{(\mathcal{A})}(\mathbf{f}); \quad \mathbf{f} \in D \subset \mathbb{R}^m; \quad \mathcal{A} = 1; \dots; m;$$

où  $D$  est un domaine convexe ouvert de ces fonctions. Il est aussi commode de traiter l'ensemble des fonctions de coût comme un vecteur de ces fonctions :

$$\mathbf{c}(\mathbf{f}) = (c^{(1)}(\mathbf{f}); \dots; c^{(m)}(\mathbf{f}))^T;$$

Dans le cas simple, chaque composante de ce vecteur des fonctions dépend uniquement des flux des arcs correspondants. Toutefois comme nous le verrons plus loin, sous certaines hypothèses naturelles sur les fonctions  $c(\mathbf{f})$ , nous pouvons traiter l'interaction des flux sur les différents arcs.

Pour un réseau  $\mathcal{R}$ , nous définissons également l'ensemble des paires origine - destination (O-D) :

$$OD = \mathcal{W}_k = \{i_k; \pm_k\} : i_k, \pm_k \in \mathcal{N}; i_k \neq \pm_k; k = 1; \dots; p;$$

Chaque paire O-D  $\mathcal{W}_k$  génère une demande  $d_k$ . Cette demande est traditionnellement considérée comme un flux moyen des usagers qui désirent se déplacer du noeud  $i_k$  à un autre noeud  $\pm_k$ ; par conséquent la demande est un nombre réel non négatif.

De plus, pour chaque paire O-D  $\mathcal{W}_k$ , nous pouvons introduire un ensemble fini de routes possibles connectant  $i_k$  à  $\pm_k$  :

$$\mathcal{R}_k = \{a_{k,r} \in \mathbb{R}^m; r = 1; \dots; r_k\};$$

où la composante  $a_{k,r}^{(\mathcal{A})} = 1$  si la route  $r$  est incluse dans le chemin; ailleurs cette composante est nulle. Pour des raisons de simplicité nous notons  $\mathbf{A}_k$  la matrice composée de l'ensemble des vecteurs colonnes  $\mathbf{a}_{k,r}$  :

$$\mathbf{A}_k = (\mathbf{a}_{k,1}; \dots; \mathbf{a}_{k,r_k});$$

Finalement, pour chaque paire O-D  $\mathcal{W}_k$ , nous introduisons un ensemble de partitions des flux faisables sur les routes :

$$\Delta_k = \{f \in \mathbb{R}_+^{R_k} : \sum_{r=1}^{X_k} F_k^{(r)} = d_k g\}$$

La composante  $F_k^{(r)}$  du vecteur  $F_k \in \Delta_k$  nous informe sur les flux qui vont de l'origine  $i_k$  à la destination  $j_k$  le long du chemin  $r$  à partir de l'ensemble des routes  $R_k$  correspondant.

Ces notations permettent de décrire le chargement du réseau  $R$  dans une forme convenable. En effet, si pour une paire O-D  $U_k$ , nous choisissons quelques partitions des flux sur les routes  $F_k \in \Delta_k$ , alors l'impact total de ces flux sur les flux des arcs du chemin dans le réseau est le suivant :

$$f_k = \sum_{r=1}^{X_k} F_k^{(r)} a_{k,r} = A_k F_k$$

Posons  $F = (F_1^T; \dots; F_p^T)^T$  et  $\Delta = \prod_{k=1}^p \Delta_k$ . Dès lors, le flux sur les arcs du réseau est :

$$f = \sum_{k=1}^{X^0} A_k F_k = AF$$

où  $A = (A_1; \dots; A_p)$ :

Maintenant, nous pouvons définir le coût du trajet dans le réseau comme une fonction de l'ensemble des partitions des flux du vecteur  $F$ . En effet, si nous choisissons un  $F \in \Delta$ , le coût de trajet des arcs  $^{\circledast}$  sera :

$$c^{(\circledast)}(f) = c^{(\circledast)}(AF)$$

Par la suite, pour chaque paire O-D  $U_k$ , le coût de se déplacer le long du chemin  $a_{k,r} \in R_k$  a la forme suivante :

$$C_k^{(r)}(F) = \sum_{\circledast=1}^{X^0} c^{(\circledast)}(AF) a_{k,r}^{(\circledast)} = hc^{(\circledast)}(AF); a_{k,r}^{(\circledast)}$$

Ainsi, le vecteur du coût du chemin pour cette paire O-D se définit comme suit :

$$C_k(F) = A_k^T c^{(\circledast)}(AF)$$



Finalement, la matrice du coût total du chemin pour l'ensemble des paires O-D  $C(F) = (C_1^T(F); \dots; C_p^T(F))^T$  peut être présentée par :

$$C(F) = A^T c(AF):$$

Notons  $\Delta_D = \{F \in \mathbb{R}^n : AF \in D\}$ . Maintenant, nous pouvons écrire le problème d'équilibre d'attribution du trafic standard. Trouver un vecteur de partition des flux  $F^* \in \Delta_D$  tel que pour chaque paire O-D  $k$ ; nous avons

$$(F_k^*)^{(l)} > 0 \Rightarrow C_k^{(l)}(F^*) = \min_{r \in R_k} C_k^{(r)}(F^*): \quad (1)$$

Il est connu (voir [20]) que le problème d'équilibre (1) peut être écrit sous la forme d'une inégalité variationnelle. Nous allons compléter cet exposé en présentant une preuve simple.

**Théorème 1** Le problème (1) est équivalent à trouver une solution correcte de l'inégalité variationnelle  $F^* \in \Delta_D$  (2), c'est-à-dire

$$\text{Trouver } F^* \in \Delta_D: hC(F^*); F \in F^* \text{ i } \leq 0 \text{ pour tout } F \in \Delta_D: \quad (2)$$

**Preuve 1 (Preuve)** En effet, soit  $F^*$  la solution de l'inégalité variationnelle (2). Considérons une paire O-D arbitraire  $k$ . Supposons que  $(F_k^*)^{(l)} > 0$  et pour tout autre chemin  $r \in R_k$ , nous avons  $C_k^{(r)}(F^*) < C_k^{(l)}(F^*)$ : Choisissons  $\epsilon > 0$  très petit, tel que l'ensemble des vecteurs

$$F_k = ((F_k^*)^{(1)}; \dots; (F_k^*)^{(l)} - \epsilon; \dots; (F_k^*)^{(r)} + \epsilon; \dots; (F_k^*)^{(r_k)})^T$$

soit non négatif et  $F_k \in \Delta_D$ . Donc, pour  $\epsilon$  assez petit

$$F_k = ((F_1^*)^T; \dots; (F_k^*)^T; \dots; (F_p^*)^T)^T \in \Delta_D:$$

En même temps,

$$hC(F^*); F_k \in F^* \text{ i} = hC_k(F^*); F_k \in F_k^* \text{ i} = C_k^{(l)}(F^*) \epsilon - \sum_{r \in R_k} C_k^{(r)}(F^*) \epsilon < 0:$$

Ceci contredit notre hypothèse que  $F^*$  est une solution à (2).

Vice versa, soit  $F^*$  une solution à (1). Notons

$$u_k = \min_{r \in R_k} C_k^{(r)}(F^*); \quad k = 1; \dots; p:$$

Puisque tout vecteur  $F \in \Delta_D$  a des composantes non-négatives, nous obtenons :

$$\begin{aligned} hC(F^a); F i &= \sum_{k=1}^K hC_k(F^a); F_k i = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R C_k^{(r)}(F^a) F_k^{(r)} \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R u_k F_k^{(r)} = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R u_k d_k \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R u_k (F_k^a)^{(r)} = \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^R C_k^{(r)}(F^a) (F_k^a)^{(r)} \\ &= \sum_{k=1}^K hC_k(F^a); F_k^a i = hC(F^a); F^a i: \end{aligned}$$

Ainsi, le problème d'équilibre d'affectation du trafic (1) est totalement équivalent à un problème d'inégalités variationnelles (2). Dans le but d'assurer l'existence de la solution du dernier problème, nous devons poser plusieurs hypothèses.

**Définition 1** Le vecteur des fonctions du coût de trajet  $c(x)$  est considéré monotone si

$$h c(x) ; c(y) ; x \leq y \Rightarrow 0 \quad \forall x, y \in D:$$

Si cette inégalité est stricte, alors la fonction est strictement monotone. La fonction  $c(f)$  est dite fermée si pour chaque  $y \in D$  nous avons  $h c(x) ; x \leq y \Rightarrow +1$  lorsque  $x \notin D$ :

Notons que le vecteur des fonctions fermées monotones peut être discontinu et non borné dans son domaine. Néanmoins, cette propriété assure quelques résultats d'existence pour les inégalités variationnelles correspondantes. Dans le théorème suivant, nous utilisons des résultats classiques de la théorie des inégalités variationnelles monotones (voir appendice pour un court exposé).

**Théorème 2** : Soit la fonction fermée et monotone du coût de trajet  $c(x)$ . Si  $\Delta_D \neq \emptyset$ , alors il existe une solution faible  $F_a$  au problème des inégalités variationnelles (2), qui est

$$F_a \in \Delta_D : h C(F) ; F \leq F_a \Rightarrow 0 \quad \forall F \in \Delta_D: \quad (3)$$

Si  $c(x)$  est continue, alors  $F_a$  est également une solution correcte à (2). Si  $c(x)$  est fortement monotone, alors dans les deux cas la solution est unique.

**Preuve** : Puisque  $C(F) = A^T c(AF)$ ; le théorème suivant suit le Théorème 9 et le Lemme 7 présentés dans l'Appendice.

Dans la section suivante, nous allons voir quelques exemples importants des fonctions fermées et monotones du coût de trajet.

## 1.2 Le modèle de Beckmann

Pour conclure cette section, discutons le cas particulier de l'équilibre général du modèle d'affectation du trafic (1), qui est appelé le **modèle de Beckmann** (voir [3]). Dans ce modèle, il est supposé que pour chaque arc, la fonction du coût du trajet  $c^{(\otimes)}(f)$  dépend uniquement du flux sur cet arc :

$$c^{(\otimes)}(f) \text{ est fonction de } c^{(\otimes)}(f^{(\otimes)}); \quad \otimes = 1; \dots; m: \quad (4)$$

Supposons également que  $0 \in D$ : Sous ces hypothèses, le problème des inégalités variationnelles (2) peut être écrit sous une forme beaucoup plus simple. En effet, définissons les fonctions suivantes :

$$\mathfrak{A}^{(\otimes)}(u) = \int_0^u c^{(\otimes)}(\zeta) d\zeta; \quad \otimes = 1; \dots; m:$$

Notons que  $(\mathfrak{A}^{(\otimes)}(u))' = c^{(\otimes)}(u)$ : Par conséquent, en accord avec l'hypothèse 1, chaque composante  $\mathfrak{A}^{(\otimes)}(u)$  est une fonction convexe en  $u$ : Par conséquent, la fonction

$$\mathfrak{A}(f) = \sum_{\otimes=1}^m \mathfrak{A}^{(\otimes)}(f^{(\otimes)})$$

est convexe en  $f$ : Intéressons nous maintenant à la fonction suivante :

$$S(F) = \mathfrak{A}(AF); \quad \text{dom } S = \{F : AF \in D\}$$

Cette fonction est fermée et convexe (voir Appendice). Supposons pour l'instant que  $c(f)$  est continue. Donc  $S(F)$  est dérivable et

$$r S(F) = A^T c(AF) \text{ est } C(F):$$

Ainsi, la condition d'inégalité variationnelle (2) peut être écrite comme suit :

$$r S(F^*) ; F \in F^* ; 0 \leq F \in \Delta_D:$$

Cela correspond exactement à la condition de l'optimum pour le problème de minimisation convexe suivant :

$$S^* = \min_F S(F) : F \in \Delta_D = \min_{f; F} \mathfrak{A}(f) : f = AF; F \in \Delta_D: \quad (5)$$

Ainsi, nous aboutissons à l'affirmation suivante.

**Théorème 3** Soit la fonction fermée et monotone du coût de trajet  $c(f)$ . Si elle satisfait la condition (4), alors toute solution au problème d'optimisation convexe (5) est une solution faible de l'inégalité variationnelle (3). Si  $c(f)$  est continue, alors toute solution à ce problème est une partition du flux d'équilibre pour le problème (1).

Notons que la formulation d'optimisation (5) a finalement deux avantages pour le problème des inégalités variationnelles. (2). Premièrement, les problèmes d'optimisation sont, en général, plus simples du point de vue du calcul informatique que les inégalités variationnelles (voir [21]). Le nombre de variables dans (5) et (2) constitue un second avantage. Les deux problèmes sont posés en tenant compte du vecteur de répartition du flux total  $F$ : Autrement dit, dans le but de former une matrice  $A$  de ces problèmes, nous devons énumérer l'ensemble des itinéraires possibles dans le réseau. Même pour des réseaux de taille relativement petite, le nombre d'itinéraires s'accroît de façon exponentielle. Par conséquent, les deux problèmes peuvent être résolus numériquement uniquement pour des réseaux de petite taille. Néanmoins, puisque ce problème (5) est un problème d'optimisation, nous pouvons réécrire le problème dual équivalent avec un nombre raisonnable de variables. Nous verrons que ce problème dual peut être résolu numériquement et les variables primaires  $F$  (ou une partie de ce vecteur) peuvent être calculées.

Dérivons maintenant la forme du problème dual. (5). Avant tout, nous devons introduire le concept de la fonction conjuguée.

**Définition 2** Pour une fonction convexe  $f(x) : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ ; la fonction

$$f^*(s) = \sup_{x \in \text{dom } f} \{s^T x - f(x)\}$$

est appelée la fonction conjuguée de  $f$  :

Notons que la fonction  $f^*(s)$  est toujours convexe et sous certaines hypothèses faibles, nous avons  $(f^*)^* = f$  : Ceci revient à dire que

$$f(x) = \sup_{s \in \text{dom } f^*} \{s^T x - f^*(s)\}$$

Compte tenu de nos objectifs, nous devons travailler uniquement avec des fonctions conjuguées d'une variable. C'est à dire nous devons définir :

$$\mathcal{H}_\alpha^{(\otimes)}(\zeta) = \sup_{u \in \text{dom } \mathcal{H}^{(\otimes)}} \{ \zeta^T u - \mathcal{H}^{(\otimes)}(u) \}; \quad \alpha = 1; \dots; m \quad (6)$$

Dans la prochaine section, nous devons considérer certains exemples typiques des fonctions  $\mathcal{H}^{(\otimes)}(\zeta)$ ; et nous verrons que dans plusieurs cas, les fonctions conjuguées correspondantes peuvent être calculées dans une forme fermée.

Nous devons également introduire les fonctions du chemin le plus court dans le réseau  $R$ . Fixons d'abord les temps de trajet sur les arcs du réseau :

$$t = (t^{(1)}; \dots; t^{(m)})^T \in \mathbb{R}^m;$$

Notons  $T_{(i,j)}(t)$  la distance du chemin le plus court entre les noeuds  $i$  et  $j$  en prenant en compte la distance du chemin le plus court entre les noeuds  $i$  et  $j$  sous contrainte

du temps de trajet du chemin  $t$ . Pour chaque paire O-D  $\mathcal{W}_k = (i_k; \pm_k)$  notons  $T_k(t) = T_{(i_k; \pm_k)}(t)$ : Il est facile de voir que :

$$T_k(t) = \min_{1 \leq r \leq r_k} h_{k;r} t_i$$

Il s'agit donc d'une fonction linéaire par morceau et concave en  $t$ :

En utilisant les fonctions (6) et les fonctions du temps de trajet  $T_k(t)$ , nous pouvons définir le problème dual de (5):

$$S^a = \max_{\substack{\mathcal{X}^n \\ k=1}} d_k T_k(t) \quad \text{subject to } \substack{\mathcal{X}^n \\ \textcircled{a} = 1} \quad \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}(t^{(\textcircled{a})}) : t \in F \quad ; \quad (7)$$

où  $F = \bigcap_{\textcircled{a}=1}^m \text{dom } \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}$  :

**Théorème 4** Si  $\Delta_D \in \mathbb{R}^+$ ; alors les solutions optimales  $F^*$  et  $t^*$  pour les problèmes (5) et (7) existent et  $S^a = S_a$ : De plus,  $t^*$  est un vecteur des multiplicateurs duaux optimaux des contraintes d'inégalité  $f = AF$  dans (5).

Preuve: En effet, pour le modèle de Beckmann, nous avons :

$$\begin{aligned} S^a &= \min_{f; F} \left( \substack{\mathcal{X}^n \\ \textcircled{a} = 1} \quad \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}(f^{(\textcircled{a})}) : f = AF; F \in \Delta \right) \\ &= \min_{f; F} \left( \substack{\mathcal{X}^n \\ \textcircled{a} = 1} \quad \max_{\substack{t^{(\textcircled{a})} \in \text{dom } \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})} \\ \textcircled{a} = 1}} f^{(\textcircled{a})} t^{(\textcircled{a})} \quad ; \quad \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}(t^{(\textcircled{a})}) : f = AF; F \in \Delta \right) \\ &= \max_{t \in F} \min_{\substack{f; F \\ \textcircled{a} = 1}} h f; t_i \quad ; \quad \substack{\mathcal{X}^n \\ \textcircled{a} = 1} \quad \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}(t^{(\textcircled{a})}) : f = AF; F \in \Delta \\ &= \max_{t \in F} \min_{f; F} h f; t_i : f = AF; F \in \Delta \quad ; \quad \substack{\mathcal{X}^n \\ \textcircled{a} = 1} \quad \mathcal{W}_a^{(\textcircled{a})}(t^{(\textcircled{a})}) : \end{aligned}$$

Il reste à noter que :

$$h f; t_i = h A F; t_i = h F; A^T t_i = \sum_{k=1} h F_k; A_k^T t_i$$

En conséquence,

$$\min_{f; F} h f; t_i : f = AF; F \in \Delta g = \min_{k=1}^{\textcircled{a}} h F_k; A_k^T t_i : F_k \in \Delta_k = \sum_{k=1}^{\textcircled{a}} d_k T_k(t)$$

Ainsi, à la place de résoudre le problème (5) de dimension très élevée, nous pouvons résoudre un problème d'optimisation convexe non-ajusté (7), où le nombre de variables est égal au nombre d'arcs du réseau. La fonction objectif du dernier problème inclut les fonctions du chemin le plus court qui peut être calculé efficacement (voir [18]).

## 2 Portée du modèle de Beckmann

### 2.1 Motivation

Traditionnellement, le modèle de Beckmann, décrit dans la section précédente, est utilisé dans l'analyse de l'accroissement de la congestion dans les transports individuels (flux des voitures privées en zone urbaine ou interurbaine). Donc, nous devons interpréter la fonction de coût de trajet  $c^{(a)}(f^{(a)})$  sur l'arc  $a$  comme le temps de trajet passé par les automobilistes sur l'arc  $a$ : Différentes formes de fonctions de temps de trajet ont été proposées; elles conduisent toutes à un problème pouvant se résoudre numériquement. Toutefois, la question qui se pose est à quel point ces modèles sont compatibles avec les lois physiques régissant la congestion du trafic. En effet, l'hypothèse principale du modèle de Beckmann est la suivante:

Le temps de trajet sur chaque arc est une fonction non-décroissante du flux.

Commençons par examiner cette affirmation avec plus de détails en développant quatre types d'arguments.

Premièrement, si nous acceptons que les modèles dynamiques nous fournissent un régime stationnaire du processus dynamique, alors, nécessairement, le flux et la densité (ou l'occupation) des automobilistes sur un arc particulier ainsi que le temps de trajet sur cet arc sont constants dans le temps. Notons qu'au régime stationnaire, l'identité fondamentale suivante est nécessairement vérifiée:

$$\text{flux} = \text{vitesse} \times \text{densité}$$

Supposons pour l'instant que la densité des automobilistes est constante dans le temps. Nous examinons ci-dessous, l'impact du changement exogène du flux à l'arrivée. Puisque la densité est constante, un accroissement du flux provoque un accroissement proportionnel de la vitesse, et par conséquent, une réduction du temps de trajet, ce qui est contradictoire.

Ainsi, afin de justifier cette hypothèse principale (voir plus loin), nous supposons également que la densité décroît plus vite que le flux. Malheureusement, ceci n'est pas toujours possible puisque l'intervalle de variation de la densité des routes n'est pas assez grand. La densité est bornée par  $\frac{1}{2} \rho_{\max} = 1000 \text{ m} / (6 \text{ m} \times \text{veh}) \approx 165 \text{ veh/km}$ , où  $6 \text{ m}$  est la longueur moyenne occupée par une voiture à l'arrêt et en mouvement. La vitesse correspondante est environ  $3 \text{ km/h}$ : D'un autre côté, pour une densité d'environ  $33 \text{ veh/km}$ , qui est six fois plus petite que  $\frac{1}{2} \rho_{\max}$ , nous pouvons observer que la vitesse de circulation à vide sur les autoroutes urbaines est limitée à  $90 \text{ km/h}$ : Cet intervalle de variation de la densité (de 1 à 6) ne peut pas nous permettre de modéliser de façon compatible des augmentations significatives de la vitesse (d'un facteur de 30) qui en

parallèle fait que le flux décroît.

Deuxièmement, le modèle statique appliqué considère un flux supérieur à la capacité. Alors, nécessairement, le flux additionnel est affecté à la période suivante, donc le régime dans ce cas n'est pas stationnaire. Dans la section suivante, nous devons discuter une autre approche, dite Dynamique Stable, dans laquelle nous considérons uniquement les régimes stationnaires. Ceci est possible car nous considérons que la contrainte de capacité n'est jamais violée.

Troisièmement, l'observation des données de comptage du trafic suggère qu'un faible flux correspond à deux situations opposées. Soit la route n'est pas attractive et les automobilistes ne l'utilisent pas; nous pouvons, alors, observer les conditions du trafic à vide (ceci est connu comme la branche stable du diagramme fondamental). Soit la route est très congestionnée et la vitesse est très petite (et par conséquent le flux est très petit). Ainsi, nous ne pouvons pas dire que ce flux (une entrée) est l'unique variable responsable de la variation du temps de trajet sur cet arc. Les données de comptage du trafic suggèrent qu'un même flux peut supporter deux temps de trajet (branche instable) différents. Autrement dit, la relation entre le temps de trajet et le flux n'est pas, a priori, une fonction mais une correspondance. Evidemment, le modèle dynamique peut aisément traiter le fait que le même flux peut être compatible avec plusieurs régimes. Comme il l'est montré dans la section suivante, l'approche de la Dynamique Stable est également compatible avec les observations des données de comptage.

Quatrièmement, la seconde hypothèse (4) dans le modèle de Beckmann nous informe que les flux, sur certains arcs particuliers, sont responsables du temps du trajet aux mêmes arcs. Nous avons vu, précédemment, que cette hypothèse est nécessairement satisfaite, puisque la relation entre le flux et le temps de trajet n'est pas une fonction mais une correspondance. Ceci ne doit pas être surprenant pour une raison décrite ci-dessous. En effet, la condition du trajet d'un arc est relative aux conditions du trajet sur cet arc en tenant compte des conditions du trafic sur les arcs alentours. Ceci est vrai, mais notre suggestion est différente. Nous voulons dire que les conditions d'équilibre du trajet sur un arc dépend, a priori, des conditions de l'équilibre du trajet sur l'ensemble des routes alternatives. Ceci implique que toute relation entre le temps de trajet et le flux, définie sur un arc spécifique, est incomplète. En effet, le temps de trajet est une sortie des conditions d'équilibre et ne peut pas être compris en dehors de ce contexte mais uniquement le long des chemins d'équilibre.

Ces conditions montrent que, malgré son attraction théorique, le modèle de Beckmann n'est pas compatible avec le régime stationnaire et il ne peut pas expliquer le fait que le temps de trajet n'est pas une fonction du flux.

Dans la section suivante, nous désirons répondre à la question suivante :

Existe-t-il un modèle de transport tel que les hypothèses de Beckmann soient rigoureusement satisfaites?

Dans le reste de cette section, nous argumentons que les hypothèses de Beckmann sont, en effet, souhaitables pour une analyse rigoureuse des réseaux de transports publics congestionnés. Dans la section 3, nous devons présenter une seconde approche pour décrire la congestion du trafic, qui est libérée des objections précédentes.

## 2.2 Modèle de Beckmann pour les transports publics

Il est évident que le flux de passagers dans un réseau de transports publics ne peut pas être expliqué par des modèles utilisés pour les transports privés. La différence principale est que le temps de trajet dans le réseau public est constant et il ne peut pas dépendre des flux des passagers (ce qui n'est pas nécessairement vrai pour les bus). Par conséquent, soit nous supposons que les passagers voyagent toujours le long du chemin le plus court, soit nous devons trouver une raison pour la diversification des routes utilisées, qui sont sans rapport avec le temps de trajet. Dans la suite, nous suggérons un critère pour le choix de route qui tient compte de la convenance du trajet et non uniquement du temps de trajet.

Nous commençons par formaliser l'idée de la convenance. Pour plus de précisions, nous considérons un réseau de transport public métropolitain. La composante principale pour ce type de réseau est la ligne, avec plusieurs stations (ou noeuds) connectées de façon séquentielle par des arcs orientés. Pour chaque arc  $\circ$ , nous connaissons le temps de trajet  $\bar{t}^{(\circ)} > 0$ . Nous supposons que l'intervalle de temps entre deux trains successifs sur cette ligne est constant et égal à  $\delta > 0$  et que chaque train est composé du même nombre de wagons  $q$ . Pour certains régimes stationnaires, nous observons que le flux de passagers  $f^{(\circ)}$  sur l'arc  $\circ$  est constant. Dès lors, le nombre moyen de passagers dans chaque wagon est constant :

$$n_{\circ} = \frac{\delta}{q} f^{(\circ)}.$$

Notre hypothèse principale est la suivante :

La pénalité de voyager sur l'arc  $\circ$  est une fonction non-décroissante de  $n_{\circ}$

Nous pouvons trouver facilement différentes raisons pour cette pénalité. Par exemple, nous pouvons supposer que la pénalité est égale à zéro si  $n_{\circ} \leq b$ ; où  $b$  est le nombre de places assises dans le wagon. Lorsque  $n_{\circ}$  dépasse  $b$ ; nous pouvons supposer que ces caractéristiques sautent à un certain niveau plus élevé. Alors, elle croît vers l'infini lorsque



$n_{\circ}$  approche  $\bar{n}$ ; (le nombre maximal de passagers dans le wagon).

Afin de formuler la fonction de coût de cet arc, nous devons exprimer la pénalité en terme de temps. Alors, en vue de ces considérations, nous pouvons supposer que la fonction de coût sur cet arc  $\circ$  est de la forme suivante :

$$c^{(\circ)}(f^{(\circ)}) = \bar{t}^{(\circ)} + \mu_{\circ} \left( \frac{1}{q} \right) f^{(\circ)} ;$$

où  $\mu_{\circ}(t)$  est une fonction non-décroissante et  $\mu_{\circ}(0) = 0$ : Ainsi, nous pouvons obtenir un modèle de performance des arcs qui s'adapte parfaitement aux hypothèses de Beckmann.

Dès que nous aurons choisi la fonction  $\mu_{\circ}(t)$ ; le reste du modèle de transport métropolitain est assez simple. Nous formons l'ensemble des origines et l'ensemble des destinations pour définir la matrice O-D. Nous modélisons l'ensemble des lignes disponibles et nous connectons quelques stations par des arcs avec des temps de trajet fixes. Nous connectons également les noeuds des différentes lignes. Finalement, nous définissons les temps d'accès du centroïde à certaines stations. De plus, il est possible d'inclure quelques estimations des temps d'attente. En sortie, nous obtenons le modèle de Beckmann, qui peut être résolu en utilisant la forme du problème dual (7).

Pour formuler le problème dual du modèle de Beckmann, nous travaillons avec des fonctions conjuguées  $\mathcal{H}_{\bar{n}}^{(\circ)}(t)$ : Nous montrons, maintenant, comment elles peuvent être calculées à partir d'une forme particulière de la fonction  $\mu_{\circ}(t)$ : Cette fonction est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_{\circ}(n) &= 0; \text{ pour } 0 \leq n \leq b; \\ \mu_{\circ}(n) &= \frac{a(\bar{n} - b)}{\bar{n} - n}; \text{ pour } b < n < \bar{n}; \end{aligned}$$

Dans cette expression,  $a$  est la pénalité d'absence de places assises, exprimée en terme de temps. Cette pénalité tend vers l'infini lorsque  $n$  approche de  $\bar{n}$ , la capacité totale du wagon. Alors :

$$\mathcal{H}_{\bar{n}}^{(\circ)}(u) = \int_0^u \left[ \bar{t}^{(\circ)} + \mu_{\circ} \left( \frac{1}{q} \right) \right] d\zeta = \bar{t}^{(\circ)} \zeta + \frac{aq}{\circ} (\bar{n} - b) \zeta \ln \frac{\bar{n} - b}{\bar{n} - \frac{1}{q}u} ;$$

où  $(v)_+ = \max\{0, v\}$ : Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{n}}^{(\circ)}(\zeta) &= \sup_u \left[ \zeta u - \mathcal{H}_{\bar{n}}^{(\circ)}(u) : u < \frac{q}{\circ} \bar{n} \right] \\ &= \frac{aq}{\circ} \bar{A} \frac{\zeta - \bar{t}^{(\circ)}}{a} ; \quad \text{dom } \mathcal{H}_{\bar{n}}^{(\circ)} = [\bar{t}^{(\circ)}; 1]; \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\bar{A}(v) &= b \ln v; \text{ pour } 0 < v < 1; \\ \bar{A}(v) &= \bar{\pi} \ln v + (\bar{\pi} - b) \ln \frac{1}{v}; \text{ pour } v > 1;\end{aligned}$$

Notons que cette fonction est convexe et continûment dérivable.

À notre connaissance, les fonctions de pénalité ne sont pas introduites dans les modèles de transports publics, alors qu'elles jouent un rôle important dans les choix des usagers. Nous avons proposé une approche attractive pour les incorporer dans l'affectation du trafic des transports publics.

Cet exemple est un exemple parmi d'autres. Une autre dépendance intéressante dispose de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\gg^{(\otimes)}(n) &= 0; \text{ pour } 0 < n < b; \\ \gg^{(\otimes)}(n) &= \frac{a(\bar{\pi} - b)}{\bar{\pi} - n} + \frac{a(n - b)}{\bar{\pi} - b}; \text{ pour } b < n < \bar{\pi};\end{aligned}$$

Dans ce cas, la seconde expression a une dérivée nulle lorsque  $n = b$ ; ce qui reste assez raisonnable. Notons que les fonctions du problème dual, correspondant à ce dernier exemple, sont également calculées dans une forme fermée. Dans les deux cas, la solution d'équilibre correspondante peut être calculée numériquement à partir de la formulation du problème dual de Beckmann (7). Nous laissons les détails de la modélisation (connexions, prix des tickets, etc.) comme un exercice pour le lecteur.

Dans tous les cas, le comportement des flux à l'équilibre dans notre modèle est assez clair. Si la demande est faible et que l'ensemble des passagers peut voyager dans les meilleures conditions, l'ensemble des usagers sélectionne le chemin le plus court. Lorsque la demande augmente, à un moment donné, les passagers commencent à dévier vers d'autres chemins alternatifs qui sont plus longs mais moins congestionnés. Notons qu'avec ces fonctions de pénalité, les contraintes de capacité des flux ne peuvent pas être violées puisque le coût du trajet (la pénalité) tend vers l'infini lorsque le flux s'approche de la borne supérieure.

## 3 Modèle Dynamique Stable : présentation et exemples

### 3.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons une description rapide du modèle Dynamique Stable, nouvelle approche pour modéliser la congestion du trafic dans un réseau de transport privé (voir [22] et [24] pour les détails et les démonstrations).

Nous considérons le même réseau  $\mathcal{R}$  et le même ensemble de paires O-D que dans le modèle de Beckmann (voir section 2). Dans ce cas, nous supposons un régime stationnaire durant une période de temps  $T$ : Autrement dit, le nombre d'usagers  $d_k$  se déplaçant du noeud  $i_k$  au noeud  $j_k$ . Les usagers sont supposés partir selon un flux uniforme  $f_k = d_k/T$ . Comme nous l'avons vu dans le cas de deux routes parallèles, le régime Dynamique Stable n'existe pas si  $T$  est assez petit. Puisque cette contrainte n'est pas introduite dans les modèles statiques standards, ils supposent que  $T = 1$ , donc  $f_k = d_k$ :

Nous introduisons deux autres caractéristiques du réseau: pour chaque arc  $a$ , nous définissons un temps de trajet minimal  $\bar{t}_a$  et une capacité (le flux entrant maximal)  $\bar{f}_a$ : Notons que ces deux paramètres fournissent une description naturelle des arcs dans le réseau. Le temps de trajet minimal est une fonction de régulation, tant que la capacité ne dépend pas du nombre de voies, du type de route, des feux de signalisation aux intersections, etc. De façon intéressante, ces descriptions minimales du réseau fournissent suffisamment d'informations pour le calcul d'une solution compatible. Nous introduisons maintenant trois hypothèses. La première concerne le choix de route.

**Hypothèse 1** Chaque usager considère le temps de trajet du chemin comme donné. Pour chaque paire O-D, seuls les chemins dont le temps de trajet est minimal sont sélectionnés.

Nous considérons ici que tous les usagers sélectionnent les routes dont les temps de trajet sont minimaux. Cette hypothèse peut être relâchée dans le cas de la Dynamique Stable en supposant que les usagers de la paire O-D  $i_k$  font face à deux routes  $a_{k,r}$  et  $a_{k,r^0}$  avec des probabilités de sélection notées  $P_k^{(r)}$  et  $P_k^{(r^0)}$  avec  $P_k^{(r^0)} > P_k^{(r)}$ , ssi  $C_k^{(r)} > C_k^{(r^0)}$ .

La seconde hypothèse concerne les solutions de stationnarité. Puisque nous voulons calculer la solution de stationnarité, le flux entrant dans le lien ne peut excéder la capacité, autrement dit:

**Hypothèse 2** Le flux  $f_a$  sur l'arc  $a$  ne peut jamais excéder la capacité  $\bar{f}_a$  de cet arc:  $f_a \leq \bar{f}_a$

Deux situations peuvent se réaliser. Soit le flux sur l'arc  $a$  est plus faible que sa capacité, et il est alors supposé que le temps de trajet sur cet arc est égal au temps de trajet minimum. Soit le flux est égal à la capacité de l'arc et dans ce cas, le temps de trajet ne peut être que supérieur ou égal au temps de trajet minimum.

**Hypothèse 3** Tant que le flux est inférieur à la capacité, le temps de trajet sur l'arc est égal au temps de trajet minimum; s'il est égal à la capacité, le temps de trajet est supérieur ou égal au temps de trajet minimum. i.e. si  $f_a < \bar{f}_a$ , alors  $t_a = \bar{t}_a$  et si

$f_a = \bar{f}_a$ , alors  $t_a = \bar{t}_a$ .

### 3.2 Routes parallèles

Nous considérons une origine et une destination connectées par deux arcs notés  $a$  et  $b$ : La matrice  $O-D$  est réduite à un seul flux, noté  $f$ . L'arc  $i$  est caractérisé par les paramètres  $\bar{t}_i; \bar{f}_i$ , où  $\bar{t}_i$  est le temps de trajet minimum, et  $\bar{f}_i$  est la capacité de cet arc  $i$ ,  $i = a; b$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\bar{t}_a < \bar{t}_b$ . Chaque usager fait donc face à un choix de route: il utilise soit l'arc  $a$  soit l'arc  $b$ . L'analyse peut être facilement étendue à plusieurs routes en parallèle. Nous commençons par trouver la solution d'équilibre.

Trois situations sont possibles selon le niveau du flux  $f$ . Nous notons par l'exposant  $e$  la valeur à l'équilibre (en particulier,  $t^e$  représente le temps de trajet à l'équilibre).

Si  $f < \bar{f}_a$ , l'ensemble des usagers sélectionne l'arc  $a$ , et le temps de trajet est donné par:  $t^e = \bar{t}_a$ :

Si  $\bar{f}_a < f < \bar{f}_a + \bar{f}_b$ , l'ensemble des usagers ne peut bénéficier de l'arc  $a$  étant le plus court et donc certains usagers sélectionnent l'arc  $b$ : Par conséquent,  $f_a^e = \bar{f}_a$ , i.e. le nombre maximum des usagers sélectionne l'arc  $a$ ; et le reste sélectionne l'arc  $b$ :  $f_b^e = f - \bar{f}_a$

Par hypothèse,  $f_b^e = f - \bar{f}_a < \bar{f}_b$ ; donc le temps de trajet sur l'arc  $b$  est  $\bar{t}_b$ : Puisque les deux arcs sont utilisés, ils ont le même temps de trajet  $t^e$  avec  $t^e = t_a^e = t_b^e = \bar{t}_b$ : le temps de trajet d'équilibre est une fonction continue du flux total  $f$ :

Si  $f = \bar{f}_a + \bar{f}_b$ ,  $f_a^e = \bar{f}_a$  et  $f_b^e = \bar{f}_b$ , nous ne pouvons affecter une valeur spécifique au temps de trajet d'équilibre. Tout temps de trajet  $t^e$  avec  $t^e \geq \bar{t}_a; \bar{t}_b$  est compatible avec l'équilibre de la Dynamique Stable.

Si  $f > \bar{f}_a + \bar{f}_b$ , alors il n'existe pas de solution de la Dynamique Stable puisque les contraintes de capacité sont nécessairement violées.

De façon intéressante, les hypothèses qui caractérisent l'équilibre de la Dynamique Stable permettent une caractérisation plus avancée du chemin congestionné. Supposons, par exemple, que nous sommes dans un régime intermédiaire. Dans ce cas, le temps de trajet d'équilibre est  $\bar{t}_b$  donc il y a une congestion sur l'arc  $a$ : Nous avons l'identité suivante:  $\bar{f}_a = v_a \eta_a$ , où  $v_a$  est la vitesse et  $\eta_a$  est le temps de trajet sur l'arc  $a$ : Par définition:  $\eta_a = n_a / L_a$  où  $L_a$  est la longueur de l'arc  $a$ : Par conséquent:

$$t_a = \frac{n_a}{\bar{f}_a}; \quad (8)$$

Ceci doit être compris comme un modèle de file d'attente. Si nous supposons une file d'attente verticale, le nombre de voitures sur l'arc  $a$  est  $n_a^r = \bar{f}_a t_a$ . Donc, le nombre de voitures dans la file d'attente est:  $n_a^r = \bar{f}_a t_a - \bar{f}_a \bar{t}_a$ . Sur l'arc  $b$ , il n'y a pas de file

d'attente.

Nous étudions, ci-dessous, la solution du modèle Dynamique Stable à l'optimum. Les valeurs à l'optimum sont notées par un exposant 0: Notons qu'à l'équilibre, le temps de trajet sur chaque arc doit être égal au temps de trajet minimum.

Si  $f < \bar{f}_a$ , l'ensemble des usagers est localisé sur l'arc a, le temps de trajet à l'optimum est  $t^0 = \bar{t}_a$  ( $= t^0$ ).

Si  $\bar{f}_a \cdot f < \bar{f}_a + \bar{f}_b$ , le flux  $\bar{f}_a = f_a^0$  est localisé sur l'arc a, et le flux restant  $f - \bar{f}_a = f_b^0$  est localisé sur l'arc b: Le temps de trajet à l'optimum,  $t^0$ , est:  $t^0 = \bar{t}_a \bar{f}_a + \bar{t}_b (f - \bar{f}_a) / f = \bar{t}_b + (\bar{t}_a - \bar{t}_b) \bar{f}_a / f$ : Le bénéfice social, noté  $\Omega$ , en comparaison à l'équilibre est:

$$\Omega = \frac{t^e - t^0}{t^e} = 1 - \frac{\bar{t}_a}{\bar{t}_b} \frac{\bar{f}_a}{f} > 0$$

Si  $f > \bar{f}_a + \bar{f}_b$ , il n'y a pas de solution socialement optimale.

### 3.3 Une relecture du paradoxe de Braess

Commençons par considérer un réseau avec les noeuds O; B<sub>1</sub>; B<sub>2</sub> et D. Le noeud O représente l'origine et le noeud D représente la destination. Soit le réseau suivant: le noeud O et B<sub>1</sub> sont connectés par un arc a<sub>1</sub>: Les noeuds B<sub>1</sub> et D sont connectés par l'arc a<sub>2</sub>: De façon similaire, les noeuds O et B<sub>2</sub> sont connectés par l'arc a<sub>3</sub>; les noeuds B<sub>2</sub> et D par l'arc a<sub>4</sub>: De plus, soit f le flux de demande allant de l'origine O à la destination D. En vue de simplifier la discussion qui suit, nous supposons qu'il n'y a pas de congestion sur les arcs a<sub>2</sub> et a<sub>3</sub>:

$$\bar{f}_2 \gg f, \text{ et } \bar{f}_3 \gg f:$$

Par conséquent, il y a deux routes de l'origine O à la destination D. Le chemin 1 est défini par fO ! B<sub>1</sub> ! Dg et il a un temps de trajet minimum et une capacité donnés par:

$$\bar{t}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 \text{ et } \bar{f}_{12} = \bar{f}_1$$

La route 2 est définie par fO ! B<sub>2</sub> ! Dg et elle a un temps de trajet minimum et une capacité donnés par:

$$\bar{t}_{34} = \bar{t}_3 + \bar{t}_4, \text{ et } \bar{f}_{34} = \bar{f}_4.$$

Nous supposons que  $\bar{t}_{12} > \bar{t}_{34}$ :

Un équilibre en Dynamique Stable existe si  $f < \bar{f}_1 + \bar{f}_4$ , condition que nous supposons satisfaite dans cette analyse. Deux cas sont possibles.

Si  $f < \bar{f}_4$ ; il n'y a pas de congestion sur le réseau et l'ensemble des automobilistes sélectionne le chemin le plus court (à savoir la route 2). Le temps de trajet d'équilibre est donc  $t_1^e = \bar{t}_{34}$ :

Si  $f \geq (\bar{f}_4; \bar{f}_1 + \bar{f}_4)$ , alors une congestion apparaît sur la route 2 et l'arc  $a_4$  est congestionné. Le temps de trajet d'équilibre est:  $t_1^e = \bar{t}_{12}$ :

Dans la suite de cette section, nous étudions l'impact d'un arc supplémentaire  $a_5$ : Cet arc relie le noeud  $B_1$  au noeud  $B_2$  avec une capacité  $\bar{f}_5 \gg f$ : Il existe maintenant un troisième chemin  $fO \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow Dg$  reliant l'origine  $O$  à la destination  $D$ : Nous supposons que :

$$\frac{1}{2} \quad \bar{t}_1 < \bar{t}_3; \bar{t}_2 > \bar{t}_4 \quad a \quad (9)$$

$$\bar{t}_5 < \min \{ \bar{t}_3; \bar{t}_1; \bar{t}_2; \bar{t}_4 \}$$

Nous restreignons l'analyse au cas où  $f \geq [\max(\bar{f}_1; \bar{f}_4); \bar{f}_1 + \bar{f}_4]$ . Dans ce cas, les trois chemins sont utilisés. La condition (9) implique que l'arc  $a_1$  est congestionné avec  $t_1^e = \bar{t}_3; \bar{t}_5$  (puisque les deux chemins  $fO \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow Dg$  et  $fO \rightarrow B_2 \rightarrow Dg$  sont utilisés). De façon similaire, l'arc  $a_4$  est congestionné avec  $t_4^e = \bar{t}_2; \bar{t}_5$ : Le temps de trajet d'équilibre est le même sur les trois chemins :

$$t_{11}^e = \bar{t}_3 + \bar{t}_2; \bar{t}_5: \quad (10)$$

Puisque les arcs  $a_1$  et  $a_4$  sont congestionnés, le flux d'équilibre satisfait  $f_1^e = \bar{f}_1$  et  $f_4^e = \bar{f}_4$ .

Sans l'arc  $a_5$ ; le temps de trajet d'équilibre est  $t_1^e = \bar{t}_{34}$  et avec l'arc supplémentaire, le temps de trajet d'équilibre est  $t_{11}^e = \bar{t}_3 + \bar{t}_2; \bar{t}_5$ : En utilisant la condition (9), il ressort que  $t_1^e < t_{11}^e$ : Donc, l'arc additionnel augmente le temps de trajet d'équilibre.

Cette différence devient plus importante lorsque la vitesse sur l'arc  $a_5$  devient très grande et où les deux noeuds  $B_1$  et  $B_2$  coïncident.

Lorsque  $\bar{t}_5 = 0$ , le temps de trajet d'équilibre est  $t_{11}^e = \max \{ \bar{t}_1; \bar{t}_3 \} + \max \{ \bar{t}_2; \bar{t}_4 \}$  ( $t_{11}^e = \bar{t}_3 + \bar{t}_2$ ; si la condition (9) est maintenue). Le temps de trajet d'équilibre tend à croître lorsque le réseau est plus connexe. Ceci est dû aux conditions d'ajustement de l'équilibre du temps de trajet au temps de trajet le plus grand qui est utilisé comme référence. Un tel effet apparaît également dans le fonctionnement du paradoxe de Braess

bien qu'il soit masqué par les calculs algébriques. Dans notre cas, nous sommes capables de montrer l'existence de ce paradoxe en n'utilisant que des arguments de logique.

Dans la section suivante, nous étendons la formulation de la Dynamique Stable à l'ensemble d'un réseau.

## 4 Dynamique Stable : dérivation pour un réseau

### 4.1 Structure du flux d'équilibre

Considérons maintenant un réseau de transport plus général. Nous supposons que le temps de trajet du chemin sur les arcs est donné par  $t = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}_{\mathcal{A}}$ . Alors, pour chaque paire O-D  $\mathcal{U}_k$ , nous pouvons calculer la fonction du temps de trajet le plus court  $T_k(\mathbf{t})$ , avec :

$$T_k(\mathbf{t}) = \min_{\mathbf{h}} \sum_{r=1}^{r_k} h_{k,r} t_r.$$

Par conséquent,  $T_k(\mathbf{t})$  est une fonction linéaire par morceau convexe en  $\mathbf{t}$  et définie par  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ .

Rappelons que pour toute fonction  $f(\mathbf{x})$ , qui est concave sur  $\mathbb{R}^m$ ; une super-dérivée (superdifferential)  $\partial f(\mathbf{x})$  peut être définie à chaque point. Celle-ci est un ensemble convexe fermé tel que pour toute  $\mathbf{g} \in \partial f(\mathbf{x})$ , l'inégalité suivante est maintenue :

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) + \mathbf{h} \cdot \mathbf{g}; \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Maintenant, nous étudions la super-dérivée de  $T_k(\mathbf{t})$ . Soit  $I_k(\mathbf{t})$  tel que :

$$I_k(\mathbf{t}) = \left\{ \mathbf{r} \in [1:r_k] : \sum_{r=1}^{r_k} h_{k,r} t_r = T_k(\mathbf{t}) \right\}.$$

Autrement dit,  $I_k(\mathbf{t})$  est un ensemble de chemins les plus courts suivant  $\mathbf{t}$ , qui relie l'origine  $\mathcal{U}_k$  à la destination  $\mathcal{Z}_k$ . Alors :

$$\partial T_k(\mathbf{t}) = \text{Conv} \left\{ \mathbf{a}_{k,r}; \quad \mathbf{r} \in I_k(\mathbf{t}) \right\}.$$

Cet ensemble nous permet de caractériser, sous une forme très compacte, les flux d'équilibre induits par la paire O-D  $\mathcal{U}_k$  dans le réseau  $\mathcal{R}$ .

**Lemme 1** Le vecteur des flux  $\mathbf{f}_k$  est compatible avec l'hypothèse 1 si et seulement si il existe un  $\mathbf{g} \in \partial T_k(\mathbf{t})$  tel que :

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{d}_k \mathbf{g}.$$

Dans la suite, nous appelons un tel vecteur  $f_k$  le flux d'équilibre pour la paire O-D  $\frac{1}{2}k$ .

Notons que le flux cumulé  $f$  de l'arc est la somme sur l'ensemble des flux de la matrice OD :

$$f = \sum_{k \in OD} f_k$$

Nous appelons le flux d'équilibre s'il peut être représenté comme une somme des flux de l'équilibre pour l'ensemble des paires O-D. Notons que les flux d'équilibre sont définis en tenant compte du temps de trajet du chemin  $t$  :

Considérons maintenant la fonction de coût suivante :

$$C(t) = \sum_{k \in OD} d_k T_k(t)$$

**Théorème 5** Le vecteur des flux de l'arc  $f \in \mathbb{R}^m$  est un flux d'équilibre tenant compte du temps de trajet du chemin  $t$  si et seulement si

$$f \in \arg C(t) \quad (11)$$

Ce théorème nous permet de répondre à certaines questions importantes. Nous considérons que la demande de flux  $d_k \in \mathbb{R}_{k \in OD}$  est connue.

1. Etant donné le vecteur du temps de trajet  $t$ ; nous pouvons décrire tous les flux d'équilibre possibles, qui peuvent augmenter dans le réseau. C'est à dire

$$\begin{aligned} f_k &\in \sum_{k \in OD} d_k T_k(t); \quad k \in OD; \\ f &= \sum_{k \in OD} f_k \end{aligned}$$

2. Etant donné le vecteur des flux  $f$ , nous pouvons vérifier si le vecteur du temps de trajet  $t$  est un équilibre ou non.

**Lemme 2** Le flux de l'arc  $f$  est un flux d'équilibre sur le réseau  $R$  si et seulement si le problème d'optimisation suivant

$$\max_t [C(t) \mid hf; ti] \quad (12)$$

admet une solution non - négative  $t^e$ .



Ce dernier lemme montre que les informations recueillies à partir des données de comptage peuvent aider à construire le temps de trajet d'équilibre dans le réseau. Si les flux sur les arcs sont connus, ces données sont suffisantes pour déterminer le temps de trajet d'équilibre (voir Section 5.4).

Notons que les résultats présentés dans cette section sont basés **uniquement** sur les hypothèses 1; 2 et 3: En particulier, la description des performances des arcs est uniquement basée sur des paramètres qui sont directement mesurables. Nous n'utiliserons aucune hypothèse relative aux performances des arcs lorsque les arcs sont congestionnés.

## 4.2 Modèle du flux maximal

Nous montrons, dans cette sous-section, comment nous pouvons trouver les solutions d'équilibre discutées dans la section (3). Nous utilisons le modèle de performance du flux maximal suivant :

$$t_{\alpha} \leq \bar{t}_{\alpha}; 0 \leq f_{\alpha} \leq \bar{f}_{\alpha}; \alpha \in A: \quad (13)$$

**Théorème 6** Le temps de trajet de l'arc  $t^{\alpha}$  et le vecteur de flux de l'arc  $f^{\alpha}$  est une solution d'équilibre du modèle (13) si et seulement si il existe une solution au problème

$$\max_t C(t) \quad \text{s.t.} \quad t_{\alpha} \leq \bar{t}_{\alpha}; \quad (14)$$

et  $f^{\alpha} = \bar{f}_{\alpha} s^{\alpha}$ , où  $s^{\alpha}$  est le vecteur des multiplicateurs duaux optimaux pour les contraintes d'inégalité (14).

## 4.3 Modèle dual du flux maximal

Notons que (14) est un problème d'optimisation convexe. Par conséquent, comme discuté ci-dessus il peut être formulé sous la forme d'un problème dual équivalent. En vue d'exécuter cette tâche, il est plus convenable d'introduire pour chaque origine  $k \in O$  le vecteur du flux de demande  $d_k \in \mathbb{R}^n$ ; où  $n = \sum_{j \in N} j$ : Chaque composante de ce vecteur est un flux de demande de l'origine  $k$ : Notons par  $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice d'incidence du réseau  $R$ :

$$E_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } \alpha \text{ entre dans le noeud } i_k \\ -1 & \text{si l'arc } \alpha \text{ part du noeud } i_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad i_k = 1; \dots; n; \quad \alpha = 1; \dots; m:$$

Le problème dual de (14) peut être écrit sous forme de vecteurs de flux  $f_i \in \mathbb{R}^m$ , créés par les origines  $k \in O$ .

**Lemme 3** Le problème

$$\min_{f; f^{\alpha}} \sum_i \bar{f}_i t_i$$

$$\begin{aligned}
 \text{s:t: } f &= \sum_{k \in \mathcal{O}} f_{l_k} \cdot \bar{f}; \\
 E f_{l_k} &= d_{l_k}; \quad l_k \in \mathcal{O}; \\
 f_{l_k} &\geq 0; \quad l_k \in \mathcal{O};
 \end{aligned} \tag{15}$$

est un problème dual de (14).

Ainsi le problème dual de (14) est le coût minimum du problème de transport multi-produits, avec des capacités d'arc bornées. A notre connaissance, ce modèle n'a jamais été considéré pour trouver une solution d'équilibre dans un système de transport. Traditionnellement, les problèmes de ce type sont utilisés pour trouver un système optimal. Notons, par ailleurs, que dans notre cas, la solution de ce problème nous donne uniquement les flux de déplacement dans le réseau congestionné. Intuitivement, il semble plus raisonnable que, lorsque la congestion apparaît, l'automobiliste augmente l'ensemble de choix des itinéraires de façon monotone, en commençant par le trajet à vide le plus court. Dans ce problème, les temps de trajet des arcs à l'équilibre augmentent comme les multiplicateurs duaux optimaux des inégalités  $f_{l_k} \leq \bar{f}$ .

Il est intéressant de voir que le problème (15) nous fournit également la solution de l'optimum social. En effet, si  $f^e$  est une solution de ce problème, alors  $\sum_{l_k} \bar{f}_{l_k}$  est le coût social optimal. Ainsi, la solution d'équilibre diffère de la solution de l'optimum social uniquement par la file d'attente créée par les automobilistes le long des itinéraires les plus attractifs (voir la discussion sur les deux routes en parallèle, pour illustration). Ces files d'attente sont clairement inefficaces du point de vue social car elles sont nulles à l'optimum. Pourtant elles augmentent le temps de trajet le long des meilleures routes à l'équilibre. Comme nous l'avons vu, le flux de déplacement à l'équilibre des usagers et à l'optimum social sont les mêmes.

#### 4.4 Modèle du flux maximal mixte

A la fin de la section (4.1), il est mentionné que la connaissance complète des flux sur les arcs d'un réseau nous permet de trouver les temps de trajet d'équilibre et les flux d'équilibre sans aucune information additionnelle sur la performance des arcs lorsqu'ils sont congestionnés. Par contre, dans la réalité, les données de comptage ne sont disponibles que sur un très petit nombre d'arcs. Dans ce cas, nous pouvons combiner ces informations avec le modèle du flux maximal.

Considérons maintenant le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
 f_{l_k} &= \bar{f}_{l_k}; \quad l_k \in \mathcal{O} \\
 0 \leq f_{l_k} \leq \bar{f}_{l_k}; \quad t_{l_k} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C};
 \end{aligned} \tag{16}$$

Dans le modèle ci-dessus, l'ensemble  $C$  correspond à un sous-ensemble d'arcs, pour lequel des données de comptage existent.

**Théorème 7** Le temps de trajet de l'arc  $t^e$  et le flux de l'arc  $f^e$  est une solution d'équilibre du modèle (16) si et seulement si  $t^e$  est une solution non négative au problème

$$\max_t \sum_{t \in C} C(t) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{t \in C} f_t \cdot t = \sum_{t \in C} \bar{f}_t \cdot t; \quad t \geq 0; \quad \bar{f}_t \geq 0; \quad \sum_{t \in C} \bar{f}_t \cdot t \leq \sum_{t \in C} C(t) \quad (17)$$

et  $\bar{f}_t = \sum_{t \in C} s_t^e$ , où  $s_t^e$  sont les multiplicateurs duaux optimaux pour les contraintes d'inégalité dans (17).

Notons que le problème (17) peut ne pas avoir de solution. Dans ce cas, les données de comptage contredisent nos choix de flux de demande. Ceci peut être dû au fait que la période d'affectation est mal choisie.

Dans la section suivante, nous introduisons deux extensions. D'autres extensions (stationnement incitatif, segmentation d'utilisateurs, choix de route, etc.) sont omises afin de simplifier les explications.

## 5 Variantes du modèle Dynamique Stable

### 5.1 Matrice O-D endogène

En pratique, la matrice O-D n'est jamais connue avec certitude. Une des possibilités est d'ajuster la matrice aux données de comptage du trafic. Une part importante du processus de calage est destinée à l'estimation de la matrice O-D en se basant sur les données de comptage du trafic. Ici nous présentons une nouvelle approche pour estimer la matrice O-D qui nécessite un minimum d'information.

Nous supposons que nous connaissons le trafic moyen créé par chaque origine et le trafic moyen absorbé par chaque destination. En utilisant ces informations, nous pouvons estimer la matrice O-D. Nous supposons également que le flux d'automobilistes pour une paire origine - destination est une fonction décroissante du temps de trajet d'équilibre de cette paire. Alternativement, nous supposons que le nombre d'utilisateurs entre une origine et une destination est une fonction décroissante du nombre de ménages à l'origine et une fonction croissante du nombre de postes de travail à la destination (modèle de déplacement pour le travail). Dans ce cas, le nombre d'automobilistes absorbé n'est pas requis.

Le modèle le plus populaire de ce type est le modèle gravitaire, qui stipule que :

$$d_k = \frac{F(i_k)G(\pm_k)}{\tau_{i_k \pm_k} + T_k(t)} \mu$$

où  $\mu$ ;  $F(i_k)$ ,  $G(\pm_k)$  et  $\tau_{i_k \pm_k}$  sont des paramètres  $T_k(t)$  est le temps de trajet entre les noeuds  $i_k$  et  $\pm_k$ . Dans le cas du modèle cité précédemment,  $F(i_k)$  est proportionnelle à la taille de la population en  $i_k$ , alors que  $G(\pm_k)$  est proportionnelle au nombre de postes de travail en  $\pm_k$ . Le paramètre  $\tau_{i_k \pm_k}$  peut être ajusté en vue de satisfaire les conditions de conservation du nombre d'individus. Puisque dans le modèle existant, la matrice O-D doit être calculée avant le calcul du temps de trajet d'équilibre, le candidat naturel de  $T_k(t)$  est le temps de trajet minimum à vide. Evidemment, dans un réseau congestionné, le temps de trajet minimum à vide est différent du temps de trajet minimum à l'équilibre de façon significative. Dans cette section, nous montrons que l'on peut calculer simultanément la matrice O-D et le temps de trajet d'équilibre. Intuitivement, cette méthode est plus raisonnable que les méthodes actuelles dans lesquelles l'estimation de la matrice des déplacements et le temps de trajet d'équilibre sont difficiles à faire coïncider.

Soit  $O, j O j= n_o$ , l'ensemble des origines et  $D, j D j= n_d$ , l'ensemble des destinations. Notons la matrice O-D par :

$$D \in \mathbb{R}^{n_o \times n_d}$$

L'ensemble faisable pour la matrice  $D$  est le suivant :

$$D \in \mathbb{D} = \{ D \geq 0 : D e_{n_d} = a; D^T e_{n_o} = b \}$$

où  $e_k$  est le vecteur des 1 de  $\mathbb{R}^k$ ,  $a$  est le vecteur de demande standard pour les destinations et  $b$  est le vecteur des flux sortant de l'origine.

Introduisons une famille de fonctions d'attraction :

$$\hat{A}_{(i, \pm)}(d); d > 0; i = 1; \dots; n_o; \pm = 1; \dots; n_d$$

qui sont des fonctions convexes et décroissantes en  $d$ : Nous supposons que  $\hat{A}_{(i, \pm)}^0(d) \rightarrow 1$  lorsque  $d \rightarrow 0$ , où  $\hat{A}^0$  est la dérivée de la fonction  $\hat{A}$ .

Dans la section relative au modèle des flux maximums (voir section 5.2), nous pouvons considérer le problème max-min suivant :

$$\max_{t, \bar{t}} \min_{D \in \mathbb{D}} \left( \sum_{i=1}^{n_o} \sum_{\pm=1}^{n_d} D_{(i, \pm)}^{(t, \bar{t})} T_{(i, \pm)}(t) + \hat{A}_{(i, \pm)}^0(D_{(i, \pm)}^{(t, \bar{t})}) \sum_{i=1}^{n_o} h_i \bar{t}_i \right); \quad (18)$$

où  $T_{(l; \mathcal{A})}(t)$  est la distance la plus courte entre l'origine  $l$  et la destination  $\pm$ : Notons que (18) est un point de selle d'un problème convexe - concave. Par conséquent, l'existence de la solution  $(t^e; D^e)$  se dérive des résultats standards de l'optimisation convexe.

En utilisant les conditions d'optimum de premier ordre pour (18), nous concluons qu'il existe des multiplicateurs duaux  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_o}$  et  $\mu \in \mathbb{R}^{n_d}$  tel que :

$$T_{(l; \mathcal{A})}(t^e) + \hat{A}_{(l; \mathcal{A})}^0(D^{(l; \mathcal{A})}) = \sum_{s \in \mathcal{A}} \lambda_s; \quad \mu_{\pm} = 1; \dots; \mu_o; \pm = 1; \dots; \mu_d;$$

En résolvant, cette équation pour  $D^{(l; \mathcal{A})}$ , nous pouvons trouver la dépendance en  $T_k(t^e)$ .

Par exemple, pour  $\hat{A}_{(l; \mathcal{A})}(d) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \frac{\rho_i}{d}$ , nous obtenons

$$D^{(l; \mathcal{A})} = \frac{1}{T_{(l; \mathcal{A})}(t^e) + \sum_{i \in \mathcal{A}} \frac{\rho_i}{d}};$$

D'autres spécifications pour la fonction  $\hat{A}(\cdot)$  sont

$$\hat{A}(d) = d \ln d; \quad \hat{A}(d) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \ln(d); \text{ etc.}$$

La première spécification conduit au modèle Logit de demande bien connu. Notons que les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont automatiquement ajustés à la solution du problème (18) de manière à ce que le nombre d'automobilistes quittant un noeud d'origine et le nombre d'automobilistes arrivant à un noeud de destination soient égaux aux paramètres exogènes donnés  $a$  et  $b$ :

## 5.2 Modèles de choix modal

Dans les sections précédentes, nous avons présenté deux types de modèles relatifs à l'équilibre des flux dans un réseau de transport congestionné. Nous avons vu que le premier modèle, le modèle de Beckmann, convient mieux au réseau de transport public. Le second, Dynamique Stable, est approprié pour le transport privé. Dans cette section, nous montrons qu'il est possible d'utiliser les deux modèles afin de calculer les flux d'équilibre dans le cas où les usagers sont amenés à choisir entre deux modes, public et privé.

Nous commençons par décrire les composantes principales du modèle. Pour le modèle de transport privé, nous conservons l'ensemble des objets et notations introduit dans la section 4.1. Pour les transports publics, nous devons changer certaines notations. Notons par  $\mathcal{R}$ , le réseau de transport public défini par l'ensemble des noeuds et l'ensemble des arcs :

$$\mathcal{P} = \{N_p; A_p\};$$

Pour chaque arc  $a \in A_p$ , nous notons  $g^{(a)}$  le coût généralisé de cet arc, exprimé en unité de temps. Notons :

$$g = (g^{(1)}; \dots; g^{(m_p)})^T \in \mathbb{R}^{m_p}; \quad m_p = |A_p|$$

Pour chaque arc  $a \in A_p$ , nous introduisons la fonction  $\mathcal{A}_a^{(a)}(\zeta)$ ; qui est la fonction conjuguée de la fonction de pénalité cumulée sur cet arc (voir section 2.2). Dans la section 2.2, nous avons vu que le domaine de la fonction  $\mathcal{A}_a^{(a)}(\zeta)$  est toujours  $[\bar{g}^{(a)}; +1)$ ; où  $\bar{g}^{(a)}$  est le temps de trajet actuel sur cet arc. Notons :

$$\bar{g} = (\bar{g}^{(1)}; \dots; \bar{g}^{(m_p)})^T$$

Nous introduisons également l'ensemble des arcs  $C$ , qui relie l'ensemble des origines et des destinations avec les noeuds du réseau de transport public  $P$ . Notons par :

$$P_k(g); \quad k \in OD;$$

la distance la plus courte pour la paire O-D du réseau

$$fN_p [ OD; A_p [ Cg;$$

en tenant compte de certains coûts généralisés des arcs du chemin  $g$ : Notons par :

$$\mathcal{A}_a(g) = \sum_{a \in A_p} \mathcal{A}_a^{(a)}(g^{(a)});$$

Maintenant, nous pouvons écrire le modèle de choix modal.

$$\max_{t; g} \sum_{k \in OD} d_k \min_{t; g} \{ \tau_k(t); P_k(g)g \}; \quad \text{s.t. } t \leq \bar{t}; g \leq \bar{g}; \quad (19)$$

Clairement, ce modèle est un problème d'optimisation convexe. Présentons maintenant, certaines interprétations de ces résultats ( $t_a; g_a$ ):

Notons  $\tilde{A}_k(t; g) = \min_{t; g} \{ \tau_k(t); P_k(g)g \}$ : La condition d'optimum de Kuhn-Tucker pour ce problème de choix modal conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in OD} d_k r_t \tilde{A}_k(t_a; g_a) &= \bar{f}_j s_a; \quad s_a \geq 0; \\ (t_a - \bar{t}) \uparrow s_a &= 0; \\ \sum_{k \in OD} d_k r_g \tilde{A}_k(t_a; g_a) &= r \mathcal{A}_a(g_a); \quad u_a \geq 0; \\ (g_a - \bar{g}) \uparrow u_a &= 0; \end{aligned} \quad (20)$$

où  $r_t \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha)$  et  $r_g \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha)$  sont des composants du super-gradient

$$r \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha) = (r_t \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha); r_g \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha)) \in r \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha);$$

et  $x \otimes y$  représente le vecteur formé par les produits composés des entrées correspondantes des vecteurs  $x$  et  $y$ . Notons que le super-gradient de la fonction  $\tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha)$  a les structures suivantes :

$$r \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha) = (\alpha_k r T_k(t_\alpha); (1 - \alpha_k) r P_k(g_\alpha)); \quad \alpha_k \in [0; 1];$$

Les vecteurs  $r T_k(t_\alpha)$  et  $r P_k(g_\alpha)$  ont des interprétations relatives aux flux du chemin le plus court à l'équilibre de la matrice O-D  $k$  dans le réseau correspondant. Toutefois, si  $P_k(g_\alpha) > T_k(t_\alpha)$ , alors  $\alpha_k = 1$ ; et si  $P_k(g_\alpha) < T_k(t_\alpha)$ ; alors  $\alpha_k = 0$ : Ceci signifie que dans le cas où le coût des transports publics pour la paire O-D  $k$  est strictement plus grand que le coût dans les transports privés, l'ensemble des flux de la demande de ces paires utilisera le réseau de transport privé et vice versa. Le partage du réseau se produit uniquement lorsque  $P_k(g_\alpha) = T_k(t_\alpha)$ : Alors il se peut que  $\alpha_k \in [0; 1]$  et le flux  $\alpha_k d_k$  utilisera le réseau de transport privé et le flux  $(1 - \alpha_k) d_k$  utilisera le réseau de transport public.

Le fait que cette solution du problème de choix modal satisfasse les conditions d'équilibre se justifie par une argumentation similaire au raisonnement standard présenté dans [22] et [24]. Nous commentons uniquement les conséquences des deux dernières équations dans le système (20). Si  $g_\alpha^{(\otimes)} > \bar{g}^{(\otimes)}$ ; alors  $u_\alpha^{(\otimes)} = 0$ : Ceci signifie que le flux total  $f^{(\otimes)}$  des passagers sur cet arc satisfait l'équation :

$$f^{(\otimes)} = \sum_{k \in OD} d_k r_g^{(\otimes)} \tilde{A}_k(t_\alpha; g_\alpha) = (\mathcal{A}_\alpha^{(\otimes)}(g_\alpha^{(\otimes)}))^0;$$

En vue des propriétés des fonctions conjuguées, on a :

$$g_\alpha^{(\otimes)} = (\mathcal{A}_\alpha^{(\otimes)}(f^{(\otimes)}))^0 = \bar{g}^{(\otimes)} + \mathcal{B}^{(\otimes)}(f^{(\otimes)});$$

où  $\mathcal{B}^{(\otimes)}(t)$  est la fonction de pénalité correspondante à cet arc. Si  $u_\alpha^{(\otimes)} > 0$ ; alors  $g_\alpha^{(\otimes)} = \bar{g}^{(\otimes)}$ :

$$f^{(\otimes)} < (\mathcal{A}_\alpha^{(\otimes)}(\bar{g}^{(\otimes)}))^0;$$

Ceci implique que  $\bar{g}^{(\otimes)} \leq (\mathcal{A}_\alpha^{(\otimes)}(f^{(\otimes)}))^0 = \bar{g}^{(\otimes)} + \mathcal{B}^{(\otimes)}(f^{(\otimes)})$ : Par conséquent,  $\mathcal{B}^{(\otimes)}(f^{(\otimes)}) = 0$ :

Notons que la complexité de calcul de ce problème (19) est du même ordre que celle du modèle de Beckmann et du modèle Dynamique Stable. De plus, les algorithmes modernes d'optimisation convexe peuvent également calculer l'ensemble des informations duales utilisées dans les discussions précédentes.

## 6 Remarques et conclusions

Dans les modèles de type Beckmann, il est possible de considérer des situations dans lesquelles les fonctions de temps de trajet sont non bornées. En effet, dans les modèles proposés, les flux d'équilibre sur chaque arc n'excèdent jamais la capacité de cet arc. Lorsque le flux est stabilisé au niveau de la capacité, une file d'attente se développe. Le niveau de la file d'attente ajusté ne dépend pas de la capacité de l'arc lui-même mais de l'existence et des valeurs du temps de trajet sur les chemins alternatifs. S'il n'existe pas d'autres chemins alternatifs, le niveau de la file d'attente devient infini et dans ce cas, il n'existe pas de régime stationnaire. Par conséquent, un modèle dynamique du trafic est nécessaire. Dans le cas contraire où il existe des chemins alternatifs, la solution d'équilibre est interprétée comme un régime stationnaire du processus dynamique.

Il semble que ce type d'approche statique, introduit dans cet exposé, soit nouveau et contredit la pratique traditionnelle dans l'analyse des transports. A notre connaissance, le problème principal qui attire l'attention des chercheurs est la description de la congestion induite par les automobilistes durant le pic du matin ou du soir. Pour expliquer ce phénomène, il faudrait faire appel soit à un modèle statique de type Beckmann (toutefois, voir la critique de ce modèle dans la section 2), soit à un modèle dynamique (comme METROPOLIS, voir [10], DYNASMART, voir [19] ou dynaMIT, voir [5]). Le modèle Dynamique Stable propose une troisième alternative. Clairement, la congestion pendant les pics horaires peut être difficilement vue comme un régime stationnaire. Par conséquent, l'approche Dynamique Stable peut fournir uniquement une description agrégée de ce phénomène. Toutefois, il est clair que son application naturelle est la description de la congestion pendant toute la journée. En effet, à partir de nos observations, nous savons que dans les grandes villes, la congestion persiste tout au long de la journée et elle reste quasiment stable. Notons que l'effet social de la congestion durant la journée est plus vaste que la congestion qui se réalise au cours des pics horaires. Par exemple, les données de comptage de trafic montrent que le nombre d'automobilistes qui traverse les boulevards périphériques dans les grandes villes au cours des pics horaires est assez faible (par exemple, 60 milles automobilistes dans les deux directions sur le Boulevard Périphérique de Paris). De plus, le coût social des déplacements est assez faible et le nombre de déplacements tend à décroître d'année en année. Par contre, au cours de la journée, les déplacements pour des motifs autres que le travail sont assez importants avec des coûts généralisés importants (coût du temps de trajet généralisé, essence, coût de stationnement, etc.). Par conséquent, toute amélioration du réseau de transport pour le trafic journalier se traduit par un bénéfice social important. Et il semble que le modèle Dynamique Stable réponde très bien à de telles situations de modélisation.

Un avantage majeur des modèles statiques par rapport aux modèles dynamiques est qu'ils requièrent peu de données (à l'exception de METROPOLIS [10], qui utilise uniquement les données des modèles statiques). La plupart des modèles dynamiques



(micro-simulateurs, outils de planification) sont assez difficilement manipulables avec uniquement des données fournies par exemple par les SIG. La collecte de données simples (réseau, nombre de liens, emploi) est souvent effectuée dans les zones urbaines. Ces données sont exactement les mêmes que celles requises par le modèle Dynamique Stable et par conséquent, nous croyons que ces modèles peuvent jouer un rôle important dans un futur proche. Nous espérons que cette approche sera utilisée une fois que la relation entre les systèmes d'information géoréférencés (SIG) et notre outil numérique sera mise en place. En conséquence, les données fournies par les systèmes SIG peuvent être enrichies par des informations relatives aux temps de trajet simulés par les algorithmes du modèle Dynamique Stable.

Un autre avantage de notre approche est qu'elle est basée sur peu de lois logiques, qui ont une interprétation très simple. Nous croyons qu'il existe une niche entre les modèles d'affectation statiques sophistiqués, tels que ceux utilisés par les ingénieurs et les planificateurs de transport, et les modèles simples comme ceux utilisés par les économistes. Notons en passant que ce jeu existe également dans les télécommunications. La littérature en Recherche Opérationnelle a, jusqu'à présent, peu d'influence sur la littérature en Économie, qui pourtant fournit des recommandations dans la régulation par la tarification (voir, p.e.; [15]). Puisque notre approche est compatible avec l'économie néo-classique et qu'elle nécessite peu de données, elle constitue un pont dans ce jeu.

Notre présentation est principalement motivée par la simplicité et la cohérence. Plusieurs extensions peuvent être intégrées dans l'approche proposée. Nous avons présenté uniquement le modèle de base. Dans d'autres contributions, nous avons étudié un modèle Logit stochastique de choix de route (Logit).

## References

- [1] Arnott, R., K. Arrow, A. Atkinson et J. Drèze, eds. (1994) *Public Economics*, William Vickrey. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] Anderson, S., A. de Palma et J.-F. Thisse (1992). *A Discrete Choice Theory of Product Differentiation*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [3] Beckmann, M., B. McGuire, et C. Winsten (1956). *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, Conn.
- [4] Ben-Akiva, M. et S. Lerman (1985). *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Predict Travel Demand*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [5] Ben-Akiva M., M. Bierlaire, H. Koutsopoulos et R. Mishalani (1998). *DynaMIT: a simulation-based system for traffic prediction and guidance generation*. Paper presented at TRISTAN III, San Juan, Porto Rico.
- [6] Chen, A., D.-H. Lee, et Y. Nie (2000) *Path and Link Based Traffic Assignment Algorithms: A Comprehensive Computational Study*. Paper presented at the 6<sup>th</sup> ASCE International Conference on Application of Advanced Technologies in Transportation Engineering, Singapore.
- [7] Dafermos, S. (1972) *The Traffic Assignment Problem for Multi-User Transportation Network*. *Transportation Science*, 6, 73-87.
- [8] Dafermos, S. (1980) *Traffic Equilibrium and Variational Inequalities*. *Transportation Science*, 14, 42-54.
- [9] Daganzo, C. et Y. Sheffi (1977). *On Stochastic Models of Traffic*. *Transportation Science*, 11, 253-274.
- [10] de Palma, A. et F. Marchal (2001). *Dynamic Traffic Analysis with Static Data: some Guidelines with an Application to Paris*. Paper presented at the 80<sup>th</sup> Annual Meeting TRB Meeting of the Transportation Record Board, Washington, D.C.
- [11] Der-Hong, Lee et Yu N. (2001) *Accelerating Strategies and Computational Studies of the Frank-Wolfe Algorithm for the Traffic Assignment Problem*. Paper presented at the 80<sup>th</sup> Annual Meeting TRB Meeting of the Transportation Record Board, Washington, D.C.
- [12] Florian, M. (1977) *A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes*. *Transportation Science*, 11, 166-179.

- 
- [13] Frank, M., et P. Wolfe. (1956) An Algorithm for Quadratic Programming. *Naval Research Logistics. Quarterly* 3, 95-110.
- [14] Haurie, A. et P. Marcotte (1985) On the Relationship between Nash Cournot and Wardrop Equilibria. *Networks*, 15, 295-308.
- [15] Laffont, J.-J. et J. Tirole (2000). *Competition in Telecommunications*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [16] LeBlanc, L. , R. Helgason, et D. Boyce (1985). Improved Efficiency of the Frank-Wolfe Algorithm for Convex Network Problems. *Transportation Science*, 19, 445-462.
- [17] Lévy-Lambert, H. (1968). Tarification des services à qualité variable : Application aux péages de circulation, *Econometrica*, 36, 564-575.
- [18] Knuth, D.E. (1979). *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley.
- [19] Mahmassani, H. (1998). Development of DYNASMART-X Software for Real-Time Dynamic Traffic Assignment, Technical Report ST067-85-TASK E, Center for Transportation, The University of Texas at Austin.
- [20] Nagurney, A. (1993). *Network Economics: A Variational Inequality Approach*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [21] Nemirovsky, A. et D. Yudin (1983). *Informational Complexity and Efficient Methods for Solution of Convex Extremal Problems*. Wiley, New York.
- [22] Nesterov, Yu. (2000) Stable Traffic Equilibria: Properties and Applications. *Optimization and Engineering*, 3, 29-50.
- [23] Nagurney, A. (1993). *Network Economics: a Variational Inequality Approach*. Kluwer Academic Publisher, Norwell, Assachusetts.
- [24] Nesterov, Yu. et A. de Palma (2000). Stable Dynamics in Transportation Systems. CORE DP 2000/27, Catholic University of Louvain, Belgium. To be published in *Mathematics of Operations Research*.
- [25] Sheffi, Y. (1985) *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [26] Smith, M.J. (1979). Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria. *Transportation Research B*, 295-304.
- [27] Wardrop, J. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II*, 1, 325-378.

## Annexe A : Inégalités variationnelles

Dans cette annexe, nous présentons un résumé des résultats relatifs aux inégalités variationnelles. Pour une présentation complète, nous fournissons uniquement des démonstrations simples.

Soit  $E$  un vecteur réel de dimension finie et  $E^*$  son vecteur dual (l'espace des fonctions linéaires sur  $E$ ): Pour  $x \in E$  et  $s \in E^*$ , nous notons  $hs; xi$  la valeur de la fonction linéaire  $s$  en  $x$ : Si nous considérons que  $E$  et  $E^*$  ont la même base, alors  $x$  et  $s$  peuvent être représentées sous forme de coordonnées :

$$x = (x^{(1)}; \dots; x^{(n)})^T; \quad s = (s^{(1)}; \dots; s^{(n)})^T; \quad n = \dim E:$$

On a donc  $hs; xi = \sum_{i=1}^n s^{(i)} x^{(i)}$ :

Considérons un vecteur de fonction (un opérateur)  $c(x)$  avec un domaine convexe ouvert  $D$ :

$$c : D \rightarrow E^*:$$

Soit  $Q$  convexe ouvert. Notons  $F = Q \cap D$ :

**Définition 3** Le point  $x_* \in F$  est appelé solution faible du problème des inégalités variationnelles si :

$$hc(x); x_j x_*i \leq 0 \quad \forall x \in F: \quad (21)$$

Le point  $x^* \in F$  est appelé solution forte du problème des inégalités variationnelles si :

$$hc(x^*); x_j x^*i \leq 0 \quad \forall x \in F: \quad (22)$$

Les principaux résultats sur les inégalités variationnelles que nous utilisons dans cet exposé sont résumés dans l'appendice.

Soient  $X_*$  et  $X^*$  les ensembles respectifs des solutions faibles et fortes.

**Lemme 4** Si l'ensemble  $X_*$  est non vide, alors il est convexe.

**Preuve** Effectivement,  $X_* = \{y \in F : hc(x); x_j y_i \leq 0 \quad \forall x \in F\}$ : Ainsi, c'est une intersection des ensembles convexes.

En général, nous avons besoin de conditions pour assurer l'existence de solutions aux problèmes d'inégalités variationnelles. Les hypothèses les plus standards sont relatives à la notion d'opérateur monotone.

**Définition 4** L'opérateur  $c(x)$  est appelé monotone si pour tout  $x; y \in D$  nous avons :

$$hc(x) - c(y); x - y \geq 0:$$

Si pour tout  $x \in y$  cette inégalité est stricte, alors l'opérateur  $c(x)$  est appelé strictement monotone.

Nous donnons quelques conditions suffisantes pour la monotonie d'un opérateur.

1. Soit  $f(x)$  une fonction convexe,  $\text{dom } f = E$ : Notons par  $@f(x)$  sa sous-dérivée :

$$@f(x) = \{g \in E^* : f(y) \geq f(x) + g(y - x) \quad \forall y \in E\}$$

Pour tout  $x \in E$  nous fixons  $g(x) \in @f(x)$  (nous appelons cet opérateur l'opérateur subgradient de la fonction  $f(x)$ ). Alors  $g(x)$  est un opérateur monotone :

$$g(x) \leq g(y); x \leq y \Rightarrow 0 \quad \forall x, y \in E$$

Notons que dans ce cas, l'inégalité (21) avec  $c(x) = g(x)$  nous fournit avec la condition d'optimum pour le point  $x_n$ ; le point minimum contraint de la fonction  $f(x)$  dans l'ensemble  $F$ :

2. Si  $c(x)$  est dérivable et si sa dérivée  $c^0(x)$  est semi-définie positive en tout  $x$ ; alors  $c(x)$  est un opérateur monotone :

$$h c(x) \leq c(y); x \leq y = \int_0^1 h c^0(y + \lambda(x - y))(x - y) d\lambda \geq 0 \quad \forall x, y \in F$$

Ainsi, l'opérateur linéaire  $c(x) = Ax + b$  avec la semi-définie positive  $A$  est monotone.

Nous mentionnons également quelques opérateurs qui préservent la monotonie.

1. Intersection. Si les opérateurs  $c_1(x)$  et  $c_2(x)$  sont monotones et  $\alpha, \beta \geq 0$ ; alors l'opérateur

$$c(x) = \alpha c_1(x) + \beta c_2(x); \quad \text{dom } c = \text{dom } c_1 \cap \text{dom } c_2$$

est également monotone.

2. Produit direct. Si les opérateurs  $c_1(x)$  et  $c_2(y)$  sont monotones et  $z = (x; y)$ ; alors l'opérateur

$$C(z) = (c_1(x); c_2(y)); \quad \text{dom } c = \text{dom } c_1 \times \text{dom } c_2$$

est monotone.

3. Transformations affines. Soit  $c(x)$  un opérateur monotone. Considérons l'opérateur linéaire

$$A(y) = Ay : E_1 \rightarrow E$$

Et soit  $A^n$  son opérateur joint

$$h s; A y_i = h A^n s; y_i \quad \forall s \in E^n; y \in E_1$$

Ainsi, on a  $A^n : E^n \rightarrow E_1$ . Dès lors, l'opérateur  $g(y) = A^n c(A(y))$  est monotone :

$$\begin{aligned} h g(y_1) \wedge g(y_2); y_1 \wedge y_2 i &= h A^n (c(A(y_1)) \wedge c(A(y_2))); y_1 \wedge y_2 i \\ &= h c(A(y_1)) \wedge c(A(y_2)); A(y_1 \wedge y_2) i \\ &= h c(A(y_1)) \wedge c(A(y_2)); A(y_1) \wedge A(y_2) i \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout  $y_1, y_2 \in F_y : A(y) \in D_g$ :

Nous démontrons maintenant quelques affirmations relatives aux ensembles de solutions du problème des inégalités variationnelles.

Lemme 5 Si l'opérateur  $c(x)$  est monotone, alors  $X^n \subseteq X_n$ :

Preuve 3 En effet,  $h c(x); x \wedge y_i \geq h c(y); x \wedge y_i$ :

Lemme 6 Si l'opérateur  $c(x)$  est monotone et continu, alors  $X^n = X_n$ :

Preuve 4 Prenons un  $y \in F$  arbitraire. Pour  $\theta \in [0; 1)$  arbitraire, considérons le point  $x_\theta = y + \theta(x_n \wedge y)$ . Alors,

$$0 \leq h c(x_\theta); x_\theta \wedge x_n i = (1 - \theta) h c(x_\theta); y \wedge x_n i$$

Ainsi,  $h c(x_\theta); y \wedge x_n i \geq 0$ . En prenant la limite quand  $\theta \rightarrow 1$ ; nous obtenons  $h c(x_n); y \wedge x_n i \geq 0$  pour tout  $y \in F$ .

Lemme 7 Si  $c(x)$  est strictement monotone et  $X_n \neq \emptyset$ ; alors la solution faible est unique.

Preuve 5 Supposons qu'il existe deux solutions faibles  $x_n$  et  $y_n$ . Pour  $\theta \in (0; 1)$ ; notons  $x_\theta = \theta x_n + (1 - \theta) y_n$ . Alors,

$$\begin{aligned} 0 &\leq h c(x_\theta); x_\theta \wedge x_n i = (1 - \theta) h c(x_\theta); y_n \wedge x_n i; \\ 0 &\leq h c(x_\theta); x_\theta \wedge y_n i = \theta h c(x_\theta); x_n \wedge y_n i; \end{aligned}$$

Par conséquent  $h c(x_\theta); x_n \wedge y_n i = 0$ . Ainsi, pour  $\theta \in (0; 1)$  arbitraire, nous avons :

$$h c(x_\theta) \wedge c(x_n); x_\theta \wedge x_n i = (\theta \wedge 1) h c(x_\theta) \wedge c(x_n); x_n \wedge y_n i = 0$$

Ceci contredit la forte monotonie de  $c(x)$ :

Démontrons maintenant le résultat d'existence générale.

**Théorème 8** Si l'opérateur  $c(x)$  est monotone et si  $F$  est borné, alors il existe un point  $x_\alpha \in \text{cl } F$ , qui satisfait l'ensemble des inégalités (21).

**Preuve** Considérons le système suivant des ensembles convexes bornés :

$$Q(x) = \{y \in \text{cl } F : h_c(x); x_j - y_j \leq 0; \quad x \in F\}.$$

Premièrement, nous supposons que pour tout ensemble de  $n+1$  points  $x_1; \dots; x_{n+1}$ , l'intersection  $\bigcap_{i=1}^{n+1} Q(x_i)$  est non vide. Alors, en vue du théorème de Helly, il existe un point  $x_\alpha$  tel que :

$$x_\alpha \in \bigcap_{x \in F} Q(x).$$

Ce point satisfait clairement les conditions (21).

Supposons maintenant qu'il existe  $n+1$  points  $x_1; \dots; x_{n+1}$  pour lesquels l'intersection  $\bigcap_{i=1}^{n+1} Q(x_i)$  est vide. Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq n+1} h_c(x_i); x_j - x_{ij}.$$

En vue de notre dernière hypothèse,

$$f_\alpha = \min_{x \in \text{cl } F} f(x) > 0.$$

Notons  $x_\alpha = \arg \min_{x \in \text{cl } F} f(x)$ . Alors, il existe un  $g_\alpha \in \text{supp } f(x_\alpha)$  tel que

$$h_{g_\alpha}; x_j - x_{\alpha j} \leq 0 \quad \forall x \in \text{cl } F. \quad (23)$$

Notons que

$$\text{supp } f(x_\alpha) = \text{Conv} \{c(x_i); i \in I^\alpha\}; \quad I^\alpha = \{i : h_c(x_i); x_\alpha - x_{ij} = f_\alpha\}.$$

Ainsi,  $g_\alpha = \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i c(x_i)$  pour un  $\lambda_i > 0$ ;  $\sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i = 1$ . Par conséquent,

$$f_\alpha = \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i h_c(x_i); x_\alpha - x_{ij} = h_{g_\alpha}; x_\alpha - x_{ij} = \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i h_c(x_i); x_{ij}. \quad (24)$$

D'un autre côté,  $h_c(x_i); x_j - x_{ij} \leq 0$ . En multipliant les inégalités par  $\lambda_i$  et en prenant la somme de tous les  $i, j \in I^\alpha$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i, j \in I^\alpha} \lambda_i \lambda_j h_c(x_i); x_j - x_{ij} \\ &= 2 \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i h_c(x_i); x_{ij} - 2 \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i c(x_i); \sum_{j \in I^\alpha} \lambda_j x_{ij} \\ &= 2 \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i h_c(x_i); x_{ij} - 2 h_{g_\alpha}; \sum_{i \in I^\alpha} \lambda_i x_{ij} \end{aligned}$$

ou  $k = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in F$ : Ainsi, en vue de (24) et (23), nous avons:

$$0 < f_{x^*} \cdot h_{g_{x^*}; x^*}(\lambda) < 0.$$

Nous obtenons une contradiction qui démontre le résultat.

Dans une situation simple, lorsque  $Q \cap D$ , le théorème cité plus haut assure  $x^* \in C$ ; Toutefois, dans plusieurs situations intéressantes, l'ensemble  $F = Q \cap D$  n'est pas fermé. Alors, en vue de garantir l'existence des solutions faibles, nous devons introduire des hypothèses additionnelles sur le comportement de l'opérateur  $c(x)$  proche des bords de son domaine.

**Définition 5** Un opérateur  $c(x)$  est appelé fermé si pour tout  $y \in D$

$$h_{c(x); x}(\lambda) \leq 1 \quad \text{quand } x \in @D:$$

Une classe importante des opérateurs monotones fermés est donnée ci-dessous.

**Lemme 8** Soit  $f(x)$  une fonction de barrage convexe:

$$f(x) \leq 1 \quad \text{quand } x \in @(\text{dom } f).$$

Alors son opérateur subgradient est fermé.

**Preuve 7** En effet, soit  $f(x)$  une fonction de barrage. Fixons un  $y \in \text{dom } f$  arbitraire: Alors,

$$h_{f(x); x}(\lambda) \leq f(x) \leq f(y) \leq 1 \quad \text{as } x \in @(\text{dom } f).$$

Maintenant, nous pouvons prouver le résultat d'existence générale.

**Théorème 9** Soient  $c(x)$  un opérateur monotone fermé et l'ensemble  $F$  fermé. Alors  $x^* \in C$ ;

**Preuve 8** En vue du théorème 8, il existe un point  $x^* \in C \cap F$ , qui satisfait l'ensemble des inégalités (21). Nous avons besoin de démontrer uniquement l'actuel  $x^* \in F$ . Choisissons  $y \in F$  arbitraire et des points  $x^{\otimes} = y + \otimes(x^* - y)$  avec  $\otimes \in (0; 1)$ : Alors,

$$0 \leq h_{c(x^{\otimes}); x^{\otimes}}(\lambda) = \frac{1 - \otimes}{\otimes} h_{c(x^{\otimes}); x^{\otimes}}(\lambda):$$

Ainsi,  $0 \leq h_{c(x^{\otimes}); x^{\otimes}}(\lambda)$  pour tous les  $\otimes \in (0; 1)$ : Notons que  $y \in D$  et  $x^{\otimes} \rightarrow x^*$  quand  $\otimes \rightarrow 1$ : Puisque  $c(x)$  est fermé, nous concluons que  $x^* \in D$ .



## Chapitre 2

# Stationnement incitatif pour le tra...c du matin et du soir

## Introduction

Le stationnement joue un rôle important dans l'étude de la gestion de la congestion du trafic. Ceci est dû au fait que le nombre de véhicules a augmenté de façon exponentielle au cours des dernières années. Le temps de recherche d'une place de stationnement dans les villes congestionnées a influencé de façon significative la congestion dans les villes et par conséquent détérioré les conditions du trafic. Les économistes et les ingénieurs en trafic ont étudié depuis plusieurs décennies la tarification routière. Les premiers travaux dans ce sens sont dus à Pigou et Vickrey (voir [1] et [2]). Les récents développements de l'analyse des zones de stationnement en économie des transports ont été peu abordés (voir [3] et [4]; pour une analyse du prix de la place de stationnement en fonction de l'heure de la journée, se référer [5]). Cependant, la tarification routière en milieu urbain des places de stationnement, à quelques exceptions près, est très difficile à mettre en place. Les experts en transport sont en accord sur le fait que la difficulté ne provient pas des contraintes technologiques. Les communautés de Hong-Kong et de Singapour ont mis en place la tarification en milieu urbain avec succès. Dans l'ensemble, l'acceptation de cette tarification par le public reste faible, malgré une légère amélioration ces dernières années. Il est possible que ceci soit dû au fait que les modèles utilisés, dans ce domaine, restent éloignés des décisions des déplacements quotidiens des usagers, comme nous l'argumentons plus loin.

Il y a vingt ans, les planificateurs se préoccupaient principalement de l'absence de zones de stationnement dans les villes. Durant ces dernières années, il a été reconnu que le système de transport est beaucoup plus subtil dans le sens où l'augmentation du nombre de places de stationnement ne peut réduire, toutes choses égales par ailleurs, que le temps de recherche d'une place de stationnement. Cependant, il peut également faire croître le coût généralisé des véhicules et par conséquent induire une variation de la part modale en faveur de l'automobile. En effet, les places de stationnement peuvent être considérées comme un moyen de contrôle de la congestion. La tarification des places de stationnement a été plus facilement acceptée par le public et s'avère être un instrument politique (de second ordre) permettant une régulation de la congestion [7]. La gestion adéquate des zones de stationnement reste une tâche complexe car elle doit prendre en compte l'optimisation de plusieurs facteurs : la localisation des zones de stationnement, de leur capacité ainsi que tarification (qui, dans le cas d'un modèle dynamique, peut dépendre de l'heure de la journée).

De nombreuses études ont été menées afin d'analyser le comportement de choix du conducteur; en particulier le comportement de recherche d'une place de stationnement a attiré une vive attention (voir [8], [9] et [10]). Cependant, ces modèles sont souvent complexes et ne pourraient pas être appliqués dans le cas de grands réseaux. Nous avons préféré, ici, développer un modèle plus complet de stationnement aux dépens d'une description très simple du comportement des conducteurs. En particulier, nous nous

concentrons sur le choix d'un emplacement de stationnement mais nous ne prenons pas en compte le coût de la recherche d'une place de stationnement.

Le choix d'un emplacement de stationnement est une décision obligatoire, puisqu'il représente une contrainte sur les déplacements suivants ou sur le déplacement du retour. Il ne devrait pas être séparé de la chaîne du déplacement. Beaucoup d'études se sont concentrées sur un voyage d'une origine à une destination, par exemple pour les trajets réguliers du matin ou dans le contexte d'un déplacement d'achat, qui implique le choix d'un emplacement de stationnement (voir [11] et [12]). Cependant, à notre connaissance, aucune étude n'a considéré l'enchaînement des déplacements d'une journée entière pour une population qui se déplace dans un grand réseau congestionné. Nous reconnaissons explicitement le fait que le choix combiné d'une place de stationnement et du mode alternatif utilisé ne puisse pas être décrit de façon isolée. Pour remédier à cette situation, nous avons développé un modèle pour les déplacements du matin et du soir. Nous concentrons notre attention sur les automobilistes et nous considérons que chacun d'eux a l'accès à un emplacement de stationnement avec un temps fixe d'accès (selon l'emplacement) et un prix de stationnement (évidemment ce dernier pourrait être nul). La difficulté du problème est due au fait que les pics du matin et du soir ne peuvent pas être traités de façon isolée. Il est vrai que le flux de déplacement du matin n'interagit pas avec le flux du soir. Mais, si un usager choisit une place de stationnement le matin, il doit nécessairement revenir, après son activité, à la même place pour retrouver son véhicule laissé le matin. Une façon de résoudre ce problème consiste à énumérer l'ensemble des choix possibles. Cette méthode se révèle très difficile à mettre en place puisqu'elle correspond à un problème combinatoire. Nous suggérons donc une autre approche qui constitue la contribution originale majeure de ce chapitre. Nous résolvons le problème du pic du matin et du soir en dupliquant physiquement le réseau routier : l'un des deux réseaux est associé aux déplacements du matin et l'autre aux déplacements du soir. Ces deux réseaux sont logiquement liés aux places de stationnement disponibles. Cependant, un tel artifice sera possible seulement si les propriétés mathématiques du modèle global restent les mêmes que les propriétés mathématiques des modèles du matin et du soir.

Nous utilisons l'approche de la dynamique stable introduite dans [13] et [14] (voir également [17]). Cette formulation est basée sur trois axiomes simples qui caractérisent l'offre et les comportements des usagers. Dans ce modèle, ces axiomes sont compatibles avec les bases de la microéconomie et du transport. Premièrement, nous supposons que le flux entrant sur chaque lien ne peut excéder la capacité. Deuxièmement, nous supposons que le temps de trajet est constant tant que le flux entrant est inférieur à la capacité. Troisièmement, nous supposons que chaque usager sélectionne le chemin le plus court. Ces axiomes sont suffisants pour résoudre le problème d'équilibre dans un grand réseau. Dans le modèle dynamique stable, l'offre n'est pas décrite en dehors de l'équilibre. Cet

argument est standard dans la théorie des jeux. Notons qu'il est possible de montrer que le problème dual de ce modèle est connu dans la minimisation des coûts de fabrication multiproduits ([13] et [14]). Ce résultat est nouveau dans la littérature relative aux modèles statiques de transport (pour un exposé pédagogique du modèle statique, voir par exemple [15]). Nous avons montré dans [16] que le modèle dynamique stable peut être aisément utilisé en vue de résoudre (en utilisant uniquement des arguments logiques) le problème d'équilibre des réseaux simples, comme le réseau de Braess. Des exemples de simulation ont été effectués pour le réseau de Sioux Falls [16]. De même, le calcul de l'équilibre pour des réseaux de grande taille (Réseau routier de l'Île-de-France) a été réalisé. Pour cela, nous avons utilisé le système PlaNet.WP qui permet une mise en place conviviale du modèle dynamique stable.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un traitement intégral du problème de stationnement et de circulation du matin et du soir, en utilisant l'approche du modèle dynamique stable récemment introduit par les auteurs. Dans la section 2, nous définissons les notations et résumons brièvement les concepts relatifs au modèle dynamique stable. Nous présentons également la formulation mathématique correspondante. Dans la section 3, nous fournissons trois traitements : (1) les déplacements du matin avec choix du lieu de stationnement, (2) les déplacements du soir avec choix du lieu de stationnement ; et (3) les déplacements du matin et du soir avec choix du lieu de stationnement combiné au choix de route du matin et du soir. Les remarques et les conclusions seront présentées dans la section 4.

## 1 Notations

Supposons un réseau de transport  $R$  composé d'un ensemble de nœuds  $N$  et d'un ensemble de liens orientés  $A$ . Pour ce réseau, nous définissons un ensemble de paires origine-destination (paires O-D) :

$$OD = \{(i; j) \mid i, j \in N; i \neq j\}$$

Parfois, nous serons amenés à travailler avec un ensemble d'origines  $O \subset N$  et un ensemble de destinations  $D \subset N$ . À chaque paire  $OD (i; j)$ , est associée une demande  $d_{(i; j)}$ . Cette demande représente traditionnellement le flux moyen des usagers qui désirent voyager du nœud  $i$  à un autre nœud  $j$ ; par conséquent la demande est un nombre réel non-négatif.

Pour chaque paire  $OD (i; j)$ , nous définissons un ensemble de chemins connectant le nœud  $i$  au nœud  $j$  :

$$P_{(i; j)}^r \subset R^{|A|}; \quad r = 1; \dots; r_{i; j}$$

ou les  $r$  composants du vecteur  $a_{(i,j)}^r$  ( $r = 1; \dots; jAj$ ) sont égaux à 1 si l'arc  $r$  est inclus dans le chemin et nuls par ailleurs.

Pour chaque arc  $r$  du réseau, nous introduisons le temps de trajet à vide minimum  $\bar{t}_r$ . Nous introduisons également une autre caractéristique de l'arc, le flux sortant maximal  $\bar{f}_r$ . Dans le réseau urbain, le flux maximal dépend du nombre de liens de la route, de la phase des feux tricolores aux intersections, des conditions climatiques, etc. Comme il l'a été montré dans [13] et [14], même avec cette restriction informative, nous pouvons calculer le temps de trajet d'équilibre. Formellement, cette solution d'équilibre est dérivée à partir des hypothèses comportementales suivantes.

**Hypothèse 1:** Etant donné le temps de trajet des arcs constituant le chemin  $t = \sum_{r \in A} t_r$  dans le réseau  $R$ , chaque conducteur choisit l'un des plus courts chemins (sous la contrainte de  $t$ ) pour se déplacer de son origine à sa destination.

**Hypothèse 2:** Le flux  $f_r$ , observé sur l'arc  $r$ , ne doit jamais excéder  $\bar{f}_r$ . Si  $f_r < \bar{f}_r$  alors le temps de trajet sur l'arc est égal à  $\bar{t}_r$  (ce qui représente le temps de trajet à vide). Si  $f_r = \bar{f}_r$  alors le temps de trajet  $t_r$  peut prendre n'importe quelle valeur supérieure ou égale à  $\bar{t}_r$ .

Nous appelons les modèles qui permettent le calcul des chemins d'équilibre satisfaisant ces hypothèses, les modèles dynamiques stables ou stationnaires (voir [13] et [14]).

Afin de satisfaire quelques intuitions, considérons un réseau simple avec une origine, une destination et deux routes en parallèle. Nous supposons que la route 1 est plus petite en temps de trajet à vide que la route 2. Si le flux de déplacement pour la paire O-D est très petit, l'ensemble des conducteurs utilisera la route 1. Par ailleurs, si le nombre de conducteurs est très élevé, certains automobilistes vont nécessairement utiliser la route 2. Dans ce cas, le temps de trajet d'équilibre est calculé à l'aide des conditions d'équilibre qui impliquent qu'à l'équilibre, l'ensemble des routes utilisées doivent avoir le même temps de trajet (puisque nous avons un continuum de conducteurs). Par conséquent, dans ce cas, le temps de trajet d'équilibre doit être égal au temps de trajet de la route 2.

Dans le réseau  $R$ , le temps de trajet sur un arc est noté  $t$ . Pour chaque paire OD  $(i; j)$ , nous pouvons calculer le temps de trajet du chemin le plus court. Cette valeur est fonction du temps de trajet  $t \in \mathbb{R}^m$  et a la forme analytique suivante :

$$T_{(i,j)}(t) = \min_r \{ \sum_{r \in A} a_{(i,j)}^r t_r ; r = 1; \dots; r_{(i,j)} \}$$

Donc,  $T_{(i,j)}(t)$  est une fonction linéaire par morceau par rapport à  $t$ .

Introduisons maintenant la fonction de coût :

$$C(t) = \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)} T_{(i,j)}(t)$$

Considérons le flux maximal suivant, résultant du modèle décrit dans [14].

$$t \leq \bar{t}; \quad 0 \leq f \leq \bar{f}; \quad \forall A \quad (1)$$

**Théorème 1 :** Le temps de trajet de l'arc  $t^*$  et le vecteur du flux de l'arc  $f^*$  est une solution d'équilibre du modèle 1 si et seulement si  $t^*$  est solution du problème :

$$\max_t fC(t) \quad \text{s.t.} \quad \bar{f}; \bar{t} : t \leq \bar{t}; \quad (2)$$

et  $f^* = \bar{f} \cdot s^*$ , où  $s^*$  est le vecteur des multiplicateurs duaux optimaux des contraintes des inégalités dans (2).

## 2 Modèle de stationnement incitatif

Nous allons modéliser la situation dans laquelle le conducteur peut laisser sa voiture à une place de stationnement donnée et continuer son déplacement jusqu'à sa destination en utilisant les transports publics (concept de parking de dissuasion). Dans ce cas, il convient de traiter les origines et les destinations comme des nœuds séparés, qui ne sont pas connectés par des nœuds de  $N$  par aucun arc  $\forall A$ . Notons dans notre réseau l'ensemble des nœuds de stationnement  $p \in N$ . Pour chaque destination  $j \in D$ , nous introduisons un ensemble d'arcs orientés  $F_j$ , qui relie chaque nœud de la zone de stationnement  $p \in N$  avec le nœud de destination  $j$ . Notons que le coût  $\tau_x$  peut incorporer le coût du paiement du stationnement. Finalement, pour chaque origine  $i \in O$ , nous introduisons un ensemble d'arcs spéciaux  $E_i$ , qui relie cette origine à certains nœuds du réseau  $R$  (nœuds d'accès). Le temps de trajet sur ces arcs est  $\tau_x$ .

Maintenant, nous pouvons introduire des fonctions de temps de trajet particulières. Considérons une paire origine-destination  $(i,j) \in OD$ . Nous formons ainsi le réseau  $R_{(i,j)}$  avec l'ensemble des arcs  $A_{(i,j)}$  et l'ensemble des nœuds  $N_{(i,j)}$  :

$$\begin{aligned} A_{(i,j)} &= E_i \cup A \cup F_j \\ N_{(i,j)} &= \{i\} \cup N \cup \{j\} \end{aligned}$$

Fixons maintenant certains temps de trajet  $t$  sur les arcs du réseau  $R$ . Dès lors, nous pouvons calculer le chemin le plus court en distance  $SP_{(i,j)}$  de l'origine  $i$  à la destination  $j$ , en utilisant le réseau  $R_{(i,j)}$ . Clairement, ce chemin est une fonction concave de  $t$ .

Nous écrivons alors la formulation mathématique du modèle de recherche de place de stationnement. Celui-ci correspond au problème de maximisation convexe suivant :

$$\max_t f \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)} SP_{(i,j)}(t) \quad ; \quad h\bar{f}; t_i : t \leq \bar{t}g \quad (3)$$

Ce modèle correspond au trafic du matin. De la même façon, dans le modèle de la Dynamique Stable standard, nous pouvons prouver le théorème suivant :

**Théorème 2 :** Soit  $t^*$  la solution optimale au problème (3) et  $f^* = \bar{f} + s^*$ , où  $s^*$  est le vecteur des multiplicateurs duaux optimaux des contraintes des inégalités  $t \leq \bar{t}$  dans (3). Donc, la paire  $(f^*; t^*)$  satisfait les hypothèses 1 et 2.

La preuve est similaire à celle du théorème 2 dans [14]. Elle est basée sur le fait que les super-différentielles des fonctions concaves non lisses  $SP(t)$  déterminent les chemins les plus courts de l'origine  $i$  à la destination  $j$ . Dans notre cas, ces chemins les plus courts prennent en compte également les nœuds des zones de stationnement. Les relations d'équilibre entre le temps de trajet d'équilibre  $t^*$  et le flux d'équilibre  $f^*$  sont dérivées des conditions optimales de Kuhn-Tucker du problème 3.

Pour le trafic du soir, nous pouvons écrire un modèle similaire. Soit, pour chaque destination  $j \in D$ , un ensemble d'arcs orientés  $B_j$  qui relie le nœud de destination  $j$  à chaque nœud de stationnement  $p \in P$ . Pour chaque type d'arc, nous introduisons un coût fixe pour l'accès de  $j$  à  $p$ . Pour chaque origine  $i \in O$ , nous introduisons un ensemble d'arcs  $C_i$  qui relie les nœuds d'accès de cette origine à l'origine elle-même. Le temps de trajet de ces arcs est fixe. Finalement, pour chaque paire origine-destination  $(i; j \in OD)$ , nous formons un réseau  $\bar{R}_{(i,j)}$  avec l'ensemble des arcs  $\bar{A}_{(i,j)}$  suivants et l'ensemble des nœuds  $\bar{N}_{(i,j)}$  :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{(i,j)} &= B_j \cup A \cup C_i \\ \bar{N}_{(i,j)} &= \{j\} \cup N \cup \{i\} \end{aligned}$$

Par la suite, nous fixons le temps de trajet  $t$  sur les arcs du réseau  $N$ . Par conséquent, nous pouvons calculer la distance du chemin le plus court  $\bar{SP}_{(i,j)}(t)$  de la destination  $j$  à l'origine  $i$  en utilisant le réseau  $\bar{R}_{(i,j)}$ . Celle-ci est une fonction concave de  $t$ .

La solution d'équilibre du trafic du soir dans le modèle de recherche de zones de stationnement correspond au problème de maximisation convexe suivant :

$$\max_t f \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)} \bar{SP}_{(i,j)}(t) \quad ; \quad h\bar{f}; t_i : t \leq \bar{t}g \quad (4)$$

**Théorème 3:** Soit  $t^*$  la solution optimale du problème (4) et  $f^* = \bar{f}_i s^*$ , où  $s^*$  est le vecteur des multiplicateurs duaux optimaux des contraintes des inégalités  $t \leq \bar{t}$  dans 4. Par la suite la paire  $(t^*; f^*)$  satisfait les hypothèses 1 et 2.

Finalement, nous pouvons écrire le modèle de recherche de place de stationnement mixte matin et soir. Puisque les temps de trajet des périodes du matin et du soir sont différents, nous devons introduire deux copies identiques de  $N$  et  $A$ :

$$N_m \subset N; A_m \subset A; N_e \subset N; A_e \subset A;$$

Plus loin, nous traiterons les arcs de l'ensemble  $E_i$  comme des arcs connectant l'origine  $i$  aux nœuds de  $N_m$  et les arcs de l'ensemble  $C_i$  comme les arcs connectant les nœuds de  $N_e$  au nœud de destination  $j$ .

Introduisons pour chaque destination  $E_j$  un ensemble d'arcs orientés  $G_j$  (les arcs représentant les zones de stationnement). Ces arcs connectent chaque nœud des zones de stationnement  $N_i$  dans le réseau du matin avec son correspondant  $p \in N_m \setminus P$  dans le réseau du soir. Le temps de trajet sur cet arc est fixe. Il est égal au temps qui est nécessaire pour aller de ce nœud de stationnement à la destination  $j$  au cours de la matinée et revenir de la destination  $j$  au nœud du stationnement au cours du soir. Finalement, pour chaque paire origine-destination  $(i; j) \in D$ , nous formons un réseau  $\bar{R}_{(i;j)}$  avec l'ensemble des arcs  $\bar{A}_{(i;j)}$  et l'ensemble des nœuds  $\bar{N}_{(i;j)}$ :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{(i;j)} &= E_i \cup A_m \cup G_j \cup A_e \cup C_i \\ \bar{N}_{(i;j)} &= \text{fig} \cup N_m \cup N_e \end{aligned}$$

Dans un tel réseau, chaque usager, qui se déplace de l'origine  $i$  à ce même endroit, est obligé d'utiliser le réseau du matin et utilise l'arc de la zone de stationnement pour aller dans le réseau du soir et revenir par ce réseau à son origine.

Fixons le temps de trajet  $t_m$  sur les arcs du réseau  $N_m$  et le temps de trajet  $t_e$  sur les arcs du réseau  $N_e$ . Nous pouvons, ensuite, calculer le chemin le plus court en distance  $\overline{SP}_{(i;j)}(t_m; t_e)$  de l'origine  $i$  à ce même endroit, en utilisant le réseau  $\bar{R}_{(i;j)}$ . La fonction objectif est également concave par rapport à  $(t_m; t_e)$ .

La solution d'équilibre du modèle correspond au problème de maximisation convexe suivant:

$$\max_{t_m; t_e} f \sum_{(i;j) \in 2OD} d_{(i;j)} \overline{SP}_{(i;j)}(t_m; t_e) \quad \text{s.t.} \quad t_m \leq \bar{t}; t_e \leq \bar{t}_g \quad (5)$$

**Théorème 4:** Soit  $(t_m^*; t_e^*)$  la solution optimale du problème (5) est:

$$f_m^* = \bar{f}_i s_m^* \quad f_e^* = \bar{f}_i s_e^*$$



ou  $s_m^a$  et  $s_e^a$  et sont les vecteurs des multiplicateurs duaux optimaux pour les contraintes des inégalités respectives  $t_m \leq \bar{T}$  et  $t_e \leq \bar{T}$ . Alors, les temps de trajet  $(t_m^a; t_e^a)$  et les flux  $(f_m^a; f_e^a)$  satisfont les hypothèses 1 et 2.

Les techniques numériques standards permettent facilement la résolution de ce problème convexe (voir [17]). Une procédure de calcul devrait être mise en place prochainement dans l'application PlaNet.WP. On trouvera également des informations dans le manuel d'accompagnement [18].

### 3 Discussion et remarques finales

Nous avons développé une formulation mathématique pour décrire le stationnement incitatif pendant les périodes du matin et du soir. Cet outil se base sur l'approche du modèle dynamique stable.

Il permet de tester des politiques de stationnement à un niveau local ou à un niveau global. Cette approche se base sur l'idée que les problèmes de stationnement doivent être intégrés dans les modèles d'affectation du trafic et non pas de façon isolée. La structure proposée permet d'étudier la gestion du stationnement et de contrôler la congestion d'une manière logique et selon la même approche que celle du modèle dynamique stable.

Dans un but de simplification, nous avons supposé que la matrice O-D des déplacements du matin est la même que celle du soir. Ceci n'est pas nécessairement vrai, mais l'approche proposée peut être facilement étendue, avec plus de notations, au cas où les deux matrices (du matin et du soir) diffèrent.

De plus pour simplifier, nous avons également supposé dans cet exposé que les matrices O-D sont exogènes. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque dans nos formulations précédentes [14], nous avons proposé une méthode pour décrire la génération et la distribution des déplacements comme partie intégrante de la même formulation mathématique du modèle dynamique stable. Cette extension ajoute une étape supplémentaire à la procédure d'optimisation, mais elle ne modifie pas l'approche proposée dans cet exposé.

Nous testons actuellement notre approche pour le réseau de Paris (Île-de-France) dans le but de comparer les différents programmes de stationnement incitatif. Les résultats seront présentés dans de futures contributions.

Clairement, certaines étapes importantes ont été omises à ce stade. La méthodologie proposée est capable de comparer plusieurs politiques de stationnement, mais elle est incapable de sélectionner les meilleures pour les mettre en place. Cela exigerait l'addi-

tion d'une étape supplémentaire qui impliquerait l'optimisation le long de la dimension suivante : localisation des places de stationnement et tarification.

Finalement, rien n'a été fait pour tester les questions importantes de coût de recherche d'un emplacement de stationnement et les contraintes de capacité n'ont pas été abordées dans cette étude. La première question pourrait être modélisée dans le cadre du modèle dynamique stable, puisqu'il calcule un état stable. La deuxième question pourrait être abordée en supposant que le lien d'accès à un espace de stationnement a une capacité fixe. Cette stratégie de modélisation a été proposée par des chercheurs et pourrait être mise en place facilement dans le contexte dynamique stable. Cependant, cette approche n'est que partiellement satisfaisante puisqu'elle n'est pas basée sur des fondements microscopiques clairs et puisqu'elle ne prend pas en compte les contraintes des capacités des zones de stationnement.

## References

- [1] Vickrey, W. (1959). Statement on the Pricing of Urban Street Use. In Hearing, US Congress Joint Committee on Metropolitan Washington Problem, November 11, 1959, reprinted in *Journal of Urban Economics*, (1994) 36, 42-65.
- [2] Roth, G. (1965). *Paying for Parking*. The Institute of Economic Affairs, London.
- [3] Arnott, R. et J. Rowse (1995). *Modeling Parking*. Department of Economics, Boston College, unpublished manuscript.
- [4] Young W. R. Thomson et M. Taylor (1991). A review of Urban Parking Models, *Transport Review*, 11, 63-84.
- [5] Arnott, R., A. de Palma et R. Lindsey (1991). Temporal and Spatial Equilibrium Analysis of Commuter Parking. *Journal of Public Economics* 45, 301-337.
- [6] Axhausen, K. et R. Hertz (1990). Simulating Activity Chains: A German Approach to Modeling Urban Travel. *Journal of Transportation Engineering*, American Society of Civil Engineer.
- [7] Association of Governments (1999) 1998 State of the Commute Report. Southern California of Governments Southern California Ridershare.
- [8] Ben-Akiva, M., C.F. Manski et C/F. Sherman (1981). A Behavioral Approach to Modeling Household Vehicle Ownership and Applications to Aggregate Policy Analysis. *Environment and Planning A*, 13, 339-441.
- [9] Thomson R. et A. Richardson (1998). A Parking Search Model. *Transportation Research A*, 32, 3, 159-170.
- [10] Axhausen, K. et J. Polak (1991). Choice of Parking: stated preference approach. *Transportation* 18, 59-81.
- [11] Tam et W. Lam (2000). Maximum Car Ownership under Constraints of Road Capacity and Parking Space, *Transportation Research A*, 34, 145-170.
- [12] Van der Waerden P. et H. Oppwal (1995). Modeling the Combined Choice of Parking lot and Shopping Destination. Paper presented at the 7th World Conference on Transport Research July 16-21, Sydney, Australia.

[13] Nesterov Yu. (2000) Stable Traffic Equilibria. Properties and Applications. Optimization and Engineering, vol.1, No 1, 29-50.

[14] Nesterov Yu. et A. de Palma (2000). Stable Dynamics in Transportation Systems. CORE DP 2000/27.

[15] Sheffi Y. (1995). Urban Transport Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[16] de Palma, A. et Yu. Nesterov (2000). Stable Dynamics in Transportation Systems: applications, unpublished manuscript, CORE, Université Catholique de Louvain, Belgium.

[17] Knuth, D.E. (1979). The Art of Computer Programming. Addison-Wesley.

[18] Nesterov, Y. et A. de Palma (2001). Static Equilibrium in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives. Discussion paper, University of Cergy-Pontoise, THEMA, France.

## Chapitre 3

# Mouvement pendulaire du soir

## 1. Introduction

Nous présentons ci-dessous une contribution théorique<sup>1</sup> pour la modélisation du pic du soir dans les modèles dynamiques. Nous nous proposons ensuite de nous baser sur ces résultats pour introduire dans METROPOLIS, le choix de l'heure de départ aussi bien que le choix de l'heure d'arrivée.

Les modèles dynamiques concernant le pic du matin ont été étudiés durant les trente dernières années. Une littérature considérable existe désormais dans ce domaine : nous renvoyons le lecteur aux documents [1], [2] et [3]. Au contraire, le phénomène du pic du soir n'a reçu qu'une faible attention. La raison de cette différence n'est pas claire. On peut considérer qu'implicitement nous jugeons que les trajets domicile-travail du soir sont le reflet de ceux du matin. En d'autres termes, les modèles statiques ont souvent traité le phénomène du pic du soir comme le reflet du pic du matin en inversant simplement la matrice O-D. Hormis pour les routes en sens unique, les chemins les plus courts dans chacune des directions et les équilibres restent les mêmes.

Empiriquement, les différences qui existent entre le pic du matin et le pic du soir sont évidentes. En effet, le pic du soir est typiquement plus étalé dans le temps. Dans certaines zones, le temps de trajet du soir est sensiblement plus long. Ceci est dû à la fois à plus de trajets pour autres motifs et plus d'arrêts intermédiaires au cours des trajets domicile-travail le soir. Réunis, ces deux facteurs entraînent une recrudescence des véhicules sur la route et une distance à parcourir plus longue, mais aussi une dispersion du trafic sur les routes plus importantes. Les différences entre le matin et le soir sont aussi justifiées par un écart entre les taux d'accidents ; celui du soir étant le plus élevé. Ces différences de congestion peuvent s'expliquer par la fatigue, les problèmes de visibilité ou plus de trajets effectués à pieds.

Il existe une troisième différence entre le matin et le soir. Elle représente l'objectif de ce chapitre et se base sur les préférences de déshorage (c'est à dire arriver en avance ou en retard) et les contraintes des individus. Pour beaucoup de trajets domicile-travail, les heures de travail sont une considération importante dans le choix de l'heure de déplacement. Les

préférences de déshorage des individus sont définies principalement en termes d'heure d'arrivée au travail le matin et d'heure de départ le soir. Parce que les taux d'arrivée sont contraints par la capacité des routes, le déshorage, le matin, est inévitable si la demande est trop importante. Cependant l'heure de départ n'est pas contrainte par la capacité des routes. En effet, tout le monde peut quitter son poste de travail à n'importe quelle heure (ou toujours à la même heure) s'il le désire, bien que cela puisse créer d'énormes embouteillages.

La distinction entre les préférences de déshorage déterminées par l'heure d'arrivée le matin et celles déterminées par l'heure de départ le soir est fréquemment mise en évidence dans la littérature. Ce fût le point de départ de plusieurs études théoriques qui considèrent séparément le pic du matin et celui du soir. Hurdle (4) identifie plusieurs différences entre les équilibres sans tarification (notés NTE) du matin et du soir en termes de choix de l'heure de déplacement et d'importance de la congestion. L'approche d'Hurdle considère des élasticités-prix croisées de la demande égales à zéro entre les différents moments de la journée, et une spécification des flux de congestion dans laquelle le temps de trajet dépend uniquement du flux instantané que les usagers intègrent en tant qu'expérience lorsqu'ils débutent ou terminent leur trajet. Comme le reconnaît Hurdle, ces suppositions sont contestables.

Le modèle avec goulot d'étranglement de Vickrey ([5]) représente une alternative. Celui-ci est analytiquement plus maniable car il considère le temps de trajet lors des périodes de pointe comme endogène. Il démontre qu'avec des individus identiques dans un modèle de type goulot d'étranglement, le NTE du soir est le reflet de celui du matin si on respecte le moment et la durée de la période de pointe, ainsi que la fonction de coût généralisé. Plusieurs scientifiques ont dû découvrir cette équivalence entre le matin et le soir dans un modèle de type goulot d'étranglement et ont été découragés d'approfondir ce sujet. Cependant cette symétrie entre le matin et le soir n'est plus vérifiée si l'on considère que les individus ne sont pas identiques. Vickrey ([6]) et Fargier ([7]) ont démontré ceci dans plusieurs articles. Néanmoins, leur effort commun ne leur a pas permis d'établir une solution d'ensemble définitive. Vickrey ([6]) fournit une série d'exemples numériques qui illustrent certaines particularités des équilibres du matin et du soir ce qui démontre leurs différences. Cependant, il ne fournit pas d'analyse générale et systématique. Fargier ([7]), de son côté, tire plusieurs propriétés théoriques sur les NTE du matin et du soir, mais ne souligne pas leurs différences

---

<sup>1</sup> Cet article, écrit en collaboration avec le Professeur Robin Lindsey, de l'université d'Alberta au Canada, a été soumis pour publication pour TRB (Transportation Research Board Meeting).

---

ou n'examine pas l'importance quantitative de ces différences. Ces deux études se sont donc limitées à la généralité de leurs suppositions concernant les préférences des heures de déplacement et l'hétérogénéité des individus qu'elles avaient pourtant mises en lumière.

Ce chapitre a trois objectifs. Le premier est de fournir, à partir de deux autres articles ([6] et [7]), des résultats plus généraux sur l'existence et l'unicité d'un NTE le matin et le soir. Le second est d'évaluer la sensibilité des NTE du matin et du soir au degré d'hétérogénéité des usagers. Un certain nombre d'études empiriques (plus particulièrement basées sur le pic du matin) ont révélé l'étendue de la différence qui existe entre les usagers quant à leurs préférences dans le choix de l'heure de déplacement et leur aversion au temps de trajet et au déshorage. La preuve est donnée par Bates ([2]), qui plaide en faveur de l'hétérogénéité des usagers dans les modèles de choix de l'heure de déplacement. Le troisième objectif de ce chapitre, qui est lié aux deux premiers, est de déterminer dans quelle proportion le pic du soir diffère de celui du matin.

Tandis que le modèle avec goulot d'étranglement est bien établi dans la littérature, certaines justifications nécessaires à son utilisation sont à l'ordre du jour. Sur le fond, le modèle avec goulot d'étranglement est utilisable. Il est utilisé par Vickrey ([6]) et Fargier ([7]), et il existe un nombre considérable de travaux sur le pic du matin avec modèle de type goulot d'étranglement. Le modèle avec goulot d'étranglement est validé par les données empiriques ([8]). Les approches compétentes sur les flux de congestion peuvent souffrir de contradictions conceptuelles, comme la possibilité de dépassement et la dépendance du temps de trajet avec les taux d'entrée des véhicules. Les modèles de flux véhiculaire peuvent alors rendre compte de comportements irréalistes si - comme il est souvent le cas durant les périodes de pointe - les conditions de circulation changent brusquement. Des modèles matériellement plus réalistes, tel qu'un modèle d'ondes hydrodynamiques, sont dans leur analyse et leur estimation complexe.

La section 2 de ce chapitre décrit brièvement les bases du modèle avec goulot d'étranglement. La section 3 présente les conditions pour l'existence et l'unicité d'un NTE pour le matin et le soir, et considère la vraisemblance empirique de ces conditions. La section 4 se concentre sur un exemple numérique qui a pour objectif d'illustrer l'importance de l'hétérogénéité des usagers et la différence qui existe entre le matin et le soir. La section 5 conclut avec un résumé et l'ébauche d'une recherche plus avancée.



## 2. Le modèle

Le modèle est basé sur le modèle avec goulot d'étranglement de Vickrey ([5]). Se reporter à ([1] et [9]) pour relecture. Un nombre fixe,  $N$ , d'utilisateurs, une personne par véhicule, se situent le long d'une unique route. La capacité de la route est contrainte par un goulot d'étranglement dont le taux maximum d'écoulement est noté  $s$ . Si le taux d'arrivée des véhicules au niveau du goulot d'étranglement excède  $s$ , une file d'attente se développe. Le temps de trajet sans congestion est supposé, sans perte de généralité, égal à zéro.

Pour les trajets domicile-travail le matin,  $t$  représente l'heure de départ du domicile,  $t_a$  l'heure d'arrivée au travail, et  $t^*$  l'heure d'arrivée préférée au travail. Le déshorage,  $x$ , est défini comme la différence entre l'heure d'arrivée effective et l'heure d'arrivée préférée :  $x \equiv t_a - t^*$ . Étant donné que le temps de trajet sans congestion est supposé nul et que le temps d'attente est noté  $q$ , on a  $t_a = t + q$ . La fonction de coût,  $C$ , est composée des pénalités dues au temps de trajet et au déshorage, on a donc :  $C = \alpha q + D_M[x]$ . Le paramètre  $\alpha$  est le coût unitaire du temps de trajet – désormais utilisé comme une valeur du temps (VOT), et  $D_M[\cdot]$  est la fonction de coût de déshorage du matin.

Pour les trajets domicile-travail du soir,  $t$  représente l'heure de départ du travail,  $t_a$  l'heure d'arrivée au domicile, et  $t^*$  l'heure de départ préférée du travail. La fonction de coût de déshorage  $D_E[\cdot]$  est définie comme la différence entre l'heure de départ effective et l'heure de départ préférée :  $x \equiv t - t^*$ . Afin de pouvoir comparer les coûts,  $D_M[\cdot]$  et  $D_E[\cdot]$  sont supposées ne pas incorporer les préférences de déshorage des employeurs et des membres de la famille. (Ce n'est pas une supposition innocente : empiriquement, il existe des différences entre les heures d'arrivée préférées des employés et les préférences des employeurs ([10]).) Hormis ces changements, le modèle est le même que pour le matin.

L'équilibre sans tarification (NTE) est défini selon une variante du premier principe de Wardrop pour le choix de la route : aucun usager ne peut réduire (strictement) son coût de déplacement en changeant d'heure de déplacement. Les conditions pour l'existence et l'unicité d'un tel équilibre sont définies dans la section suivante.

### 3. Existence et unicité d'un équilibre sans tarification

La détermination de l'existence d'un équilibre est fondamentale lorsque l'on s'intéresse à certains modèles tels que le modèle avec goulot d'étranglement. La détermination de l'unicité est aussi importante afin d'écarter les problèmes associés aux équilibres multiples tels que l'instabilité. L'identification des conditions pour l'existence et l'unicité d'un équilibre doit, en premier lieu, être basée sur le cas d'une seule route pour permettre ensuite une analyse rigoureuse d'un modèle dynamique dans le cas d'un réseau. Sans ces conditions, la détermination numérique d'un équilibre pourrait être difficile ou impossible.

Dans cette section, nous commençons par identifier les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'un NTE pour le matin (Section 3.1). La même chose est faite pour le soir dans la Section 3.2. Nous caractérisons aussi, brièvement, le taux de départ agrégé à l'équilibre lorsque le NTE existe.

#### 3.1 Existence et unicité d'un équilibre sans tarification pour le matin

L'existence et l'unicité d'un NTE pour le pic du matin dans le modèle avec goulot d'étranglement ont été respectivement établies dans deux articles ([11] et [12]). Ce travail a récemment été étendu (se référer à [13]) dans le but d'incorporer l'hétérogénéité des usagers dans VOT et  $D_M[\cdot]$ , d'établir des hypothèses plus générales sur la forme fonctionnelle de  $D_M[\cdot]$ , et d'instaurer des contraintes sur la plage des heures d'arrivée possibles. Pour simplifier la notation, les indices par individu des paramètres ou des variables seront supprimés. Les hypothèses suivantes seront admises :

**Hypothèse DM1**  $D_M[\cdot]$  est semi-continue en haut (c'est à dire continue à droite).

**Hypothèse DM1'**  $D_M[\cdot]$  est continue.

**Hypothèse DM2**  $D_M[0] = 0, D_M[x] \geq 0$  pour  $x \neq 0$ .

**Hypothèse DM3**  $D_M[x] < \infty$  pour  $|x| < \infty$ .

$$\textbf{Hypothèse DM4} \quad \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{D_M[x + \Delta x] - D_M[x]}{\Delta x} > -\alpha \text{ pour tout } x.$$

$$\textbf{Hypothèse DM5} \quad D_M[x] = \begin{cases} -\beta x & \text{pour } x \leq 0 \\ \gamma x & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}.$$

Les hypothèses DM1 et DM1' sont nécessaires pour déterminer un taux de départ fini (borné) et unique ; ce point est développé ci-dessous. Selon l'hypothèse DM2, il est préférable d'arriver à l'heure plutôt que d'arriver en avance ou en retard. L'hypothèse DM3 est une condition technique utilisée pour prouver l'existence d'un équilibre. L'hypothèse DM4 permet d'éliminer le phénomène de départs massifs à l'équilibre ; ce point sera approfondi ci-dessous. L'hypothèse DM5 spécifie une fonction linéaire par morceau, souvent utilisée dans les études analytiques du pic du matin.

Du côté de l'offre du modèle, l'ensemble des heures d'arrivée possibles est noté  $\overline{T_a}$  et est supposé satisfaire :

$$\textbf{Hypothèse TM1} \quad |\overline{T_a}| < \infty$$

$$\textbf{Hypothèse TM2} \quad |\overline{T_a}| > N / s$$

**Hypothèse TM3**  $\overline{T_a}$  est un ensemble connexe qui ne restreint pas le début ou la fin de la période d'arrivée à l'équilibre.

Comme l'hypothèse DM3, l'hypothèse TM1 est une condition technique utilisée pour prouver l'existence d'un équilibre. Dans le cas de trajets domicile-travail, la plage des arrivées est limitée à 24 heures. De plus, il est possible d'interdire les déplacements durant certaines périodes ; par exemple entrer dans le CBD très tôt le matin. L'hypothèse selon laquelle  $\overline{T_a}$  est un intervalle fini est ainsi non restrictive. L'hypothèse TM2 assure qu'il existe une possibilité pour que les  $N$  usagers traversent le goulot d'étranglement au taux  $s$ . Finalement, l'hypothèse TM3 est utilisée pour éliminer le phénomène de départs massifs.

Les résultats d'existence et d'unicité du NTE du matin (se référer à la proposition 1 et 2 de [13]) peuvent maintenant être énoncés :

**Proposition EXIST-M** : Sous les hypothèses DM1, DM2, DM4, TM1 et TM3, il existe un NTE pour le matin dans lequel le taux de départ agrégé est fini.

**Proposition UNIQUE-M** : Sous les hypothèses DM1', DM2, DM4, TM1 et TM3, il existe un NTE pour le matin dans lequel le taux de départ agrégé est fini et unique, et le coût de déplacement pour chaque individu est unique.

Les hypothèses de la proposition UNIQUE-M diffèrent de celles de la proposition EXIST-M uniquement du fait que l'hypothèse DM1 est remplacée par l'hypothèse DM1', plus stricte. Il est à noter que la proposition UNIQUE-M assure seulement que le taux de départ agrégé du NTE est unique. L'heure de départ de chaque usager n'est pas nécessairement unique. (Avec des usagers identiques, deux individus peuvent évidemment être interchangés dans la séquence des départs sans qu'il y ait d'effet sur l'équilibre).

Les hypothèses DM1 et DM4 méritent de plus amples explications. L'hypothèse DM4 n'exclut pas seulement une discontinuité à droite de  $D_M[\cdot]$ , mais limite aussi le taux de décroissance de  $D_M[\cdot]$ . En considérant l'hypothèse DM5 et des usagers identiques, un NTE avec un taux de départ fini n'existe pas sans l'hypothèse DM4. En effet, sans cette hypothèse, il existe une multitude d'équilibres caractérisés par le fait qu'un nombre important d'individus part au début de la période de déplacement, avec des positions individuelles dans la masse des départs déterminées aléatoirement. Ces équilibres se différencient par le nombre d'individus dans la masse des départs du début de la période de déplacement. Traiter une multitude d'équilibres ne complique pas seulement les calculs mais rend plus difficile aussi la comparaison du matin et du soir. L'hypothèse DM4 permet donc de contourner ces problèmes.

L'hypothèse DM1 permet d'établir la continuité à droite de  $D_M[\cdot]$ . Par exemple, il est admis une pénalité discontinue pour une arrivée au travail à ou après 9 heures du matin, mais pas pour une arrivée strictement après 9 heures (Éliminer le retard exigerait une semi-continuité à gauche de  $D_M[\cdot]$ ). Les pénalités pour arrivées strictement après une heure spécifique sont

susceptibles d'être instituées à travers une politique officielle sur le lieu de travail, bien que la distinction ait peu de signification pratique. La preuve empirique sur la forme de la fonction de coût de déshorage (se reporter à [1], [2] et [14]) est confuse, et ne fournit pas une indication précise sur la nature des discontinuités. Certaines études supposent une fonction linéaire comme c'est le cas dans l'hypothèse DM5, qui n'a pas de discontinuité. Pourtant, Small et ses collaborateurs (voir [15] et [17]) ont identifié statistiquement des pénalités discontinues significatives pour une arrivée en retard au travail, ce qui suggère que la nature et l'ampleur des discontinuités devront faire l'objet d'autres recherches plus approfondies.

Nous pouvons faire deux remarques sur les hypothèses sous-jacentes aux propositions EXIST-M et UNIQUE-M. La première est qu'aucune restriction n'est requise sur la distribution par types d'individus. La seconde est que les hypothèses sont suffisantes, mais pas nécessaires. Les équilibres pourraient exister même si les hypothèses n'étaient pas vérifiées pour tous les usagers. En particulier, ceci est vrai pour l'hypothèse DM4 pour l'exemple considéré dans la section 4. Ceci est dû essentiellement au fait qu'un individu donné pourrait choisir de ne pas se déplacer à une certaine heure si ses préférences découlent d'un comportement irrationnel.

Lorsqu'un NTE existe pour le matin, le taux de départ à l'équilibre peut être déterminé de la façon suivante. Défini en fonction de l'heure de départ, le coût de déplacement d'un individu s'écrit :  $C(t) = \alpha q(t) + D_M [t + q(t) - t^*]$  où  $q(t)$  est le temps d'attente dans la file étant donnée l'heure de départ  $t$ . Si  $t$  est une heure de départ qui minimise les coûts de cet individu, et si la dérivée  $D'_M$  est bien définie, alors  $C(t)$  doit être stationnaire en  $t$  :

$$\frac{dC(t)}{dt} = (\alpha + D'_M) \frac{dq}{dt} + D'_M = 0 \quad (1).$$

Si  $R(t)$  représente les départs du domicile cumulés, et  $A(t)$  les arrivées au travail cumulées,  $q(t)$  peut alors s'écrire :

$$q(t) = \frac{R(t) - A(t)}{s} = \frac{R(t) - s(t - t_0)}{s} \quad (2),$$

où  $t_0$  est l'heure à laquelle la file d'attente commence. En substituant l'expression de  $q(t)$  de (2) dans (1), le taux de départ à l'équilibre peut s'écrire :

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\alpha}{\alpha + D'_M} s = \frac{1}{1 + D'_M / \alpha} s \quad (3).$$

Sous l'hypothèse DM4, ce taux de départ est positif et fini. Le ratio  $|D'_M / \alpha|$ , qui représente le rapport de la désutilité marginale du déshorage à la désutilité marginale du temps de trajet, peut être défini comme le temps d'attente dans la file toléré pour le matin.

### 3.2 Existence et unicité d'un équilibre sans tarification pour le soir

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le trajet domicile-travail du soir n'a reçu qu'une faible attention dans la littérature. Fargier ([7]) prouve qu'il existe un unique NTE dans le cas où les usagers ont des fonctions de coûts de déshorage linéaires identiques et ne diffèrent que dans le respect de leurs heures de départ préférées. Dès lors, il apparaît que les résultats généraux d'existence et d'unicité pour le matin (tirés de [13]) peuvent se transposer au soir grâce à des changements mineurs, comme le sont les suivants. Les hypothèses DM1 à DM5 pour le matin sont remplacées par :

**Hypothèse DE1**  $\lim_{\Delta x \downarrow 0} D_E[x + \Delta x] - D_E[x] \geq 0$  pour tout  $x$ .

**Hypothèse DE1'**  $D_E[\cdot]$  est continue.

**Hypothèse DE2**  $D_E[0] = 0$ ,  $D_E[x] \geq 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

**Hypothèse DE3**  $D_E[x] < \infty$  pour  $|x| < \infty$ .

**Hypothèse DE4**  $\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{D_E[x + \Delta x] - D_E[x]}{\Delta x} < \alpha$  pour tout  $x$ .

**Hypothèse DE5**  $D_E[x] = \begin{cases} -bx & \text{pour } x \leq 0 \\ cx & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

Du côté de l'offre,  $\bar{T}$  est défini comme l'ensemble des heures de départ possibles, et doit satisfaire les hypothèses suivantes :

**Hypothèse TE1**  $|\bar{T}| < \infty$ .

**Hypothèse TE2**  $|\bar{T}| > N / s$ .

**Hypothèse TE3**  $\bar{T}$  est un ensemble connexe qui ne restreint pas le début ou la fin de la période des départs à l'équilibre.

Ensuite, les propositions du soir correspondant aux propositions EXIST-M et UNIQUE-M du matin sont :

**Proposition EXIST-E** : Sous les hypothèses DE1, DE2, DE3, TE1 et TE3, il existe un NTE pour le soir dans lequel le taux de départ agrégé est fini.

**Proposition UNIQUE-E** : Sous les hypothèses DE1', DE2, DE3, TE1 et TE3, il existe un NTE pour le soir dans lequel le taux de départ agrégé est fini et unique, et le coût de déplacement pour chaque individu est unique.

Les propositions EXIST-E et UNIQUE-E peuvent être prouvées par la même approche que celle utilisée pour le matin dans l'ouvrage [13]. (Les preuves, que nous avons jugées trop volumineuses, sont disponibles sur demande auprès des auteurs).

Les hypothèses sur  $D_E[\cdot]$  pour la proposition EXIST-E diffèrent des hypothèses sur  $D_M[\cdot]$  pour la proposition EXIST-M selon deux aspects. Le premier est la contrepartie pour le soir de l'hypothèse DM4 : l'hypothèse DE4 n'est pas nécessaire. Le second est que l'hypothèse DE1 (nécessaire pour le soir) n'est pas équivalente à l'hypothèse DM1 (nécessaire pour le matin). L'hypothèse DE1 admet une discontinuité à droite de  $D_E[\cdot]$  sans imposer de semi-continuité à droite ou à gauche. Aussi, contrairement à l'hypothèse DM4, l'hypothèse DE1 ne restreint pas le taux de décroissance de  $D_E[\cdot]$  bien que  $D_E[\cdot]$  soit continue. Cependant DE1 ne prévoit pas de discontinuité à gauche de  $D_E[\cdot]$ . Il y aura une discontinuité à gauche s'il y a des

pénalités discontinues pour un départ trop tôt du travail, ce qui pourrait être le cas dans certaines entreprises. Ainsi, les résultats empiriques doivent démontrer clairement si les conditions requises sur  $D_E[\cdot]$  pour l'existence d'un NTE pour le soir ont lieu d'être plus ou moins restrictives que les conditions requises sur  $D_M[\cdot]$  pour le matin.

L'hypothèse DE4 mérite de plus amples explications. Elle stipule qu'un usager préfère (en terme de coûts) partir une minute plus tard du travail que de passer une minute dans la file d'attente. Si ce n'est pas le cas, c'est que l'individu en question n'est jamais parti en retard. Cependant, ceci n'exclut pas un NTE avec un taux de départ fini. Il n'existe que peu de recherches empiriques concernant les trajets domicile-travail du soir qui pourraient nous aider à tester la validité de l'hypothèse DE4, ou de façon plus certaine les autres hypothèses sur  $D_E[\cdot]$ . Grâce à DE4 on peut noter que le temps perdu impliqué par un départ en retard du travail pourrait servir à des activités telles que la lecture ou les courses sur ou près du lieu de travail.

Dans le but de faciliter la comparaison analytique du matin et du soir il sera supposé dans la section 4 que les hypothèses DE4 et DE5 sont liées l'une à l'autre pour le soir. Leur union implique donc que  $c < \alpha$ . Pour maintenir la symétrie entre le matin et le soir, on supposera que la même valeur de  $\alpha$  sera appliquée au déplacement du matin et du soir, et aussi que  $b = \gamma$  et  $c = \beta$ . Ces hypothèses sont formalisées ci-dessous :

**Hypothèse DM-E**  $D_M[\cdot]$  satisfait l'hypothèse DM5, et  $D_E[\cdot]$  satisfait l'hypothèse DE5, avec  $b = \gamma$  et  $c = \beta < \alpha$ .

Si un NTE existe pour le soir, le taux de départ à l'équilibre peut être déterminé de la même façon que pour le matin. Le coût de trajet est  $C(t) = \alpha q(t) + D_E[t - t^*]$ . La contrepartie à l'équation (1) est :

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha \frac{dq}{dt} + D'_E = 0,$$

et la contrepartie à l'équation (3) est :

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\alpha - D'_E}{\alpha} s = \left(1 - \frac{D'_E}{\alpha}\right) s \quad (4).$$



Grâce à l'hypothèse DE4, on sait que le taux de départ est positif si  $D'_E < \alpha$ . Si  $D'_E \geq \alpha$ , alors le taux de départ est nul. Le ratio  $|D'_E / \alpha|$  sera appelé temps d'attente dans la file toléré pour le soir.

## 4. Un exemple

Ni le NTE du matin ni celui du soir ne peut faire l'objet d'une solution analytique si les usagers diffèrent de façon arbitraire quant au respect de leur  $t^*$ , quant à VOT et quant aux fonctions de coûts de déshorage. Une complication vient du fait que l'ordre dans lequel les usagers partent ne peut pas être déterminé *a priori* car cet ordre est gouverné par des influences combinées sur les différences de  $t^*$ , et les différences du temps d'attente dans la file toléré. Une autre complication vient du fait que les équations (3) et (4) ne sont pas vérifiées si les dérivées  $D'_M$  et  $D'_E$  ne sont pas définies, ce qui est le cas pour une fonction de coûts de déshorage linéaire en  $x=0$ . Une autre difficulté est que le NTE du soir peut être caractérisé par des intervalles de temps durant lesquels les usagers quittent leur travail à l'heure plus étendus.

Dans cette section nous étudions un exemple qui illustre chacune de ces difficultés. Cet exemple est développé selon deux scénarii : le premier ne considère comme hétérogène que  $t^*$  ; dans le second, sont à la fois hétérogènes,  $t^*$ , VOT et les coûts de déshorage.

### 4.1 Hétérogénéité des heures de déplacement préférées

Plusieurs auteurs ont étudié les implications de l'hétérogénéité des préférences dans le choix de l'heure d'arrivée pour le matin en supposant une distribution uniforme de  $t^*$ . Nous adoptons cette hypothèse à la fois pour le matin et pour le soir. Afin de faciliter la comparaison, il est aussi supposé que les distributions du matin et du soir sont identiques. Les individus se relaient toutes les neuf heures et veulent quitter leur travail neuf heures après l'heure à laquelle ils ont décidé d'arriver. Cette hypothèse est formalisée comme suit :

**Hypothèse H1** L'heure d'arrivée préférée le matin et l'heure de départ préférée le soir, sont uniformément distribuées dans la population des usagers sur l'intervalle  $[t_0^*, t_e^*]$  avec une densité  $w = \frac{N}{t_e^* - t_0^*}$ .

Des lors que  $w > s$ , les NTE du matin et du soir sont caractérisés par une file d'attente. Le cas d'usagers identiques est obtenu dans le cas limite où  $w = \infty$ .

Le NTE du matin est obtenu de façon directe ; (voir [1], section 3.4C). La première vague de conducteurs arrive au travail en avance, et la deuxième arrive en retard. Un seul conducteur (de valeur zéro) arrive à l'heure, c'est-à-dire au point de transition entre les deux vagues. Pour le soir, deux cas sont envisageables. Le premier, appelé dans notre exemple « heures concentrées », est obtenu si  $s/w < (1 + b/\alpha)^{-1}$ . Comme pour le matin, une première vague de conducteurs part du travail en avance, et une deuxième vague part en retard. Le second cas, appelé « heures dispersées », est obtenu si  $s/w \geq (1 + b/\alpha)^{-1}$ . Dans ce cas, la première vague de conducteurs part à l'heure, et la seconde part en retard. Aucun usager ne part en avance.

Le NTE du matin et les deux NTE du soir ne diffèrent pas seulement dans le modèle de choix des heures de déplacement, mais aussi en termes de coûts totaux. TTC représente les coûts totaux de congestion pure, SDC les coûts totaux de déshorage, et  $TC = TTC + SDC$  les coûts totaux de déplacement. Les formules de coûts sont présentées ci-dessous ; nous avons omis le facteur commun  $N^2 / (2s)$  afin de simplifier la forme de ces expressions :

**Matin :**

$$TTC = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}, \quad SDC = (1 - s/w) \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}, \quad TC = (2 - s/w) \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$$

**Soir : Heures concentrées** ( $s/w < (1 + b/\alpha)^{-1}$ )

$$TTC = \frac{bc}{b+c}, \quad SDC = [1 - (1 + (b/\alpha)(c/\alpha))(s/w)] \frac{bc}{b+c}, \quad TC = [2 - (1 + (b/\alpha)(c/\alpha))(s/w)] \frac{bc}{b+c}$$

**Soir : Heures dispersées** ( $s/w \geq (1 + b/\alpha)^{-1}$ )

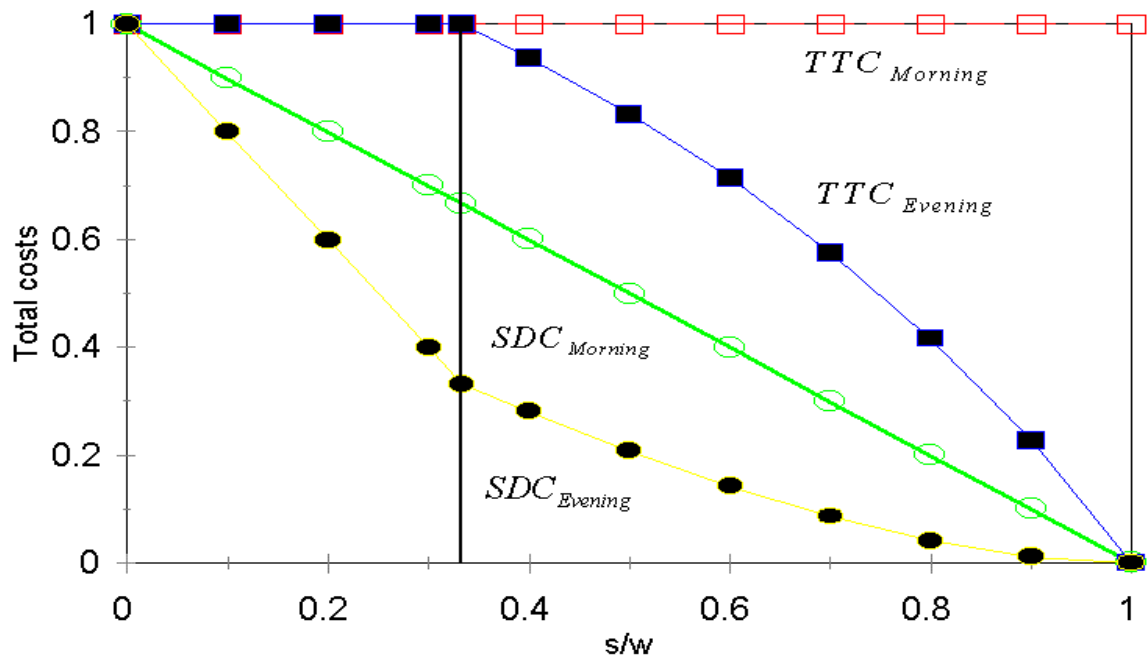
$$TTC = \frac{1 - s/w}{1 - (1 - c/\alpha)(s/w)} c, \quad SDC = \frac{(1 - c/\alpha)(1 - s/w)^2}{1 - (1 - c/\alpha)(s/w)} c, \quad TC = \frac{[1 + (1 - c/\alpha)(1 - s/w)](1 - s/w)}{1 - (1 - c/\alpha)(s/w)} c$$

---

Pour le matin, les TTC sont les mêmes que dans le cas d'utilisateurs identiques, mais les SDC sont réduits par la fraction  $s/w$ . La flexibilité des horaires de travail n'est donc avantageuse que du fait de la baisse des coûts totaux de déshorage. La même chose est vraie pour le soir dans le cas des heures concentrées, bien que la réduction des SDC soit proportionnellement plus grande que  $s/w$ . Au contraire, avec des heures dispersées, les TTC et les SDC sont des fonctions décroissantes de  $s/w$ .

Afin de mettre en évidence la différence entre le matin et le soir, il est nécessaire de choisir des valeurs numériques vraisemblables pour le temps d'attente dans la file toléré. Basées sur les travaux de Small ([15, tableau 1]) et des études littéraires ([2] et [14]), les estimations représentatives pour le matin sont  $\beta/\alpha = 0.5$  et  $\gamma/\alpha = 2$ . Étant donnée l'hypothèse DM-E, il s'ensuit que  $b/\alpha = 2$  et  $c/\alpha = 0.5$ . En utilisant ces valeurs des paramètres, nous pouvons voir dans la figure 1 que le temps de trajet total et les coûts totaux de déshorage varient dans le sens opposé à  $s/w$ ; ici encore nous avons normalisé le facteur commun  $N^2/(2s)$  à zéro. Les deux courbes des TTC et des SDC du soir se situent en dessous de leurs courbes respectives du matin.

Les avantages de la flexibilité des horaires de travail peuvent être déduits de l'étude de la figure 1 ci-après.

FIGURE 1 Coûts de déplacement comparés au NTE (seul  $t^*$  est hétérogène).

Pour le matin, le bénéfice marginal reste constant tant que  $s/w$  augmente vers 1 car les TTC ne varient pas, et les SDC diminuent à un taux constant. A  $s/w=1$ , le bénéfice marginal est infini car il n'y a plus de congestion et les TTC sont par conséquent nuls. (L'article [5] décrit ce comportement). Pour le soir, le bénéfice marginal présente un comportement plus complexe. Il commence à un niveau plus haut que le matin (les valeurs des paramètres choisies sont deux fois plus grandes), diminue doucement à partir du point de transition entre les heures concentrées et les heures dispersées ( $s/w=(1+b/\alpha)^{-1}=1/3$ ), puis augmente fortement lorsque  $s/w=1$ . Bien que très simple, cet exemple suggère que l'analyse en termes de coûts-bénéfices d'un programme de flexibilité des horaires de travail pourrait éliminer deux difficultés.

Premièrement, les pics du matin et du soir pourraient être analysés séparément du fait de leurs différences.

Deuxièmement, comme le bénéfice marginal dû à la flexibilité des horaires de travail ne montre pas des coûts marginaux décroissants dans chacun des pics, la méthode d'optimisation locale ne pourrait pas permettre la détermination d'un optimum global.

#### 4.2 Hétérogénéité des heures de déplacement préférées, de VOT et des coûts de déshorage

Afin d'étendre notre étude au cas d'une hétérogénéité générale, des hypothèses sont nécessaires concernant la distribution des fréquences conjointes des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $t^*$  pour le matin, ainsi que  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$  et  $t^*$  pour le soir. De ce fait, nous adoptons l'hypothèse DM-E ainsi que les quatre hypothèses suivantes :

**Hypothèse H2**      Tous les usagers ont la même valeur de  $\gamma / \beta$  et la même valeur de  $c / b$ .

**Hypothèse H3**       $\alpha$  et  $\beta$  sont distribués indépendamment de  $t^*$  pour le matin, et  $\alpha$  et  $b$  sont distribués indépendamment de  $t^*$  pour le soir.

**Hypothèse H4**      VOT est distribuée selon une fonction log-normale pour le matin et le soir :  $\ln \alpha \sim N(A, \sigma)$ .

**Hypothèse H5**      Pour le matin  $\beta = \beta_0 \alpha^\lambda$ , où  $\beta_0 > 0$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Pour le soir  $b = b_0 \alpha^\lambda$ , où  $b_0 > 0$ .

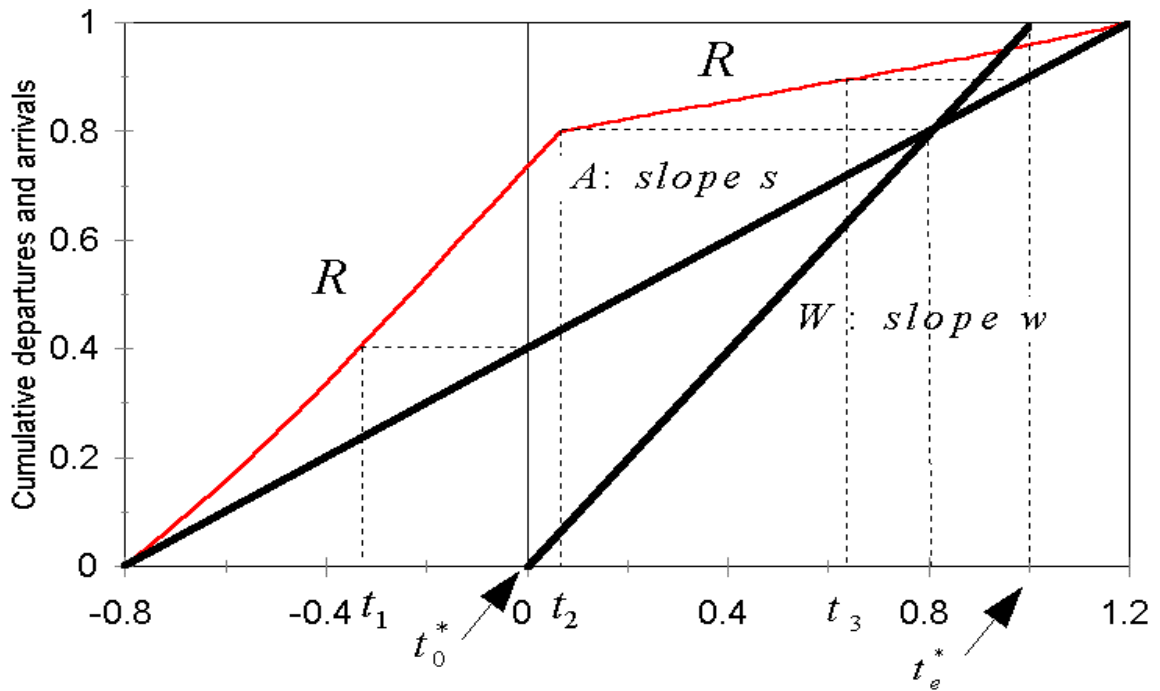
Les hypothèses H2 et H3 sont dues à Newell ([18]). L'hypothèse H4 est adoptée dans plusieurs études empiriques, dont les études [19] et [20]. Les hypothèses H2 et H5, considérées ensemble, réduisent à une dimension l'hétérogénéité des valeurs du temps et des coûts de déshorage.

Malgré ces hypothèses simplificatrices, le NTE doit être estimé numériquement afin que des valeurs soient affectées aux paramètres. Comme dans la section 4.1, il sera supposé que  $\gamma/\beta=4$  et  $c/b=1/4$ . Deux études récentes fournissent une évidence sur le paramètre  $\sigma$  de la distribution log-normale dans l'hypothèse H4. Pour les automobilistes durant le pic du matin à Paris, de Palma et Fontan ([20]) ont obtenu un bon ajustement avec  $\sigma=0.8$ . Une valeur similaire est obtenue par calibration d'une distribution log-normale tronquée à l'aide d'une distribution de VOT obtenue par une étude sur les conducteurs lors du pic du matin à Randstad en Hollande. Cette étude est présentée dans [21]. Nous retiendrons ici une valeur moyenne de  $\sigma=0.5$ . Le paramètre  $A$  de la distribution log-normale a été choisi pour donner un sens à un VOT de \$10/hr. Pour éviter certaines difficultés dues à une intégration numérique, la distribution log-normale a été tronquée à 1% et 99%. Ceci résulte en une valeur moyenne tronquée de 9,83 dollars/heure dans un intervalle [2,76 \$, 28,24 \$].

Le paramètre  $\lambda$  dans l'hypothèse H5 détermine la corrélation dans la population entre VOT et les coûts de déshorage unitaires. Avec  $\lambda=0$  il y a hétérogénéité du temps d'attente dans la file toléré, mais ni de  $\beta$  ni de  $b$ . Avec  $\lambda=1$ , il y a hétérogénéité de  $\beta$  et de  $b$ , mais pas du temps d'attente dans la file toléré. Etant donné le manque de données empiriques désagrégées sur lesquelles nous pourrions nous baser, nous avons décidé de choisir une valeur médiane pour  $\lambda$  soit  $\lambda=0.5$ . Les paramètres  $\beta_0$  et  $b_0$  ont été ensuite choisis pour que, comme dans la section 4.1, la valeur médiane de  $\beta/\alpha$  soit 0.5, et que celle de  $b/\alpha$  soit 2. On suppose que l'intervalle de  $t^*$  est  $[t_0^*, t_e^*]=[0,1]$ . Le nombre d'utilisateurs est normalisé à l'unité ( $N=1$ ) ce qui implique que  $w=1$ . (Ce choix sur  $N$  n'affecte pas la proportion des différences entre le matin et le soir). Finalement, la capacité du goulot d'étranglement est  $s=0.5$  pour que  $N/s=2$  et que les pics du matin et du soir durent chacun deux heures.

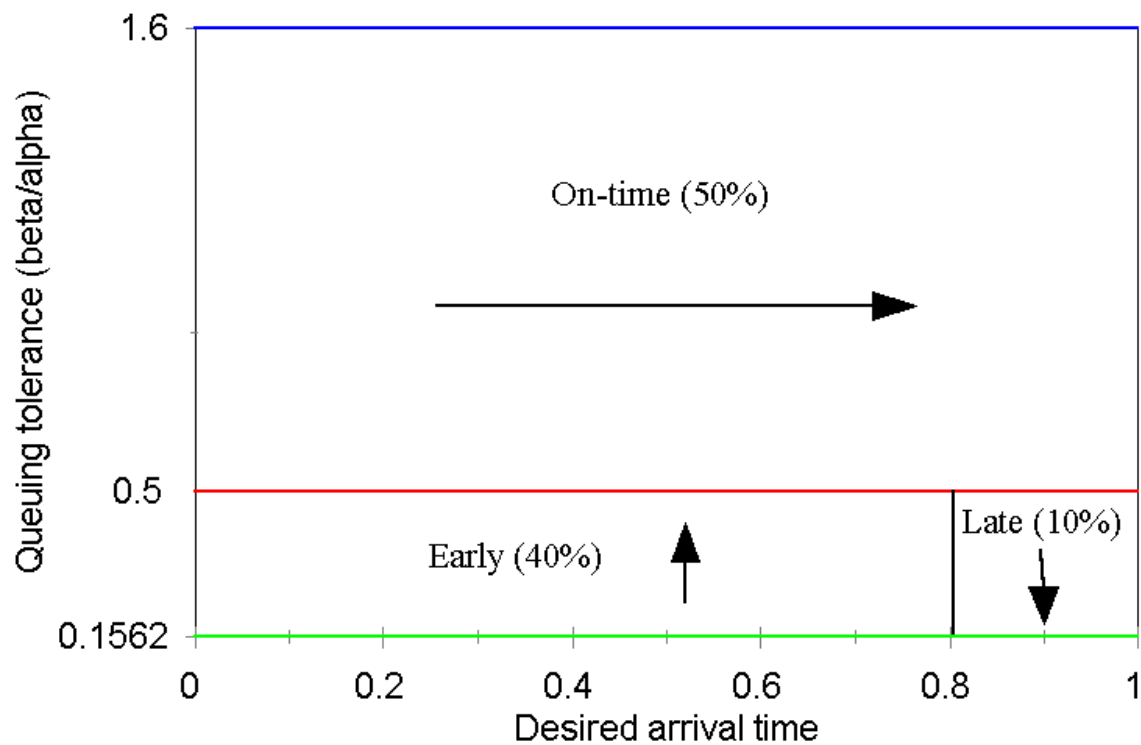
Le NTE du matin obtenu à partir de ces valeurs des paramètres est représenté sur la figure 2 par un histogramme.

FIGURE 2 NTE du matin (hétérogénéité générale).



Les départs cumulés (cumulative departures) sont représentés par une courbe  $R$ , les arrivées cumulées (cumulative arrivals) par une courbe  $A$ , et les heures d'arrivée préférées cumulées par une courbe  $W$ . Les courbes  $A$  et  $W$  sont toutes les deux représentées en traits gras. Le temps d'attente total dans la file est mesuré par l'aire entre  $R$  et  $A$ , et les délais totaux de déshorloge par l'aire des deux triangles entre  $A$  et  $W$ . Les départs débutent à  $t_0 = -0.8$ . Les usagers partent suivant trois vagues comme décrit dans la figure 3.

FIGURE 3 Ordre des départs, NTE du matin (hétérogénéité générale).



Durant la période  $(t_0, t_1)$  la première vague d'utilisateurs, dont les heures d'arrivée préférées (desired arrival time) sont comprises entre  $t_0^* = 0$  et  $t_1^* = 0.8$ , part. Ces individus, qui représentent 40% de la population totale, partent par ordre de temps d'attente dans la file tolérée (queuing tolerance) croissant et arrive au travail en avance. Le taux de départ, donné par l'équation (3), est  $(1 - \beta / \alpha)^{-1} s$ , avec  $\beta / \alpha$  égal à celui des individus partant à ce moment. La seconde vague d'utilisateurs, dont le temps d'attente dans la file tolérée est supérieur à  $s/w = 0.5$  de la distribution et qui par conséquent représente la moitié de la population, part pendant  $(t_1, t_3)$  et arrive à l'heure. Pendant  $(t_1, t_2)$ , le taux de départ reste constant à



$(1 - F^{-1}(1 - s/w))^{-1} s$ , où  $F(\cdot)$  est la distribution des fréquences conjointes de  $\beta/\alpha$ . Les individus avec un temps d'attente dans la file toléré supérieur à ce niveau seuil préfèrent strictement arriver à leur  $t^*$  plutôt que d'arriver en avance ou en retard. L'équation (3) ne peut pas être appliquée à ces individus. De plus, pour certains de ces individus  $\beta/\alpha > 1$ , et donc l'hypothèse DM4 n'est pas retenue pour eux.

Néanmoins, un NTE bien défini existe. Pendant  $(t_2, t_3)$  le taux de départ reste constant à  $(1 + (\gamma/\beta)F^{-1}(1 - s/w))^{-1} s$ .

La dernière vague comprend les usagers qui préfèrent arriver entre  $t^* = 0.8$  et  $t_e^* = 1$ , et qui arrive en retard par ordre de temps d'attente dans la file décroissant. Les départs durant cette période surviennent au taux  $(1 + \gamma/\alpha)^{-1} s$ . Comme il l'est signalé au début de la section 4, l'ordre des départs à l'intérieur du pic total est déterminé par la combinaison des heures préférées d'arrivée et du temps d'attente dans la file toléré.

Les figures 4 et 5 décrivent le NTE du soir.

FIGURE 4 NTE du soir (hétérogénéité générale).

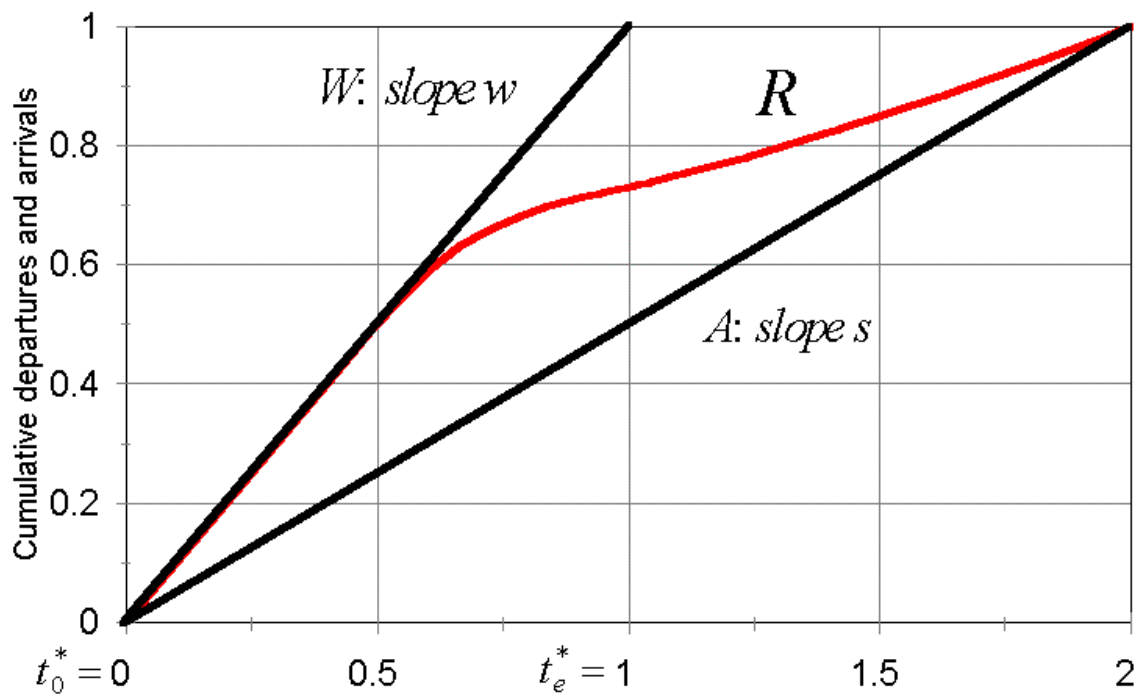
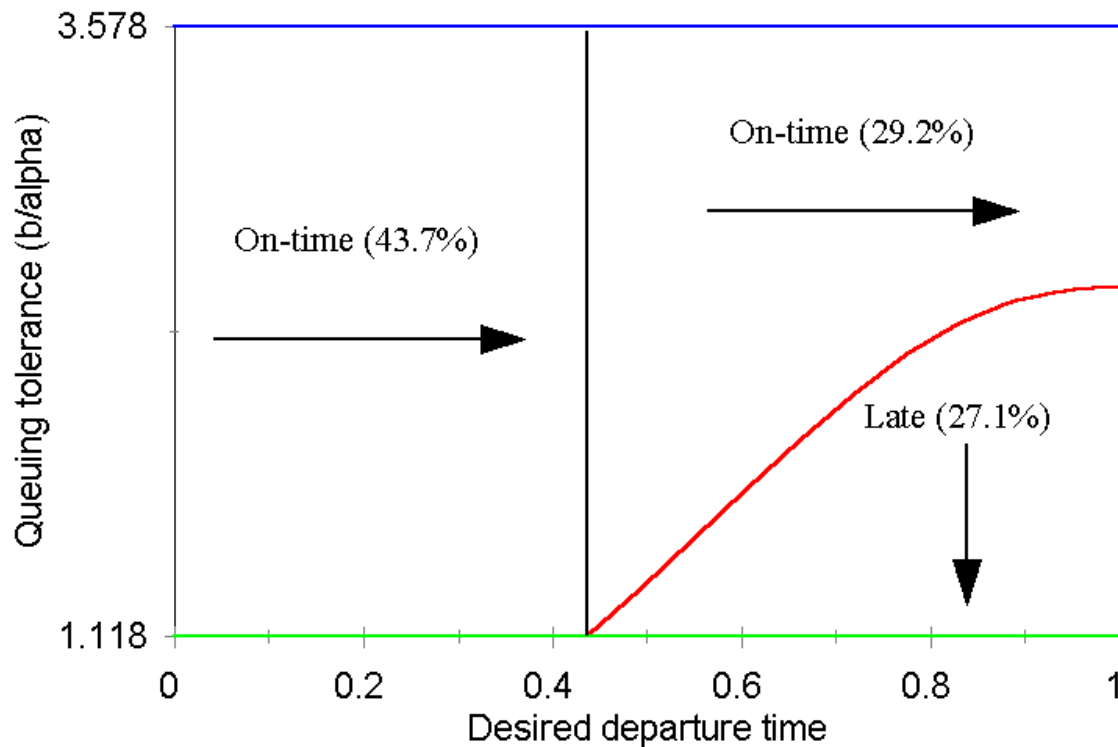


FIGURE 5 Ordre des départs, NTE du soir (hétérogénéité générale).



Une similitude avec le NTE de la section 4.1 avec  $s/w=0.5$ , est qu'il n'y a aucun départ en avance. Il y a encore trois vagues, mais ces vagues sont qualitativement différentes de celles du matin. Dans la première vague, tous les individus qui ont des heures de départ préférées comprises entre  $t_0^*=0$  et  $t^* \approx 0.437$  partent par ordre de  $t^*$  croissant. Le taux de départ durant cette période est  $w$ . La seconde vague part à l'heure aussi par ordre de  $t^*$  croissant, mais à un taux plus lent car seuls les usagers avec des temps d'attente dans la file tolérés progressivement plus hauts partent. Finalement, la troisième vague part en retard par ordre de temps d'attente dans la file toléré décroissant. Durant cette dernière période le taux de départ, qui est donné par l'équation (4), est  $(1 - c/\alpha)s$  et augmente lentement.

Cet exemple numérique met en évidence certaines différences entre le matin et le soir. Le soir est-il le symétrique du matin, comme semble le supposer implicitement la littérature. Le modèle des départs en serait l'exemple dans les figures 2 et 3. Dans la première vague, 10% de la population partirait en avance, dans la seconde vague 50% partirait à l'heure, et dans la dernière vague 40% partirait en retard. Le modèle des départs effectifs pour le soir est légèrement différent car il n'y a aucun départ en avance et seulement 27.1% au lieu de 40% départ en retard.

Une comparaison des coûts totaux agrégés est aussi instructive. Pour le matin,  $TTC=0.6910$ ,  $SDC=0.6345$ , et  $TC=1.3255$ . Pour le soir,  $TTC=0.7330$ ,  $SDC=0.3085$ , et  $TC=1.0417$ . Les coûts totaux de déplacement sont similaires, mais les coûts de déshorage pour le soir sont inférieurs de moitié à ceux du matin. Cette différence a eu des implications sur les gains potentiels d'efficacité issus des prix à la congestion et l'amplitude des revenus de la tarification, qui sont couramment sous-estimés par les auteurs. Le NTE a été aussi estimé pour un intervalle différent des valeurs des paramètres avec des résultats sensiblement similaires. Par exemple, l'augmentation du paramètre  $\sigma$  de 0.5 à 1.0 en plus d'amplifier le degré d'hétérogénéité de VOT et des coûts de déshorage augmente la différence des TTC, et réduit la différence des SDC, tout en laissant les ordres de grandeur inchangés. Ces résultats et d'autres sont disponibles sur demande.

## 5. Conclusion

Ce chapitre fournit une analyse théorique relativement générale des pics du matin et du soir dus au trajets domicile-travail en utilisant un modèle de type goulot d'étranglement. L'accent a été mis sur l'hétérogénéité des individus et les ressemblances et différences entre les deux pics. Les équilibres sans tarification (NTE) existent et sont uniques pour ces deux pics sous des hypothèses relativement générales concernant les préférences de déshorage, et sans aucune restriction sur le degré d'hétérogénéité des usagers. Les hypothèses pour l'existence d'un NTE sont différentes pour le matin et le soir si l'on veut respecter la continuité et la pente des fonctions de coûts de déshorage. Les preuves empiriques étant limitées et diverses, on ne peut pas dire si ces conditions ont lieu d'être satisfaites pour une population d'usagers donnée.

---

La différence entre le NTE du matin et celui du soir est sensible à l'hétérogénéité des usagers. Avec des individus identiques, les deux NTE sont semblables dans le sens où, étant donné le même nombre d'usagers et un déshorage équivalent, les deux pics se basent sur le même modèle de temps d'attente dans la file, ont les mêmes coûts de trajet agrégés et les mêmes coûts de déshorage. Cependant si les usagers ne sont pas identiques, la symétrie entre le matin et le soir n'est plus vérifiée. Avec une hétérogénéité suffisante des heures de déplacement préférées, beaucoup d'individus peuvent partir à l'heure le soir, mais aucun ne part en avance. Dès lors qu'une hétérogénéité des coûts de temps de trajet et de déshorage est introduite, des périodes pendant lesquelles les usagers arrivent à l'heure ressortent aussi pour le matin. Cependant les différences significatives entre les coûts de déplacement agrégés du matin et ceux du soir persistent.

Les quelques limites de cette analyse devront être relâchées dans une prochaine étude. Premièrement, la relation qui existe entre les déplacements du soir et du matin est ignorée hormis une hypothèse qui suppose que les individus préfèrent quitter leur travail après un nombre d'heures fixe à partir de l'heure à laquelle ils sont arrivés. En réalité, les déplacements domicile-travail du matin et du soir (tout comme les pics plus généralement) sont liés par les décisions des individus concernant la façon d'allouer leur temps compte tenu de leurs activités. La forme de la fonction de coûts de déshorage du matin dépend des coûts dus au fait de changer d'heure d'arrivée car ce changement est conditionné à une réoptimisation de l'ensemble et de l'ordre des autres activités du reste de la journée. Wang ([22]) poursuit actuellement une étude empirique intéressante qui exploite cette idée. En effet, l'heure d'arrivée au travail peut affecter la somme des heures passées au travail et/ou l'heure de départ préférée le soir ([2, p47]).

Deuxièmement, l'analyse est réduite à une seule route dans un réseau de transport. Troisièmement, les arrêts intermédiaires durant le trajet domicile-travail, qui sont particulièrement courants le soir, devraient être pris en compte. Il faudrait donc considérer des trajets pour autres motifs.

Quatrièmement, la capacité des route et/ou la demande n'ont pas été déterminées aléatoirement. La régularité des temps de trajet semble avoir moins d'intérêt le soir que le matin car les contraintes sur l'heure d'arrivée sont moins strictes le soir, et aussi parce que le temps de recherche d'une place de parking n'a pas d'intérêt. D'autre part, comme il l'est spécifié dans l'introduction les taux d'accidents semblent être supérieurs le soir.

---

## Références

- [1] Small, K.A. *Urban Transportation Economics*. Dans J. Lesourne et H. Sonnenschein (eds.), *Fundamentals of Pure and Applied Economics*. Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland, 1992.
- [2] Bates, J. *Time Period Choice Modelling: A Preliminary Review*. Final Report for the Department of Transport - HETA Division, 1996.
- [3] Mahmassani, H.S. Trip Timing. Dans D.A. Hensher et K.J. Button (eds.), *Handbook of Transport Modelling* 1. Elsevier Science, Oxford, 2000, pp. 393-407.
- [4] Hurdle, V.F. Equilibrium Flows on Urban Freeways. *Transportation Science*, Vol. 15, No. 3, 1981, pp. 255-293.
- [5] Vickrey, W.S. Congestion Theory and Transport Investment. *American Economic Review (Papers and Proceedings)*, Vol. 59, 1969, pp. 251-260.
- [6] Vickrey, W.S. Pricing, Metering, and Efficiently Using Urban Transportation Facilities. *Highway Research Record*, Vol. 476, 1973, pp. 36-48.
- [7] Fargier, P.H. Effects of the Choice of Departure Time on Road Traffic Congestion: Theoretical Approach. *Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1983, pp. 223-263.
- [8] Chu, X. Endogenous Trip Scheduling: A Comparison of the Vickrey Approach and the Henderson Approach. *Journal of Urban Economics*, Vol. 37, 1992, pp. 324-343.
- [9] Arnott, R., A. de Palma et R. Lindsey. Recent Developments in the Bottleneck Model. Dans K.J. Button et E.T. Verhoef (eds.), *Road Pricing, Traffic Congestion and the Environment: Issues of Efficiency and Social Feasibility*. Edward Elgar, Aldershot, 1998, pp. 79-110.
- [10] Emmerink, R.H.M. et P. van Beek. Empirical Analysis of the Work Schedule Flexibility. *Urban Studies*, Vol. 34, No. 2, 1997, pp. 217-234.
- [11] Smith, M.J. The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck. *Transportation Science*, Vol. 18, No. 4, 1984, pp. 385-394.
- [12] Daganzo, C.F. The Uniqueness of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck. *Transportation Science*, Vol. 19, No. 1, 1985, pp. 29-37.
- [13] Lindsey, R. Existence, Uniqueness, and Trip Cost Function Properties of User Equilibrium in the Bottleneck Model with Multiple User Classes. University of Alberta, working paper, 2001.

- 
- [14] Noland, R. B. et J.W. Polak. *Travel Time Variability: A Review of Theoretical and Empirical Issues*. Centre for Transport Studies, Department of Civil and Environmental Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2000.
- [15] Small, K.A. The Scheduling of Consumer Activities: Work Trips. *American Economic Review*, Vol. 72, No. 3, 1982, pp. 467-479.
- [16] Noland, R.B., K.A. Small, P.M. Koskenoja et X. Chu. Simulating Travel Reliability. *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 28, No. 5, 1998, pp. 535-564.
- [17] Small, K.A., R.B. Noland, X. Chu et D. Lewis. Valuation of Travel-Time Savings and Unpredictability in Congested Conditions for Highway User-Cost Estimation. NCHRP Report 431, TRB, National Research Council, Washington, D.C., 1999.
- [18] Newell, G.F. The Morning Commute for Nonidentical Travelers. *Transportation Science*, Vol. 21, No. 2, 1987, pp. 74-88.
- [19] Ben-Akiva, M., D. Bolduc et M. Bradley. Estimation of Travel Choice Models with Randomly Distributed Values of Time. Dans *Transportation Research Record* 1413, TRB, National Research Council, Washington, D.C., 1993, pp. 88-97.
- [20] De Palma, A. et C. Fontan. Mode Choice and Values of Time in Paris Area. THEMA, Université de Cergy-Pontoise, 2001.
- [21] Verhoef, E.T., P. Nijkamp et P. Rietveld. The Social Feasibility of Road Pricing: A Case Study for the Randstad Area. *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 31, No. 3, 1997, pp. 255-276.
- [22] Wang, J.J. Timing Utility of Daily Activities and its Impact on Travel. *Transportation Research A*, Vol. 30A, No. 3, 1996, pp. 189-206.

## Chapitre 4

# Choix d'horaire et demande élastique



## Introduction

La description du choix modal a fait l'objet d'une littérature considérable dans le champ des transports, tant du point de vue empirique que du point de vue théorique. Néanmoins, à notre connaissance, aucun article théorique n'a intégré de manière formelle et logique le choix modal et celui de la composante horaire. Pourtant, il est banal d'entendre les usagers récriminer contre des horaires qui ne sont pas adaptés à leurs besoins et justifier par ce fait l'utilisation de leur véhicule individuel. Pour comprendre les incitations des compagnies de transports en commun à proposer des horaires adaptés à la demande, il est nécessaire tout d'abord de mettre en oeuvre un cadre théorique cohérent, ce qui constitue précisément le but du présent chapitre.

Nous nous plaçons ici dans un cas simplifié pour lequel les transports individuels ne sont pas sujets à la congestion. Nous considérons l'équilibre compétitif et ensuite l'optimum social.

Le but de cette section est d'introduire l'élasticité de la demande dans les modèles de choix d'horaires. Nous envisageons deux types de formulations.

Dans la première, la demande individuelle est élastique : les usagers optent pour le moyen de transport dont le coût généralisé est le plus petit et l'utilisent avec une fréquence (par exemple mesurée par le nombre de voyages par semaine) qui dépend du prix et de leurs besoins. Dans la seconde formulation, les usagers décident d'utiliser les transports en commun plutôt que les transports individuels en fonction du coût généralisé des transports en commun. En d'autres termes, les usagers sont censés choisir d'abord d'utiliser ou non les transports en commun. S'ils désirent utiliser les transports en commun, ils doivent ensuite choisir l'horaire le mieux adapté à leur demande.

On peut comprendre ces deux approches de la manière suivante : dans le premier cas (demande individuelle élastique) les individus n'ont accès qu'à un seul moyen de transport (les transports en commun) et ils décident de l'utiliser plus ou moins fréquemment en fonction de son prix et de leurs impératifs personnels. Dans le second cas, ils ont accès à deux moyens de transport et décident d'utiliser le transport en commun si (a) il n'est pas trop onéreux et (b) si les pénalités dues aux avances ou aux retards ne sont pas trop élevées.

Nous avons vu, dans le cas des transports individuels, que les coûts de deshorage jouaient un rôle très important puisque ceux-ci représentent environ 30% du coût généralisé. Cette constatation est robuste car elle résulte à la fois de nos analyses théoriques, de nos études empiriques et de nos résultats de simulation. Dans les développements qui vont suivre, nous nous poserons la même question : que représente la part des coûts de deshorage dans le coût généralisé auquel fait face l'utilisateur? Nous prendrons en considération deux types de situation : d'une part l'optimum social et de l'autre le cas d'une concurrence en prix. Nous considérons pour ce faire un marché fragmenté, c'est-à-dire, un marché pour lequel les compagnies ne possèdent qu'un moyen de transport. Ceci correspond à une situation très compétitive, bien évidemment.

Dans la section 2 nous introduisons le modèle de choix d'horaire avec élasticité individuelle de la demande. Nous calculons deux éléments : les horaires optimaux et le niveau optimal des prix. Dans la section 3, nous considérons un équilibre concurrentiel en prix dans lequel chaque entreprise de bus est en concurrence avec toutes les autres entreprises. Nous pouvons, dans le cas symétrique, obtenir des formules explicites pour les prix et discuter des résultats de statique comparative. Ensuite, dans la section 4, nous considérons la seconde formulation pour l'élasticité de la demande, en considérant un modèle économétrique de

choix modal qui tient explicitement compte de la composante horaire. Le modèle proposé prend en compte l'hétérogénéité de la demande. Dans ce cas, nous décrivons l'impact de l'hétérogénéité et de l'élasticité de la demande sur la détermination des horaires optimaux. Les conclusions sont consignées dans la dernière section.

## 1 Horaires optimaux et tarification optimale

On suppose que les temps de départ idéaux des usagers sont distribués uniformément autour d'un cercle de circonférence unitaire. On suppose que l'utilité conditionnelle indirecte d'un usager qui possède un temps de départ idéal  $t^*$  (les usagers sont repérés par leur temps de départ idéaux) et qui emprunte le bus  $i$  est égale à :

$$V_i(t^*) = Y(t^*) + v(p_i) - D(t^* - T_i) \quad (1)$$

où  $Y(t^*)$  représente le revenu de l'individu en  $t^*$ ,  $v(p_i)$  représente l'utilité conditionnelle indirecte d'un usager,  $p_i$  le prix pratiqué par le bus  $i$  et  $D(t^* - T_i)$  la fonction de pénalité de délai. On utilise la spécification suivante pour la fonction d'utilité indirecte  $v(p_i)$  :

$$v(p_i) = \frac{1 - p_i^{\alpha}}{1 - \alpha}; \text{ avec } \alpha \in [0; 1[ \quad (2)$$

La fonction de demande conditionnelle individuelle pour le bus  $i$  est donnée par l'identité de Roy :

$$x(p_i) = \frac{\partial (V_i(t^*))}{\partial p_i} = -\alpha p_i^{\alpha-1} = -\alpha p_i^{-1} \quad (3)$$

Nous avons traité précédemment le cas de la demande unitaire qui s'obtient avec  $\alpha = 0$  (en effet, dans ce cas  $x(p_i) = 1$  : chaque usager emprunte le bus une fois par unité de temps). Le cas de la demande iso-élastique correspond à  $\alpha = 1$ .

Nous supposons que les fonctions de pénalité sont linéaires par morceau :

$$D(t^* - T_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} (T_i - t^*) & \text{si } t^* < T_i \\ -\frac{1}{2} (t^* - T_i) & \text{si } T_i < t^* \end{cases} \quad (4)$$

On considère pour commencer l'analyse le cas de deux bus. Nous supposons que le premier bus part en  $T_1$  et que le second bus part en  $T_2$ , avec  $0 < T_1 < T_2 < 1$ . On suppose que seuls deux bus sont accessibles dans la journée qui s'étend sur la période  $[0; 1]$ .

Il existe un usager indifférent entre les bus 1 et 2. Son heure de départ idéale (et d'arrivée, si l'on suppose, sans perte de généralité que les temps de trajet à la destination sont nuls) est localisée entre  $T_1$  et  $T_2$ . L'usager indifférent entre les deux bus se trouve en  $t_{1,2}^*$  solution de l'équation suivante :

$$Y(t^*) + v(p_1) - \frac{1}{2} |T_1 - t_{1,2}^*| = Y(t^*) + v(p_2) + \frac{1}{2} |t_{1,2}^* - T_2|$$

Dès lors :

$$t_{1;2}^a = \frac{v(p_1) + T_1 + v(p_2) + T_2}{2} \quad (5)$$

On considère d'abord l'optimum social. Les premiers principes de l'économie impliquent que les prix pratiqués doivent être égaux aux coûts marginaux de production. Si ces coûts marginaux de production sont constants (et nuls, sans perte de généralité) la condition (5) se ramène à :

$$t_{1;2}^a = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad [T_1; T_2]:$$

Les temps de départ optimaux minimisent la somme des coûts de deshorage, ou le coût moyen de deshorage. Si  $n$  bus circulent et si la distribution des temps préférés est uniforme, les horaires optimaux sont donnés par (voir rapport ...nal de l'année 2) :

$$T_i^0 = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n}; \quad i = 1; \dots; n \quad (6)$$

Notons que pour deux compagnies, nous avons par conséquent :  $T_1^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$  et  $T_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$ , de sorte que le nombre de personnes empruntant le bus 1 et en retard est égal à :  $T_1 = D_{1=G} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ , tandis que le nombre d'usagers empruntant le bus 1 et en avance est égal à  $t_{1;2}^a$  ;  $T_1 = D_{1=D} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$ , de sorte que nous avons la relation :

$$D_{1=G} = D_{1=D} \quad (7)$$

Nous verrons par la suite que cette relation est beaucoup plus générale.

Notons que si l'on considère des départs sur 24 heures, les horaires sont toujours donnés par la formule (6).

Le coût moyen de deshorage, lorsque les entreprises optent un horaire optimal (sur le segment  $[0; 1]$  ou dans l'espace des caractéristiques circulaire) est égal à :

$$CMD = \frac{1}{2n}$$

<sup>2</sup> Le coût de deshorage est une fonction décroissante de  $n$ . Nous avons montré à l'aide de simulations avec le logiciel Alexand'Hour que ce résultat restait à peu près correct lorsque la distribution des préférences pour les heures idéales de départ n'était pas uniforme.

<sup>2</sup> Comme attendu, le coût moyen de deshorage décroît avec les paramètres de la fonction de coût de deshorage  $\mu$  et  $\sigma$ .

## 2 Tari...cation d'équilibre

Pour simpli...er l'analyse, on suppose que les bus partent de 0 à 24 heures [0; 1]. Chaque bus est géré par une compagnie indépendante, de sorte que l'on peut décrire la concurrence en prix comme un équilibre de Nash non coopératif en prix. On considère une distribution uniforme des temps désirés de départ, de sorte que l'on restreint l'analyse à des horaires périodiques.

Prenons le cas de la compagnie de bus 1; localisée en 0 sans perte de généralité. On cherche un équilibre en prix symétrique. Soit  $p^*$  le candidat de prix d'équilibre. Pour la compagnie de bus 1 pratiquant un prix  $p_1$ , il existe un usager avec un temps de départ idéal  $t_{1;2}^*$  qui sera indifférent entre le bus localisé en  $T_1 = 0$  et celui localisé en  $T_2$  (avec  $T_2 = 1/n$ ). En utilisant le fait que la compagnie 2 pratique le prix  $p^*$ , nous obtenons :

$$t_{1;2}^* = \frac{v(p_1) + v(p^*)}{v(p_1) + v(p^*)} T_2 \quad (8)$$

L'usager indifférent entre le bus  $n$  (qui part en  $(n-1)/n$  et qui pratique le prix  $p^*$ ) et le bus 1 possède une heure de départ idéale, notée  $t_{n;1}^*$ , donnée par :

$$t_{n;1}^* = \frac{v(p^*) + (n-1)/n + v(p_1) + 1/n}{v(p^*) + v(p_1)}$$

Le nombre d'usagers qui empruntent le bus 1 est égal à :

$$N_1 = t_{1;2}^* + t_{n;1}^*$$

soit :

$$N_1 = \frac{1}{n} + 2 \frac{v(p_1) + v(p^*)}{v(p_1) + v(p^*)}$$

La demande  $D_1$  pour le bus 1 (mesurée par le nombre de voyageurs) est :

$$D_1 = p_1^i N_1 \quad (9)$$

où  $p_1^i$  représente la demande individuelle pour le bus 1 (cf. (3)). Par conséquent, le profit de la compagnie 1 est :  $\pi_1 = p_1 D_1 - F$  où  $F$  représente le coût fixe d'entrée sur le marché et où le coût de production est supposé constant (et nul, pour simplifier les calculs). Nous avons :

$$\pi_1 = p_1^i N_1 - F$$

Notons que (voir (8)) :

$$\frac{dN_1}{dp_1} = \frac{2p_1^i}{v(p_1) + v(p^*)}$$

Au prix d'équilibre symétrique ( $p_1 = p^s$ ),  $N_1 = 1/n$  et la condition du premier ordre s'écrit, à l'équilibre symétrique :

$$\frac{d\pi_1}{dp_1} = (1 - \epsilon) p_1^{\epsilon} \frac{1}{n} - p_1^{1-\epsilon} \frac{2p_1^{\epsilon}}{c} = 0;$$

soit :

$$p^s = \left( \frac{c}{2n} \right)^{1/(1-\epsilon)} \quad (10)$$

L'analyse de la statique comparative des prix d'équilibre est discutée ci-dessous :

<sup>2</sup> Le niveau des prix  $p^s$  diminue avec  $n$ . En effet, la concurrence se fait plus vive si le nombre de compagnies de bus sur le marché est plus important. Lorsque  $n$  augmente, les bénéfices marginaux d'une hausse des prix est plus petit, et par conséquent le niveau des prix d'équilibre est plus bas.

<sup>2</sup> Le niveau des prix  $p^s$  augmente avec  $c$  et avec  $\epsilon$ . En effet, une augmentation des coûts de deshorage tend à diminuer la concurrence puisqu'elle renforce le pouvoir de monopole temporel des entreprises, de sorte que les compagnies de bus peuvent charger des prix plus importants. Par conséquent, des coûts de deshorage plus élevés grèvent doublement les usagers : d'une part leur coûts de deshorage augmentent, puisque les pénalités dues aux arrivées précoces ou tardives augmentent (effet direct). D'autre part, les prix des moyens de transports  $p^s$  augmentent lorsque  $c$  et ou  $\epsilon$  augmentent puisque cette augmentation des coûts renforcent le pouvoir de monopole des compagnies qui en profitent pour augmenter leurs tarifs. Ceci peut aussi expliquer le fait que les compagnies aériennes chargent des prix plus élevés pendant les pics du matin et du soir ou pendant la semaine (versus les weekends de semaine). Ceci serait une conséquence du fait que pendant ces périodes horaires les coûts de deshorage dus aux arrivées précoces (coût d'opportunité au lieu de départ) ou tardives (désagrément d'arriver en retard à une réunion) sont plus élevés et non pas seulement, comme suggéré dans la littérature parce que l'intensité de la demande est plus élevée pendant les pics horaires.

<sup>2</sup> Le niveau des prix  $p^s$  est une fonction décroissante de  $\epsilon$ . Notons que  $\epsilon = -x^j(p_j) p_j / x(p_j)$  de sorte que le paramètre  $\epsilon$  peut s'interpréter comme l'élasticité de la demande individuelle. Par conséquent, si la demande est plus élastique ( $\epsilon$  plus élevé) le niveau des prix, comme attendu, est plus bas. Si  $\epsilon = 0$  (demande inélastique) le prix est maximum:  $p^s = (c + \epsilon) / 2n$ ; par contre si  $\epsilon \rightarrow 1$  (demande isoélastique) alors  $p^s \rightarrow 0$ .

Le profit à l'équilibre est égal à :

$$\pi_1 = (1 - \epsilon) \frac{(c + \epsilon)}{2n^2} F;$$

de sorte que le nombre de compagnies à l'équilibre de libre entrée ( $\pi_1 = 0$ ) est égal à :

$$n^f = \frac{c + \epsilon}{2F} F;$$

Nous avons montré précédemment que le coût moyen de deshorage était égal à :

$$CMD = \frac{\bar{\alpha} + \alpha}{2n}$$

Dans le cas de la demande inélastique, le nombre optimal d'entreprises satisfait :

$$n^0 = \text{ArgMin}_n [CMD + F/n]$$

soit :

$$n^0 = \frac{S}{2F} \frac{\bar{\alpha} + \alpha}{2}$$

Nous avons dans ce cas une demande inélastique ( $\alpha = 0$ ) :

**Proposition 1** Dans le cas de la demande inélastique, le prix d'équilibre, dans un marché compétitif est supérieur ou égal à quatre fois le coût de deshorage.

**Preuve.** Si la demande est inélastique, le prix est égal à :

$$p^a = \frac{\bar{\alpha} + \alpha}{2n}$$

Dans ce cas  $4CMD \cdot p^a = 4 \frac{\bar{\alpha} + \alpha}{2n} \cdot \frac{\bar{\alpha} + \alpha}{2n} = (\bar{\alpha} + \alpha)^2 \frac{1}{n^2} \geq 0$ , ce qui est vérifié. ■

Comme le prix d'équilibre est décroissant en fonction de  $\alpha$ , qu'il est égal à  $(\bar{\alpha} + \alpha)/2n > CMD$  si  $\alpha = 0$  (cf. Proposition (1) et tend vers  $0 < CMD$  lorsque  $\alpha \rightarrow 1$ , il existe une valeur unique de l'élasticité, notée  $\alpha^*$ , telle que le prix d'équilibre  $p^a$  soit égal au coût moyen de deshorage. Cette valeur critique de l'élasticité  $\alpha^*$  satisfait la relation suivante :

$$(\bar{\alpha} + \alpha^*)^2 (2n)^{\alpha^*} = (\bar{\alpha} + \alpha^*)^{2(1 - \alpha^*)}$$

Pour une valeur de  $\bar{\alpha} = 1$  et  $\alpha = 4$ , et pour 10 bus, nous obtenons :  $\alpha^* = 0.41$ . Pour cette valeur de l'élasticité, le coût moyen de deshorage est égal au niveau de prix.

Le problème du monopole public maximisant le surplus social et sujet à des impératifs de rentabilité (problème de Ramsey-Boiteux) peut être étudié d'une manière similaire.

### 3 Choix d'horaire et modèle de choix discret

#### 3.1 Le modèle

On introduit à présent une seconde modélisation de l'élasticité de la demande. Dans le cas traité dans cette section, les individus ont le choix entre un nombre discret de possibilités. L'une d'entre elle est la voiture (ou aller à pied, ou encore rester chez soi).

On considère que la fonction d'utilité indirecte d'un usager  $t^a$  est donnée par :

$$V_i(t^a) = Y(t^a) + v(p_i) + D(t^a | T_i) + \epsilon_{it^a} \quad (11)$$

où la fonction de deshorage est donnée par (4),  $v(p_i)$  est donné par (2). Le paramètre  $\epsilon_{it^a} > 0$  mesure l'intensité des préférences entre le consommateur  $t^a$  et le bus  $i$ .

Si l'utilisateur n'utilise pas les transports en commun, il aura une utilité moyenne directe égale à  $V_0$  et une utilité indirecte :

$$V_0(t^a) = Y(t^a) + V_0 + \epsilon_{0t^a}$$

Supposons que  $\epsilon_{it^a}$  et  $\epsilon_{0t^a}$  sont des variables aléatoires de moyenne nulle, d'écart type unitaire, suivant la distribution exponentielle double. Dans ce cas, la probabilité que l'individu  $t^a$  opte pour le choix  $i$  est donnée par :

$$P_i(t^a) = \frac{\exp[(v(p_i) + D(t^a | T_i)) / \epsilon]}{\sum_{j=1:n} \exp[(v(p_j) + D(t^a | T_j)) / \epsilon] + \exp[(V_0) / \epsilon]}, \quad i = 1; \dots; n:$$

Notons que  $\sum_{i=1:n} P_i(t^a) < 1$  (en effet, la demande est élastique). La probabilité de ne pas emprunter les transports en commun,  $P_0(t^a)$ , est donnée par :

$$P_0(t^a) = 1 - \sum_{i=1:n} P_i(t^a):$$

Pour simplifier les calculs, on suppose que le coût marginal de production,  $c$ , est égal à zéro. A l'optimum de premier rang, les prix sont déterminés de manière optimale de sorte que:  $p_1 = p_2 = c = 0$ . La probabilité de choix s'écrit :

$$P_i(t^a) = \frac{\exp[D(t^a | T_i) / \epsilon]}{\sum_{j=1:n} \exp[D(t^a | T_j) / \epsilon] + V}; \quad i = 1:n: \quad (12)$$

avec  $V = \exp[(V_0 - v(c)) / \epsilon]$ .

Le cas de la demande inélastique s'obtient en considérant la limite  $V_0 \rightarrow 1$  (ou  $V \rightarrow 0$ ). Dans ce cas, les probabilités de choix (12) s'écrivent :

$$P_i(t^a) = \frac{\exp[D(t^a | T_i) / \epsilon]}{\sum_{j=1:n} \exp[D(t^a | T_j) / \epsilon]}$$

et on peut vérifier que  $\sum_{i=1:n} P_i(t^a) = 1$ .

### 3.2 Le cas de deux compagnies de bus

Considérons d'abord le cas d'école de deux bus, l'un partant en  $T_1$  et l'autre en  $T_2$ , avec  $0 < T_1 < T_2 < 1$ . On considère par ailleurs que les temps de départ désirés sont

uniformément distribués sur  $[0; 1]$  et que les fonctions de pénalité sont données par (4). La demande  $D_1$  pour la compagnie de bus 1 est donnée par :

$$D_1(T_1; T_2; V; \cdot; \cdot; \cdot; 1) = D_{1=1} + D_{1=2} + D_{1=3};$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{1=1} &= \int_0^{R_{T_1}} \frac{\exp[(i \cdot (T_{1i} - x)) / \cdot]}{\exp[(i \cdot (T_{1i} - x)) / \cdot] + \exp[(i \cdot (T_{2i} - x)) / \cdot] + V} dx \\ D_{1=2} &= \int_0^{R_{T_2}} \frac{\exp[(i \cdot (x_i - T_1)) / \cdot] + \exp[(i \cdot (T_{2i} - x)) / \cdot] + V}{\exp[(i \cdot (x_i - T_1)) / \cdot]} dx \\ D_{1=3} &= \int_{T_2}^{R_{T_1}} \frac{\exp[(i \cdot (x_i - T_1)) / \cdot] + \exp[(i \cdot (x_i - T_2)) / \cdot] + V}{\exp[(i \cdot (x_i - T_1)) / \cdot] + \exp[(i \cdot (x_i - T_2)) / \cdot]} dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule dite du "logsum" introduite par Moshe Ben-Akiva (1985) et rationalisée par D. McFadden (1975), le surplus des usagers s'écrit :

$$SC(T_1; T_2; V; \cdot; \cdot; \cdot; 1) = v(c) + SC_{1=1} + SC_{1=2} + SC_{1=3}$$

avec :

$$\begin{aligned} SC_{1=1} &= \int_0^{R_{T_1}} \log \left[ \exp \left[ \frac{i \cdot (T_{1i} - x)}{h} \right] + \exp \left[ \frac{i \cdot (T_{2i} - x)}{h} \right] + V \right] dx \\ SC_{1=2} &= \int_0^{R_{T_2}} \log \left[ \exp \left[ \frac{i \cdot (x_i - T_1)}{h} \right] + \exp \left[ \frac{i \cdot (T_{2i} - x)}{h} \right] + V \right] dx \\ SC_{1=3} &= \int_{T_2}^{R_{T_1}} \log \left[ \exp \left[ \frac{i \cdot (x_i - T_1)}{h} \right] + \exp \left[ \frac{i \cdot (x_i - T_2)}{h} \right] + V \right] dx \end{aligned}$$

Nous considérons ci-dessous le calcul des horaires optimaux  $T_1^0$  et  $T_2^0$ . Ces horaires optimaux sont la solution du problème suivant :

$$T_1^0; T_2^0 = \arg \min_{T_1; T_2} SC(T_1; T_2; V; \cdot; \cdot; \cdot; 1)$$

Nous avons pour les conditions du premier ordre (et après simplifications) :

$$\frac{dSC(T_1; T_2; V; \cdot; \cdot; \cdot; 1)}{dT_1} = i \cdot D_{1=1} + \cdot D_{1=2} + \cdot D_{1=3} = 0$$

De même :

$$\frac{dSC(T_1; T_2; V; \cdot; \cdot; \cdot; 1)}{dT_2} = i \cdot D_{2=1} + i \cdot D_{2=2} + \cdot D_{2=3} = 0$$

On introduit la notation suivante :

$$\left( \int_0^{R_{T_1}} P_i(t^a) dt^a \right) \text{ et } \left( \int_0^{R_{T_1}} P_i(t^a) dt^a \right) \text{ et } \left( \int_{T_1}^{R_{T_1}} P_i(t^a) dt^a \right) \text{ et } \left( \int_{T_1}^{R_{T_1}} P_i(t^a) dt^a \right)$$

Les conditions du premier ordre peuvent dans ce cas se réécrire de la manière suivante :



$$\left( \begin{array}{l} \frac{dSC(T_1; T_2; V; \bar{\cdot}; \circ; 1)}{dT_1} = j \circ D_{1=G} + \bar{\cdot} D_{1=D} = 0 \\ \frac{dSC(T_1; T_2; V; \bar{\cdot}; \circ; 1)}{dT_2} = j \circ D_{2=G} + \bar{\cdot} D_{2=D} = 0 \end{array} \right) :$$

Nous montrons dans la proposition 2, que ces conditions sont beaucoup plus générales. Notons que  $T_1^0 = T_1^0(V; \bar{\cdot}; \circ; 1)$ . Lorsque  $V \neq j \cdot 1$ , nous avons le cas de la demande inélastique : la demande individuelle de chaque usager est unitaire. Les horaires optimaux satisfont les conditions suivantes :

2 Si  $\bar{\cdot} \neq 0$ , les horaires optimaux sont:  $T_1^0 = \frac{1}{2} \frac{\bar{\cdot}}{\circ + \bar{\cdot}}$  et  $T_2^0 = \frac{1}{2} \frac{\bar{\cdot}}{1 + \circ + \bar{\cdot}}$ . On retrouve bien évidemment les résultats du modèle avec préférences homogènes, dérivés précédemment. Notons que ce résultat reste vrai pour un nombre quelconque de bus.

2 Notons aussi que lorsque  $\bar{\cdot} \neq 0$ , nous avons  $T_2^0 = T_1^0 + \frac{1}{2}$ . Cette relation de symétrie n'est cependant pas vérifiée lorsque  $\bar{\cdot} > 0$ .

2 Si  $\bar{\cdot} = 1$ , les horaires optimaux satisfont:  $T_1^0 = \frac{\bar{\cdot}}{\circ + \bar{\cdot}}$  et  $T_2^0 = \frac{\bar{\cdot}}{\circ + \bar{\cdot}}$ . En effet, dans ce cas, la probabilité qu'un individu opte pour le bus 1 est la même que celle qu'il opte pour le bus 2. En conséquence, les horaires optimaux sont les mêmes que s'il existait un seul bus sur le marché. Ce résultat reste vrai pour un nombre quelconque de bus. Notons que le fait de mettre plusieurs bus partant au même moment n'est pas inutile d'un point de vue social (le bien-être des usagers augmente en effet en  $\log(n)$ ) puisque les usagers apprécient la variété des services offerts (mesurée par le paramètre  $\bar{\cdot}$ ).

2 Pour des valeurs intermédiaires du paramètre d'hétérogénéité, ( $0 < \bar{\cdot} < 1$ ), on peut montrer que  $\frac{\partial T_1^0(\bar{\cdot}; \circ; 1)}{\partial \bar{\cdot}} > 0$  et que (par symétrie)  $\frac{\partial T_2^0(\bar{\cdot}; \circ; 1)}{\partial \bar{\cdot}} < 0$  : une augmentation du goût pour la variété tend à réduire la dispersion temporelle des horaires.

### 3.3 Le cas de n compagnies de bus - distribution quelconque des préférences

Considérons maintenant le cas plus général de n entreprises de bus et d'une distribution des préférences des temps de départ idéaux notée  $f(x)$ . On suppose aussi que la fonction d'utilité indirecte est donnée par (2), mais que les fonctions  $\bar{\cdot}$  sont absolument continues (mais pas nécessairement distribuées suivant la double exponentielle, comme dans le cas du modèle logit).

Pour économiser les notations, nous envisageons des fonctions de pénalités de deshorage linéaires par morceaux (cf (4)). L'analyse peut facilement être étendue à des fonctions plus générales, par exemples quasi-convexes.

Si les termes d'erreur ( $\bar{\cdot}$ ) sont quelconques, les probabilités de choix s'écrivent :

$$P_i(T; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1) = \text{Pr ob}(V_i(T_i; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1) \leq V_j(T_j; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1)); j \in i; i = 0; \dots; n;$$

avec  $V_i(T_i; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1)$ ,  $i = 1; \dots; n$  donné par (11).

On a de plus  $T = (T_1; \dots; T_n)$  et  $V_0(t^a) = Y(t^a) + V_0 + \bar{\cdot} \frac{1}{\circ + t^a}$ .

Le surplus de l'usager en  $t^a$  est donné (en utilisant le fait qu'il n'y a pas d'effet de revenus) par la formule :

$$sc(T; T_i; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1) = E \max_{i=0; \dots; n} [V_i(T_i; t^a; \bar{\cdot}; \circ; 1)] \quad (13)$$

où  $T = T_i [ T_i ]$ . Notons par  $D_{i=G}$  la demande des usagers en retard, adressée à l'entreprise  $i$  et par  $D_{i=D}$  la demande des usagers en avance, adressée à l'entreprise  $i$  :  $D_i = D_{i=G} + D_{i=D}$ .

$$\begin{pmatrix} D_{i=G} \\ D_{i=D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{T_1}^{R_{T_1}} f(t^a) P_i(t^a) dt^a \\ \int_{T_1}^{R_1} f(t^a) P_i(t^a) dt^a \end{pmatrix} :$$

Cette notation, bien que simple, ne doit pas cacher le fait que la forme fonctionnelle des probabilités de choix,  $P_i(t^a)$  dépend de la région  $fR_j$  à laquelle  $t^a$  appartient ( $t^a \in R_j$  ssi  $T_j \cdot t^a < T_{j+1}$ ,  $j = 0; \dots; n$ , avec  $T_0 = 0$  et  $T_{n+1} = 1$ ). Nous pouvons caractériser la solution de ce que nous appelons le problème de la "n-médiane stochastique asymétrique" de la manière suivante :

Proposition 2 Considérons un modèle stochastique général de choix d'horaire (" $f$  :"). Les horaires optimaux sont caractérisés par la relation suivante :

$$D_{i=G} = D_{i=D}; i = 1; \dots; n: \quad (14)$$

De plus, la fonction de surplus social  $SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)$  est concave en chacune de ses variables:  $\partial^2 SC(T; V; \cdot; \cdot; 1) / \partial T_i^2 > 0$ .

Preuve. La fonction de surplus global, c'est-à-dire pour l'ensemble des usagers est :

$$SC(T; V; \cdot; \cdot; 1) = \int_0^1 f(x) sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1) dt^a;$$

Cette expression peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$SC = \int_0^{T_i} f(x) sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1) dt^a + \int_{T_i}^1 f(x) sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1) dt^a;$$

où  $sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)$  est donné par (13). En utilisant le théorème de Schwartz, nous pouvons permuter le signe d'intégrale et l'opérateur de dérivée. L'intégrand étant dérivable presque partout, l'intégrale existe au sens de Lebesgue. Nous avons :

$$\frac{\partial SC}{\partial T_i} = \int_0^{T_i} f(x) \frac{\partial sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)}{\partial T_i} dt^a + \int_{T_i}^1 f(x) \frac{\partial sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)}{\partial T_i} dt^a;$$

étant donné que  $sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)$  la fonction de surplus locale est continue (en particulier en  $T_i$ ) et dérivable p.p. (Notons que  $sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)$ , la fonction individuelle de coût de deshorage, n'est pas dérivable en un nombre fini de points). En utilisant l'identité de Roy, nous obtenons :

$$\frac{\partial sc(T_i; T_{i+1}; t^a; \cdot; \cdot; 1)}{\partial T_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} P_i(t^a) & \text{si } x < T_i \\ -P_i(t^a) & \text{si } x > T_i \end{cases}$$

La minimisation du surplus total  $SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)$  requiert le calcul de :

$$\frac{\partial SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)}{\partial T_i} = \int_0^{T_i} f(t^a) P_i(t^a) dt^a - \int_{T_i}^1 f(t^a) P_i(t^a) dt^a$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)}{\partial T_i} = \int_0^{T_i} D_{G=i} - \int_{T_i}^1 D_{D=i}$$

La localisation optimale satisfait  $\partial SC(T; V; \cdot; \cdot; 1) / \partial T_i = 0$  (la condition du premier ordre) et par conséquent :

$$\int_0^{T_i} D_{G=i} = \int_{T_i}^1 D_{D=i}$$

La condition du second ordre, pour la variable  $T_i$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)}{(\partial T_i)^2} = \int_0^{T_i} f(t^a) P_i(t^a) [1 - P_i(t^a)] dt^a + \int_{T_i}^1 f(t^a) P_i(t^a) [1 - P_i(t^a)] dt^a > 0$$

■

Notons qu'à la solution candidate (satisfaisant les conditions du premier ordre), les conditions du second ordre s'écrivent plus simplement :

$$\frac{\partial^2 SC(T; V; \cdot; \cdot; 1)}{(\partial T_i)^2} \Big|_{\text{cpo}} = -D_{D=i}(T_i) - \int_0^{T_i} f(t^a) [P_i(t^a)]^2 dt^a - \int_{T_i}^1 f(t^a) [P_i(t^a)]^2 dt^a$$

Cette proposition servira de base pour le calcul des horaires optimaux dans le cas d'une ligne de bus (et plusieurs origines et destinations). L'écriture de l'algorithme et sa mise au point feront l'objet de recherches futures.

La méthode d'optimisation que nous envisageons procède en quatre étapes de la manière suivante :

1. On part d'une condition initiale  $[T_1^0; T_2^0; \dots; T_n^0]$  qui est fournie par la solution du problème déterministe  $\forall i \geq 0$ . Cette solution n'est malheureusement pas toujours unique lorsque la demande est élastique. En effet, dans ce cas il peut exister un continuum de solutions qui donnent lieu néanmoins à la même valeur du coût social.
2. On utilise la condition (14), pour l'entreprise 1, pour recalculer la valeur de  $T_1$ . Ensuite, on utilise la condition (14) pour réoptimiser la valeur de  $T_2$ .
3. On procède de manière itérative jusqu'à l'entreprise  $n$ .
4. On calcul un critère de convergence. Si la valeur de ce critère n'est pas atteinte, la procédure retourne à l'étape 2. Sinon la procédure prend ...n.

## 4 Conclusions

Les compagnies de chemins de fer et de bus se préoccupent de plus en plus de la qualité des services offerts. La situation est similaire, mais différente dans ses spécificités, dans le cas des compagnies aériennes. Notons que ce type d'application n'a pas été envisagé ici: en effet, l'étude des transports aériens ne peut ignorer les contraintes de capacité, omises dans le cadre de cette étude.

Nous avons montré comment introduire conjointement les décisions d'utilisation des transports en commun et les questions relatives aux choix d'horaires. Ces derniers choix sont d'une part effectués par les usagers qui empruntent les moyens de transport en commun et qui aspirent à satisfaire au mieux leurs contraintes horaires, étant donné leurs dispositions à payer. D'autre part, ils concernent les entreprises, privées ou publiques, de transport en commun qui désirent offrir une qualité de service optimale (tant du point de vue des horaires proposés, que de celui relatif au nombre de véhicules mis en place).

Les résultats montrent que les coûts de deshorage sont très importants pour l'opérateur privé et pour l'opérateur public (ayant pour objectif la maximisation du surplus social). Par exemple, pour une demande inélastique et dans le cadre simplifié de notre analyse, nous avons montré que les coûts de deshorage pouvaient être plus de quatre fois plus élevés que le niveau des prix. Ces deux coûts sont du même ordre de grandeur pour une élasticité de la demande individuelle de l'ordre de 0,41.

Enfin, nous avons proposé, dans le cas d'une ligne (qui s'applique au cas de plusieurs origines, plusieurs destinations et plusieurs arrêts) une formulation stochastique du choix des horaires optimaux. Cette formulation est très proche de celle que nous avons utilisée dans nos études économétriques pour les transports individuels. Dans ce cas, le coût de deshorage n'est pas inévitable, mais l'usager a la possibilité d'arbitrer entre temps de trajet et coût de deshorage: par exemple, il peut opter pour des temps de trajets petits (c'est-à-dire des niveaux de congestion faibles) et des coûts de deshorage élevés. Le formalisme et les résultats que nous avons introduits ici pourront être facilement appliqués dans le cadre d'études économétriques: pour ce faire, il est nécessaire d'estimer d'une part les paramètres (ou leur distribution) des coûts de deshorage ( $\tau$  et  $\rho$ ) et d'autre part la distribution des heures de départ désirées  $f(\cdot)$ . Les compagnies ferroviaires, notamment celles gérant le Thalys, ont commencé (bien que de manière encore trop sommaire à notre avis) à collecter ce type de données.

## Références

Ben-Akiva, Moshe and Steven R. Lerman (1985). *Discrete Choice Analysis*. Cambridge. MIT Press.

Domencich, Thomas A. and Daniel McFadden (1975). *Urban Travel Demand: a Behavioral Analysis* (1975). North Holland.

---

## Deuxième partie

# Ajustement des paramètres de simulation à partir d'indicateurs agrégés de mobilité

# Introduction

Au cours des deux premières années du projet QUATUOR, nous avons testé la faisabilité d'adaptation de l'outil de simulation dynamique METROPOLIS au réseau d'Ile-de-France puis nous avons effectué un calage agrégé de cet outil. L'objectif consistait à réduire l'écart entre les valeurs des données statistiques collectées auprès des différents organismes publics et les valeurs simulées reproduites par METROPOLIS.

L'outil de simulation METROPOLIS décrit la demande de transport de manière microscopique et l'offre de manière mésoscopique. Une des caractéristiques dominantes de ce modèle est qu'il utilise un nombre limité de paramètres qui peuvent être obtenus sans grande difficulté. Les données nécessaires pour l'adaptation de cet outil au réseau de voirie d'Ile-de-France peuvent se répartir en trois catégories.

- (1) Le réseau : nous avons utilisé le réseau codé de l'IAURIF. A l'heure actuelle, nous avons utilisé uniquement des fonctions de congestion de type goulot d'étranglement. Comme, nous le rappelons dans la deuxième section, avec ce type de fonction, nous ne pouvons agir que sur la capacité des routes en la faisant varier de façon homothétique. Notons par ailleurs que les résultats des estimations des fonctions de congestion, effectuées dans le chapitre précédent, seront utilisés dans la seconde partie de l'année 3 du projet QUATUOR.
- (2) La matrice O-D : la matrice statique correspondant au pic du matin nous a été fournie par l'IAURIF. Cependant, METROPOLIS décrivant l'évolution du trafic pour une matinée entière, nous avons dû augmenter la taille de la matrice en la multipliant par un facteur constant. De plus, pour tenir compte de la différence de comportement entre les déplacements domicile - travail et les autres motifs, nous avons utilisé la partition obtenue à partir des enquêtes EGT et MADDIF et segmenter les usagers en conséquence.
- (3) Les paramètres comportementaux dynamiques : les valeurs des paramètres utilisés, au cours des deux premières années, ont été fournies par la littérature. Pour le calage de l'année 3, nous avons introduit dans METROPOLIS les valeurs spécifiques à la région parisienne obtenues à l'aide de l'enquête MADDIF.

L'objectif de cette partie est de présenter une approche automatique de calage pouvant être appliquée pour tout type de réseau. Nous présentons dans le chapitre 1 la méthodologie de calage utilisée dans nos travaux antérieurs, les données disponibles, la signification des paramètres à caler ainsi que les critères de calage et les résultats obtenus. Les travaux réalisés dans le cadre de QUATUOR 3 font l'objet de le chapitre 2. Dans une première phase, nous avons choisi de suivre la procédure qui consiste à

constituer une base de données pour le calage, puis à estimer le critère général (CG) qui reflète la différence entre les simulations et la réalité. L'objectif est de trouver les valeurs optimales  $\theta_{opt}$ ,  $n_{opt}$  et  $\tau_{opt}$  qui minimisent le critère général (CG):

Dans la section 1 chapitre 2, nous présentons les modalités et les résultats de la génération de la base de données nécessaires pour le calage puis la procédure d'estimation de la fonction d'objectif (CG): Nous proposons deux méthodes l'une économétrique (section 3 chapitre 2) et l'autre itérative (section 4 chapitre 2) qui nous permettront d'étudier la vitesse de convergence de la procédure de calage vers le critère minimum souhaité. Nous proposons par ailleurs, pour chaque méthode, une procédure qui permettra aux opérateurs désirant utiliser METROPOLIS de produire un nombre réduit de simulations afin de caler les paramètres de leur modèle. Enfin, la comparaison entre la procédure économétrique et la procédure itérative ainsi que les conclusions feront l'objet de la section 5 chapitre 2.



## Chapitre 1

# Méthodologie de calage utilisée précédemment

## 1.1 Les données disponibles

Au cours de la deuxième année du projet, afin de déterminer un scénario calibré, nous avons comparé les résultats de simulations aux données existantes. Nous disposions des données agrégées et semi-agrégées relatives à la matrice O-D fournie par l'IAURIF et celle fournie par l'Enquête Globale de Transport de la région Ile-de-France en 1991 (notée EGT 91). L'objectif consistait à reproduire le nombre de déplacements suivant les données fournies par l'EGT 91 pour une période de deux heures du pic du matin<sup>1</sup> et pour une période d'une heure du pic en se basant sur les données fournies par l'IAURIF. Nous avons pu ainsi déterminer la taille des deux matrices statiques selon le motif de déplacement (travail et autres) pour la matinée.

### - Données de l'IAURIF

Afin d'adapter l'outil dynamique au réseau de l'IAURIF, nous avons utilisé une matrice statique de 970.000 départs, pendant une heure de pointe pour différents motifs (domicile - travail et domicile - autres motifs).

Le tableau 1 présente la répartition des déplacements par origine (Paris ou Banlieue) - destination (Paris ou Banlieue) selon la matrice statique d'une heure de l'IAURIF. La majorité des déplacements (85,66%) s'effectue de banlieue à banlieue. Cependant, dans les déplacements "Paris - Paris" et "Banlieue - Banlieue", les déplacements intra-zones sont également comptabilisés. Dans les déplacements "Paris - Paris", les déplacements intra-zones représentent 1,45%. De même, la part des déplacements intra-zones dans le total des déplacements "Banlieue - Banlieue" représente 27,52%. En supprimant les déplacements intra-zones de la matrice globale de l'IAURIF, le nombre de déplacements toutes origines et toutes destinations devient égal à 970.000, base utilisée pour notre calage. La modélisation de ces paramètres intra-zones nécessite la modélisation du stationnement. La base théorique d'analyse du stationnement est présentée au cours de la première partie.

Tableau 1 : répartition spatiale des déplacements  
(7h30-8h30; source IAURIF)

Origine - destination	Total des déplacements		Les interzones	
	Nombre	Part	Nombre	Part
Paris - Paris	63.286	4,98%	62.369	6,43%
Paris - Banlieue	118.854	9,36%	118.854	12,25%
Banlieue - Banlieue	1.088.255	85,66%	788.777	81,32%
Total	1.270.395	100%	970.000	100%

1. Les données que nous disposions de l'EGT sont présentées par tranche de deux heures et la matrice O-D statique de l'IAURIF a été préparée pour modéliser l'heure de pointe du matin.

- Données de l'EGT 91

Les données de l'EGT 91 nous ont permis de classer le nombre de déplacements selon deux critères : (1) l'origine (Paris ou Banlieue) et la destination (Paris ou Banlieue) et (2) la durée du trajet pour l'ensemble des usagers de la voiture qui partent entre 7h et 9h. Nous répartissons la durée de déplacement en classes de 15 minutes ; cette durée étant adaptée à la sensibilité des usagers. La distribution est reproduite dans le tableau 2. Il est à noter que ce tableau ne nous permet pas de distinguer les déplacements par motif.

Tableau 2 : nombre de départs (€ 1000)  
en fonction de la durée du trajet (source EGT91)

Temps de trajet [min]	[0,15[	[15,30[	[30,45[	[45,60[	[60,75[
Paris - Paris	35	48	19	6	2
Paris - Banlieue	11	42	65	46	30
Banlieue - Banlieue	943	526	259	114	58
Total	989	616	343	166	90

Temps de trajet [min]	[75,90[	[90,105[	[105,120[	[120,135[	[135,150[
Paris - Paris	0	0	0	0	0
Paris - Banlieue	14	10	2	3	1
Banlieue - Banlieue	26	17	5	4	8
Total	40	27	7	7	9

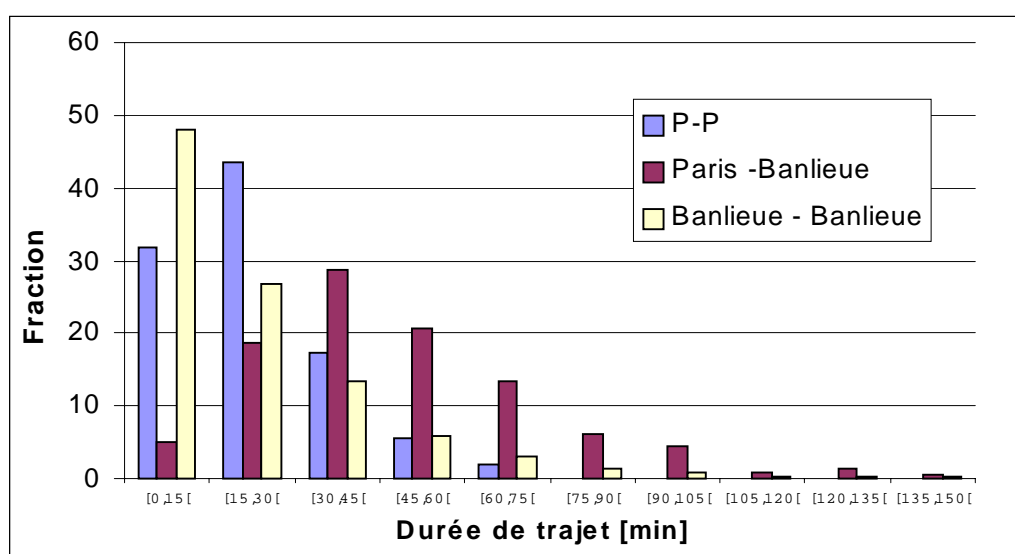


Figure 1 : les distributions des temps de trajet selon l'origine et la destination

Le deuxième objectif du calage agrégé était que les temps de trajet moyens (selon l'origine et la destination), calculés à partir des résultats de simulations, soient proches des temps de trajet moyens calculés à partir des données de l'EGT 91. Ces temps de trajet sont présentés dans le tableau 3. Nous avons calculé deux temps de trajet moyens. Le premier concerne l'ensemble des déplacements entre 7h et 9h et le deuxième concerne uniquement les usagers qui effectuent des déplacements dont la durée est supérieure à 15 minutes, ce qui nous permet de ne pas prendre en compte le phénomène des déplacements intra-zones.

Tableau 3: temps de trajet moyen selon l'origine et la destination entre 7h et 9h (source EGT91)

Origine - Destination	Moyenne des temps de trajets supérieurs à 15 minutes [min]	Moyenne des temps de trajet [min]
Paris - Paris	29,90	22,77
Paris - Banlieue	50,25	48,15
Banlieue - Banlieue	36,84	22,72
Total	38,63	25,21

## 1.2 Les paramètres à caler : signification et valeurs attendues

L'outil de simulation METROPOLIS comporte une série de paramètres à caler. Ceux-ci sont soit des caractéristiques de la demande, soit tributaires de la spécificité du réseau de transport envisagé. Nous évoquons deux groupes de paramètres qui nécessitent un ajustement : (1) ceux relatifs à la demande et (2) ceux relatifs à l'opérateur.

(1) Les paramètres comportementaux relatifs à la demande déterminent la fonction de coût généralisé et le modèle de choix de l'heure de départ. Ils se rapportent à la valeur du temps ( $\theta$ ), au coût unitaire des arrivées précoces ( $\tau$ ) ou tardives ( $\sigma$ ), à la plage des heures d'arrivée désirées à la destination ( $T^a$ ), à la plage des pénalités à l'arrivée  $\Phi$  et à l'hétérogénéité des préférences ( $\lambda$ ) des usagers dans leur choix de l'heure de départ. Les paramètres doivent être impérativement obtenus à partir des enquêtes. En attendant les résultats de l'enquête MADDIF, nous avons utilisé les valeurs tutélaires et les valeurs obtenues à partir des enquêtes effectuées dans d'autres pays. Dans le travail de simulation de la troisième année, nous avons introduit les valeurs de  $\theta$ ;  $\tau$ ;  $\sigma$ ;  $\Phi$  et  $T^a$  déterminées par MADDIF. Le paramètre d'hétérogénéité pourrait être déduit des enquêtes; dans ce travail nous avons essayé de changer la valeur de  $\lambda$  pour tenir compte de l'incertitude relative à la détermination de ce paramètre. Dans cette approche, nous avons considéré un choix de route déterministe. Le fait que l'on utilise la matrice O-D de l'heure de

pointe a exigé de la multiplier par un facteur constant pour l'étendre à l'ensemble de la matinée. Nous avons considéré ce facteur comme un des paramètres à caler.

(2) Les paramètres relatifs à l'opère ont trait :

a) aux types de fonctions de congestion dynamiques. Durant la deuxième année, nous avons utilisé la fonction de type goulot d'étranglement. Cette fonction comporte les paramètres suivants: longueur de l'arc (L), vitesse à vide (V max) et capacité de l'arc (s). Les deux premiers paramètres n'étaient pas calés puisque leurs valeurs étaient déterminées directement par des mesures physiques. Le troisième paramètre a fait l'objet d'un calage.

b) à la vitesse de circulation sur les connecteurs du réseau. Ces vitesses ont été déterminées préalablement au début des simulations. Notons que METROPOLIS ne décrit pas la congestion sur les connecteurs, c'est-à-dire ne permet pas de décrire la congestion pour le trafic intra-zones (néanmoins l'opérateur peut utiliser des zones aussi petites qu'il le désire).

### 1.2.1 Le paramètre $\tau^1$

A partir d'enquêtes, nous obtenons le rapport  $\frac{\tau^3}{\tau^1}$  et en précisant la valeur du temps  $\tau^3$ ; la valeur de  $\tau^1$  sera déterminée. Nous avons pris les résultats des estimations de Small (1982 et 1995) comme point de départ.

Tableau 4: valeurs des rapports des coûts au paramètre d'hétérogénéité

Rapports	Small (1982) en [min-1]	Small (1995) en [min-1]
$\frac{\tau^3}{\tau^1}$	0,1133	0,1060
$\frac{\tau^2}{\tau^1}$	0,1000	0,0650
$\frac{\tau^4}{\tau^1}$	0,2856	0,2540

Pour une valeur du temps  $\tau^3$  de 85 FF/h, il est possible de calculer la valeur de  $\tau^1$ . Si nous considérons les estimations de Small (1982), nous obtenons

$$\tau^1 = \frac{\tau^3}{0,1133 \times 60} = \frac{85}{6,798} = 12,52 \text{ FF.} \quad (1.1)$$

Par ailleurs, si nous considérons les estimations de Small (1995) nous obtenons :

$$\tau^1 = \frac{\tau^3}{0,1060 \times 60} = \frac{85}{6,36} = 13,36 \text{ FF.} \quad (1.2)$$

Ceci suggère que l'impact des variables non observables et l'hétérogénéité représentent environ 13 FF. Ce chiffre doit être mis en relation avec la moyenne du coût généralisé qui est de l'ordre de 70 FF. L'augmentation de  $\sigma^2$  indique une hétérogénéité plus importante des usagers, ce qui provoque une distribution plus étalée des heures de départ. Cet étalement de la distribution des heures de départ entraîne à la fois une diminution de la congestion et des temps de trajet et une augmentation du coût dû au délai à l'arrivée.

### 1.2.2 Le paramètre $n$

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous disposons de la matrice O-D pour l'heure de pointe du matin, ce qui nous a posé deux problèmes:

(a) Nous étions obligés d'introduire des paramètres comportementaux différents pour des motifs différents (pour les trajets Domicile - Travail (DT) et pour les autres motifs). C'est pourquoi, à partir de l'EGT, nous avons considéré que 55% de tous les trajets de la matinée correspondait aux trajets DT.

(b) La demande devait être prolongée sur la matinée.

En prenant la même distribution géographique des déplacements pendant la matinée que pendant l'heure de pointe, nous avons utilisé un facteur  $n$  à multiplier par la matrice originale pour obtenir la demande de trajets DT pendant la matinée. En multipliant cette nouvelle matrice par  $n$  avec  $n = \frac{0,45}{0,55} = 0,818$ , nous obtenons la matrice des déplacements pour les autres motifs.

Le paramètre  $n$  accroît directement la demande, ce qui augmente la congestion, le temps de trajet et le coût du délai à l'arrivée. Parmi nos paramètres à caler, il se présente comme le plus important.

### 1.2.3 Le paramètre $\alpha$

Au cours de la deuxième année du projet, nous avons utilisé les fonctions de congestion dynamiques de type goulot d'étranglement pour les routes. A titre de rappel, ces fonctions sont définies comme suit :

$$tt_i(\text{dynVol}_i) = \begin{cases} \frac{L_i}{V_i} & \text{si } \text{dynVol}_i < \frac{s_i L_i}{V_i} \\ \frac{\text{dynVol}_i}{s} & \text{sinon} \end{cases}$$

où :

$\text{dynVol}_i$  : l'occupation du lien  $i$  à un moment donné,

$L_i$  : longueur du lien  $i$ ,

$V_i$  : vitesse maximale sur le lien  $i$ ,

$s_i$  : capacité du lien  $i$ .

La capacité  $s_i$  correspond à la capacité "statique", fournie dans les données de l'IAU-RIF. L'ajustement de l'ordre se faisait par la modification de toutes les capacités des

routes sur l'ensemble du réseau par un même facteur. Cette opération s'effectue par l'intermédiaire du facteur multiplicatif de la capacité, noté  $\cdot$ , à travers la relation suivante :

$$S_i^0 = \cdot : S_i \quad (1.3)$$

Les études précédentes ont démontré qu'en utilisant la même fonction que le modèle statique,  $\cdot$  sera inférieur à 1. L'augmentation de  $\cdot$  diminue le temps de trajet et par conséquent, les départs seront plus concentrés, ce qui provoque un pic plus important pour le flux et évidemment le coût du délai à l'arrivée diminuera.

### 1.3 Les critères de calage et leur agrégation

Pour le calage de l'outil dynamique de simulation, nous avons quatre critères de trois types selon la variable analysée : (1) temps de trajet moyen (2) distribution des temps de trajet et (3) nombre de déplacements. Pour chaque variable, nous calculons quatre critères : les trois premiers sont calculés pour trois ensembles des origines - destinations et le quatrième est un critère global pondéré par le nombre de déplacements déduit des trois premiers critères. Ces variables sont importantes pour le contrôle du fonctionnement du modèle d'affectation et du modèle de choix de l'heure de départ. En plus, elles sont disponibles et peuvent nous aider à atteindre avec une bonne précision le calage du modèle.

En considérant la disponibilité des données et pour éviter une complexité qui peut nous empêcher de mieux comprendre le fonctionnement du modèle utilisé, nous avons agrégé les variables pour les déplacements dans et entre deux zones clairement séparées, c'est-à-dire Paris et Banlieue. Les temps de trajet seront calculés pour une durée de pointe entre 7 heures et 9 heures, ils constituent donc des mesures statiques. Les nombres de départ sont mesurés selon deux niveaux temporels 8 heures - 9 heures et 7 heures - 9 heures : ils constituent des mesures semi-dynamiques.

### 1.3.1 Agrégations

La matrice  $X$  présente les variables de sortie de METROPOLIS qui vont être soumises au calage:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & & & & 2 & & 3 \\
 & & & & & & \bar{t}t_1 & & \bar{t}t_2 & & \bar{t}t_3 & & 3 \\
 & & & & & & P_{1;1} & & P_{1;2} & & P_{1;3} & & 7 \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & P_{j;1} & & P_{j;2} & & P_{j;3} & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & P_{10;1} & & P_{10;1} & & P_{10;1} & & 5 \\
 & & & & & & N_1^{7i 9} & & N_2^{7i 9} & & N_3^{7i 9} & & 5 \\
 & & & & & & N_1^{8i 9} & & N_2^{8i 9} & & N_3^{8i 9} & & 5 \\
 & & & & & & & & & & & & 5
 \end{array}
 X = \quad (1.4)$$

Les types de déplacement selon l'origine et la destination sont répertoriés comme suit:

1. pour  $i = 1$  : les déplacements "Paris-Paris" dont le temps de trajet est supérieur à 15 minutes
2. pour  $i = 2$  : les déplacements "Paris-Banlieue" y compris ceux dont de trajet est supérieur à 15 minutes
3. pour  $i = 3$  : les déplacements "Banlieue-Banlieue" dont le temps de trajet est supérieur à 15 minutes
4.  $\bar{t}t_i$  : temps de trajet moyens pour le groupe géographique  $i$  :
5.  $P_{j;i}$  : part des déplacements de groupe géographique  $i$  ayant un temps de trajet dans la tranche  $j$  .

Les catégories de temps de trajet sont définies ci-dessous :

- |   |  |
|---|--|
| $j = 1$ : $tt \in [0; 15 \text{ min}[$  | $j = 6$ : $tt \in [75; 90 \text{ min}[$    |
| $j = 2$ : $tt \in [15; 30 \text{ min}[$ | $j = 7$ : $tt \in [90; 105 \text{ min}[$   |
| $j = 3$ : $tt \in [30; 45 \text{ min}[$ | $j = 8$ : $tt \in [105; 120 \text{ min}[$  |
| $j = 4$ : $tt \in [45; 60 \text{ min}[$ | $j = 9$ : $tt \in [120; 135 \text{ min}[$  |
| $j = 5$ : $tt \in [60; 75 \text{ min}[$ | $j = 10$ : $tt \in [135; 150 \text{ min}[$ |



6.  $N_i^{7i\ 9}$  Nombre de déplacements entre 7 heures et 9 heures du matin comparable avec les données d'EGT.
7.  $N_i^{8i\ 9}$  Nombre de départs entre 8 heures et 9 heures (l'heure de pointe) du matin comparable avec la matrice O-D de l'IAURIF.

Les valeurs empiriques de ces variables ont été présentées précédemment. Ces variables forment les quatre mesures de distance suivantes: (avec la notation S : Simulée et R : Réelle)

$$d_i^{tt} = \frac{\overline{tt_i^S} \overline{tt_i^R}}{P \overline{tt_i^R}}$$

$$d_i^P = \frac{\sum_{j=1;10} P_{j;i}^R P_{j;i}^S}{P \sum_{j=1;10} P_{j;i}^R}$$

$$d_i^{N7i\ 9} = \frac{N_i^{7i\ 9S} N_i^{7i\ 9R}}{N_i^R}$$

$$d_i^{N8i\ 9} = \frac{P N_i^{8i\ 9S} P N_i^{8i\ 9R}}{N_i^R}$$

Ces quatre mesures permettent de calculer les quatre critères pondérés suivants:

$$C_1 = \sum_{i=1;3} \mu_i : d_i^{tt} \text{ critère de temps de trajet moyen}$$

$$C_2 = \sum_{i=1;3} \mu_i : d_i^P \text{ critère de la distribution du temps de trajet}$$

$$C_3 = \sum_{i=1;3} \mu_i : d_i^{N7i\ 9} \text{ critère du nombre de départ à deux heures de pointe}$$

$$C_4 = \sum_{i=1;3} d_i^{N8i\ 9} \text{ critère du nombre de départ à l'heure de pointe}$$

où  $\mu_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) représente la part des déplacements (calculée à partir des données de l'EGT 91) suivant l'origine et la destination, avec:

$\mu_1$  : part des déplacements "Paris-Paris" dont la durée de trajet est supérieure à 15 minutes,

$\mu_2$  : part des déplacements "Paris-Banlieue" y compris ceux dont la durée de trajet est inférieure à 15 minutes, et

$\mu_3$  : part des déplacements "Banlieue-Banlieue" dont la durée de trajet est supérieure à 15 minutes.

Tableau 5 : les poids des sous critères

Origine - destination	i	Nombre de déplacements( £ 1000)	Part des déplacements $\mu_i$
Paris - Paris	1	75	5,7%
Paris - Banlieue	2	224	17,0%
Banlieue - Banlieue	3	1.017	77,3%
Total		1.316	100,0%

En...n, nous avons calculé un critère synthétique moyen, appelé aussi critère général, comme suit :

$$CG = \frac{1}{4} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \quad (1.5)$$

Notons qu'ici, nous avons choisi des poids égaux pour tous les critères. Il est possible de pondérer les critères différemment en fonction de leur importance (par rapport à un objectif prédéterminé) où de leur exactitude et de leur pertinence.

## 1.4 Descriptif de la méthode

Durant la première année du projet, nous avons comme objectif l'adaptation des différents modules de METROPOLIS à un réseau de taille moyenne (réseau de l'IAURIF) et de petite taille (réseau de la DREIF pour la partie Nord-Ouest de l'Île-de-France)<sup>2</sup>. Nous nous sommes limités à des ajustements globaux pour vérifier le niveau de cohérence des simulations. Par la suite, nous avons analysé l'effet de la variation des valeurs des paramètres pris en compte dans le modèle. Ces simulations nous ont permis de tester la viabilité de l'outil dynamique et de déterminer les valeurs utilisées dans le scénario de référence. Ces valeurs étaient très semblables pour les deux réseaux envisagés.

Au cours de la deuxième année du projet, nous avons ajouté les résultats de nouvelles estimations publiées par différents auteurs. Ensuite, nous avons ajusté de manière séquentielle et intuitive les valeurs de chacun de ces paramètres (calage dans la partie I). A priori, cette démarche peut ne pas converger, car l'ajustement d'un paramètre est en mesure de rendre obsolète les valeurs des autres paramètres. Néanmoins, nous avons été en mesure de caler notre modèle dynamique (à quelques pourcentages près) après un nombre limité de calages partiels. Pour se faire, nous avons d'abord utilisé des données agrégées : temps de trajet moyen sur l'ensemble du réseau et nombre total de déplacements pendant l'heure de pointe du matin. Ensuite, nous avons pris en compte

2. Notons néanmoins que les réseaux que nous appelons "de petites tailles" ne peuvent être traités à ce jour par aucun autre modèle dynamique.

des données "semi-agrégées": volumes de déplacements de région à région (deux régions, Paris et Banlieue, ont été considérées) et distribution des temps de déplacement.

Dans une première étape, et en faisant quelques simulations, nous avons obtenu une relation linéaire entre le nombre de départs à l'heure de pointe et  $n$ , ce qui nous a amené à choisir le facteur  $n$  égal à 1.69 (à multiplier par la matrice originale pour obtenir la demande). Mais afin d'être plus précis et réaliste, nous avons été obligés d'ajouter un autre groupe d'usagers ayant une distribution de l'heure désirée d'arrivée à la destination,  $t^a$ ; différente, qui représente les motifs autres que Domicile-Travail. En ajoutant ce nouveau groupe, la demande a été augmentée, et nous avons alors augmenté la valeur de  $n$  afin de réajuster le nombre de départs pendant l'heure de pointe.

Ensuite, et après plusieurs simulations, nous avons décidé d'effectuer une réduction de 17% sur la demande totale. A partir de ce point où nous avons trouvé une situation raisonnable, nous avons effectué une étude de sensibilité sur les deux paramètres  $n$  et  $\alpha$  séparément. Cette étude nous a amené à choisir  $n = 14$  et  $\alpha = 0,95$ . Ensuite, en diminuant  $n$  une autre fois, nous avons réussi à améliorer le critère général. Nous nous sommes arrêtés à ce stade, tout en attendant le calage de la troisième année.

## 1.5 Résultats obtenus

La procédure de calage de la deuxième année a abouti au scénario de référence suivant :

Tableau 6 : les valeurs des paramètres comportementaux pour la simulation de référence de la deuxième année

$\alpha$ [FF/h]	$\beta$ [FF/h]	$\gamma$ [FF/h]	$n$ [FF]
85	56.61	198.3	14

$T^*$ du 1er groupe[h]	$N_{D_i T}$ (1er groupe)	$T^*$ du 2ème groupe[h]	$N_{D_i A}$ (2ème groupe)	$\alpha$
08:00 - 09:00	1.258.284	08:00 - 11:00	1.035.184	0,95

Cette simulation conduit aux MOEs (mesures d'efficacité ou mesures of effectiveness) représentées dans le tableau 7 et les valeurs des critères sont représentées dans le tableau 8.

Tableau 7 : les mesures d'efficacité de simulation de référence

Temps de trajet [min]	36,25
Temps de trajet à vide [min]	28,85
Temps d'attente [min]	7,40
Délai d'arrivée précoce [min]	20,79
Délai d'arrivée tardive [min]	12,05
Part des arrivées précoces [%]	53,09
Part des arrivées à l'heure [%]	26,66
Part des arrivées tardives [%]	20,25
Coût moyen total [FF]	69,84
Coût du temps de trajet à vide [FF]	40,87
Coût du temps d'attente [FF]	10,47
Coût moyen de délai d'arrivée [FF]	18,50
Coût de délai d'arrivée précoce [FF]	19,57
Coût de délai d'arrivée tardive [FF]	38,42
Vitesse moyenne [Km/h]	29,67
Volume total des déplacements [millions de Véh.Km]	41,05
Distance moyenne parcourue par usager [Km]	17,90
Nombre d'arcs utilisés par individu	17,76
Indice de congestion [%]	25,62

Tableau 8 : les valeurs des critères pour la simulation de référence

Variable étudiée	Type de déplacement	Valeur réelle	Valeur simulée	Valeur de critère [%]
Temps de trajet moyens [min]	Paris - Paris	29,90	27,56	7,81
	Paris - Banlieue	48,12	47,13	2,06
	Banlieue - Banlieue	36,84	35,71	3,07
	global			7,18
Distributions des temps de trajet	Paris - Paris			6,53
	Paris - Banlieue			3,47
	Banlieue - Banlieue			4,89
	global			4,74
Nombre de départs (données IAURIF)	global	970.000	968.898	0,11
Nombre de déplacements (données EGT91)	Paris - Paris	75.000	68.632	8,49
	Paris - Banlieue	224.000	184.485	17,64
	Banlieue - Banlieue	1.017.000	1.060.688	4,30
	global	1.316.000	1.313.805	0,16
Critère moyen				3,05

L'ajustement (calage) intuitif de deuxième année conduit à une valeur de critère général de 3,05%, ce qui nous semble satisfaisant.

## Chapitre 2

### Le calage automatique

A la suite de la méthodologie intuitive de calage en deuxième année, et parallèlement au calage ...n en cours, nous avons élaboré une méthodologie automatique de calage. Nous avons effectué une recherche parmi les différentes méthodes d'optimisation pour trouver une méthode qui puisse réduire la valeur du critère général (CG).

Nous avons choisi une procédure itérative en trois étapes :

Etape 1 : créer une base de données composée de 176 simulations effectuées sur METROPOLIS.

Etape 2 : estimer le critère général CG en le considérant comme une fonction des paramètres  $\beta$  ;  $\alpha$  et  $\gamma$  : Déterminer les paramètres optimaux  $\beta_{opt}$  ;  $\alpha_{opt}$  et  $\gamma_{opt}$  qui minimisent CG: La valeur minimale de CG est notée  $CG_{min}$ .

Etape 3 : fournir les paramètres optimaux  $\beta_{opt}$  ;  $\alpha_{opt}$  et  $\gamma_{opt}$  à METROPOLIS pour qu'il calcule un nouveau CG:

En premier lieu, nous avons décidé d'établir une base de données comprenant une série structurée des scénarii qui présentent la sensibilité de la fonction d'erreur dans le voisinage des valeurs optimales des paramètres à caler.

Les étapes 2 et 3 seront répétées plusieurs fois jusqu'à l'obtention d'une valeur minimale de CG. Par le biais de cette procédure, nous espérons obtenir un ajustement efficace. Nous avons testé ici cette procédure économétrique en se basant sur 176 simulations effectuées. Ces mêmes simulations ont été utilisées par ailleurs pour tester une autre procédure de recherche de minimum : c'est la procédure itérative. Le but de ce travail est de tester la vitesse de convergence de la méthode vers un minimum global (CG simulé): Comme nous le verrons, un petit nombre de simulations suffit pour trouver la valeur minimale de la fonction CG (cette valeur minimale ayant été calculée à partir des 176 simulations). Bien évidemment, ce travail doit être éventuellement considéré comme un exercice méthodologique étant donné que la production de simulations reste coûteuse. Dans la pratique, les opérateurs désirant utiliser METROPOLIS devraient pouvoir se contenter d'un nombre réduit de simulations pour la calibration des 3 paramètres clés du modèle. Les résultats pourraient dépendre des caractéristiques du réseau utilisé: la robustesse de la méthode reste à être examinée.

D'autre part, les deux nouvelles procédures, procédure économétrique et itérative, nous permettront d'étudier la vitesse de convergence vers un minimum global en partant de notre base de données initiale, et d'élaborer un processus de pilotage de simulation pour les opérateurs.

## 2.1 Constitution de la base de données pour le calage

Cette base de données doit comprendre un nombre assez élevé de points pour chaque dimension (paramètre), ce qui nous permettra d'effectuer différentes estimations et de lisser différentes fonctions sur les points obtenus. Comme idée préliminaire nous pensions que le critère général pouvait être estimé par une fonction quadratique (au moins au voisinage de son minimum). Pour estimer une fonction quadratique à une dimension, il faut au moins trois points. Nous avons décidé de faire une grille de six points pour chaque dimension ( $n$ ,  $\kappa$  et  $\mu$ )

Dans un premier temps, nous avons proposé une série de valeurs pour chaque paramètre, afin d'encadrer le point optimum des paramètres. Ensuite, nous avons poursuivi une démarche spécifique pour pouvoir utiliser les simulations précédentes comme conditions initiales des simulations suivantes, ce qui nous a permis d'obtenir la convergence après un nombre d'itérations moins élevé.

### 2.1.1 Les valeurs des paramètres

Comme nous l'avons présenté précédemment, nous avons choisi six valeurs pour chaque paramètre autour de leurs valeurs présumées. Le scénario de référence de la deuxième année nous a fourni la valeur 14 pour  $\mu$ , 1,2972 pour  $n$  et 0,95 pour  $\kappa$ . MADDIF a proposé la valeur de 17,49 pour  $\mu$ . En conséquence, nous avons choisi les valeurs qui figurent dans le tableau 9 pour produire des simulations.

Tableau 9: les valeurs préliminaires des paramètres à caler

	$\mu$	$\kappa$	$n$
<b>1</b>	8,00	0,75	1,20
<b>2</b>	12,00	0,95	1,29
<b>3</b>	14,00	1,00	1,45
<b>4</b>	16,00	1,10	1,60
<b>5</b>	17,49	1,15	1,75
<b>6</b>	20,00	1,25	2,00

Ces valeurs auraient nécessité  $6 \times 6 \times 6 = 216$  simulations. Nous avons quelque peu modifié notre plan initial en réduisant le nombre de simulations et en modifiant légèrement l'exploration systématique des paramètres. Les valeurs des paramètres comportementaux et le facteur multiplicatif de la matrice pour chaque valeur de  $n$  sont présentés dans le tableau 10.



Tableau 10: les paramètres pour différents segments de la demande

Paramètres	Valeurs	Etapas						
		1	2	3	4	5	6	7
<b>DEMANDE</b>								
<b>Domicile travail PC</b>								
$\alpha$ [FF/h]	85,00							
$\beta$ [FF/h]	39,88							
$\gamma$ [FF/h]	49,32							
$t^*$ [min]	08:29							
ET $t^*$ [min]	60							
n	1,2972	1,2000	1,2972	1,4500	1,6000	1,7500	2,0000	2,2000
<b>Domicile travail GC</b>								
$\alpha$ [FF/h]	136,42							
$\beta$ [FF/h]	88,15							
$\gamma$ [FF/h]	183,64							
$t^*$ [min]	08:24							
ET $t^*$ [min]	50							
n	1,2972	1,2000	1,2972	1,4500	1,6000	1,7500	2,0000	2,2000
<b>Autres motifs 1</b>								
$\alpha$ [FF/h]	93,40							
$\beta$ [FF/h]	37,78							
$\gamma$ [FF/h]	76,60							
$t^*$ [min]	08:54							
ET $t^*$ [min]	54							
n	0,4909	0,4541	0,4909	0,5487	0,6055	0,6623	0,7569	0,8326
<b>Autres motifs 2</b>								
$\alpha$ [FF/h]	93,40							
$\beta$ [FF/h]	37,78							
$\gamma$ [FF/h]	76,60							
$t^*$ [min]	10:49							
ET $t^*$ [min]	53							
n	0,5763	0,5331	0,5763	0,6442	0,7108	0,7774	0,8885	0,9774
$\Delta$ [min]	0							

### 2.1.2 Les modalités pratiques

La qualité de convergence du modèle varie selon les valeurs des paramètres, mais à titre indicatif, il fallait au plus 150 itérations pour assurer la convergence. En considérant la capacité des ressources de calcul à l'université, nous mettrons entre 12 et 20 minutes pour chaque itération de simulation, ce qui représente  $216 \times 150 \times 16 / (60 \times 24) = 360$  jours-machine de calcul. Ce temps nous paraissait énorme et nous avons essayé de le réduire en introduisant des conditions initiales pour la simulation du pic du matin. Cette méthode nous a permis de réduire le nombre d'itérations jusqu'à un quart, ce qui représente une économie importante des ressources. Afin de mieux profiter de cette méthode, nous avons procédé aux simulations les une après les autres de manière à ce que l'on puisse prendre pour chaque simulation celle qui a le minimum de différence selon les paramètres. Par expérience, nous avons constaté qu'une simulation ayant la même valeur de  $\Delta$  constitue la meilleure condition initiale. Les considérations précisées précédemment nous ont amené à lancer les simulations en suivant un serpent dans le cube comprenant les valeurs des paramètres.

### 2.1.3 Les résultats

Au cours des simulations, nous avons suivi la tendance du critère général en fonction des paramètres, ce qui nous a permis de localiser approximativement l'optimum et d'ajuster les valeurs prédéterminées des paramètres. Cependant, nous avons dû ajouter de nouvelles valeurs et en abandonner d'autres. Le tableau suivant présente le nouvel ensemble de valeurs retenues :

Tableau 11 : les nouvelles valeurs des paramètres à caler

	<b>Mu</b>	<b>k</b>	<b>n</b>
<b>00</b>	<b>0,50</b>		
<b>0</b>	<b>1,00</b>		
<b>1</b>	8,00	0,75	1,20
<b>2</b>	12,00	0,95	1,29
<b>3</b>	14,00	1,00	1,45
<b>4</b>	16,00	1,10	1,60
<b>5</b>	17,49	1,15	1,75
<b>6</b>	20,00	1,25	2,00
<b>7</b>		1,50	2,20
<b>77</b>		1,75	
<b>8</b>		2,00	
<b>9</b>		2,25	

Le tableau 12 présente les valeurs du critère général pour une première série de simulations comprenant au minimum quatre valeurs pour chaque paramètre.

Tableau 12 : les valeurs de critère général pour la grille des simulations

n4	00	0	01	1	2	3	mu
2	12,19%	9,92%	12,29%	10,33%	12,29%	12,96%	
3	9,47%	9,66%	9,71%	10,10%	10,35%	10,82%	CG entre 5-6%
6	9,07%	9,17%	9,40%	9,67%	10,20%		CG entre 6-7%
7	9,99%	9,89%	9,82%	10,34%	10,48%		CG entre 7-10%
8	11,00%	10,99%	10,93%	11,29%	11,70%		CG entre >10%
9	11,00%	10,96%	10,90%	11,15%	11,57%		
n5	00	0	01	1	2	3	
2	9,96%	7,99%	9,82%	7,33%	7,33%	7,52%	
3	7,17%	7,19%	6,89%	6,70%	6,89%	8,75%	
6	5,23%	5,04%	5,40%	5,61%	6,12%	6,42%	
7	5,83%	5,89%	5,88%	5,96%	6,43%		
8	6,69%	6,62%	6,71%	7,05%	7,55%		
9	6,81%	6,74%	6,85%	6,91%	7,46%		
n6	00	0	01	1	2	3	
2		11,84%	13,52%	9,50%	8,26%	8,19%	
3		10,98%	10,57%	9,08%	8,12%	7,65%	
6	8,79%	8,87%	8,36%	7,58%	6,83%	6,62%	
7	7,75%	7,81%	7,85%	6,79%	6,90%		
8	7,03%	7,39%	7,46%	7,36%	7,06%		
9	6,58%	6,67%	6,78%	6,77%	6,48%		
N7	00	0	01	1	2	3	
2		25,00%	19,70%	14,93%	13,52%	13,21%	
3		17,28%	16,22%	14,50%	13,05%	12,80%	
6	14,62%	14,69%	13,97%	12,99%	11,93%	11,34%	
7	13,42%	13,35%	13,33%	12,66%	11,85%		
8	11,96%	12,43%	12,36%	12,09%	11,69%		
9	11,45%	11,50%	11,52%	11,27%	10,85%		

Les résultats de cette série de simulations ont montré que l'optimisation en terme de <sup>1</sup> aboutit à une valeur trop petite, ce qui n'est pas en accord avec la littérature et avec nos attentes de ce paramètre. C'est pourquoi, par la suite, nous avons décidé de continuer nos simulations en nous basant sur la valeur obtenue à partir de l'enquête MADDIF (<sup>1</sup> =17,49), et ne plus changer ce paramètre. Nous avons continué notre exploration en lançant une série de simulations sous forme de grille autour des valeurs optimales présumées.

## 2.2 Estimation des fonctions d'objectif

Comme nous venons de le voir dans les sections précédentes, la procédure de calage consiste à reproduire la réalité avec une erreur la plus faible possible. En d'autres termes, ceci revient à trouver les valeurs des paramètres qui permettent de minimiser le critère synthétique moyen appelé aussi critère général (CG) :

Pour mener à bien cet objectif, nous avons étudié la variation du critère général CG par rapport aux paramètres :  $\theta$ ;  $n$  et  $\alpha$  (voir section 3.1). Nous allons présenter dans cette partie les travaux qui ont été élaborés dans le but d'estimer le critère général, qui rappelons le, est une somme pondérée de quatre critères différents. Ces critères mesurent la différence entre les simulations et les données empiriques disponibles en termes de temps de trajet, de distribution du temps de trajet, de nombre de départs entre 7h et 9h et entre 8h et 9h du matin. Nous proposons dans ce qui suit, deux formulations de ces critères : une formulation linéaire et une formulation quadratique.

Dans la sous-section 3:2:2, nous présentons la procédure de choix de la fonction à estimer et ses caractéristiques ainsi que la méthode d'estimation et la méthode d'optimisation utilisées. L'application de la démarche déjà définie dans la sous-section 3:2:2, et en tenant compte de la formulation linéaire des critères, fera l'objet de la sous-section 3:2:3. La sous-section 3:2:4 envisage une formulation quadratique.

### 2.2.1 Fonction d'objectif - estimation - optimisation

Nous travaillons sur une base de données simplifiée où figurent les variables d'entrée de METROPOLIS qui sont  $\theta$ ;  $n$  et  $\alpha$  ainsi que les quatre critères  $C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$ ;  $C_4$  et CG (critère général):

Les notations utilisées sont les suivantes :

$\theta$  : paramètre Logit du choix de l'heure de départ. Il indique le niveau d'homogénéité des individus : plus le paramètre  $\theta$  est élevé et plus les usagers sont hétérogènes.

$n$  : facteur multiplicatif de la matrice O-D statique, appelé aussi facteur de croissance homothétique de la matrice O-D.

$\alpha$  : facteur multiplicatif de la capacité statique des arcs.

$C_1$  (critère1) : différence entre le temps de trajet simulé et observé.

$C_2$  (critère2) : différence entre la distribution des temps de trajet simulés et observés.

$C_3$  (critère3) : différence entre le nombre de départs simulés et observés entre 7h et 9h du matin.

$C_4$  (critère4) : différence entre le nombre de départs simulés et observés entre 8h et 9h du matin.

$$CG(\text{critère général}) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 \quad (2.1)$$

Le choix des critères de pondération  $\alpha_1$ ;  $\alpha_2$ ;  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  dépend de l'objectif souhaité ainsi qu'éventuellement du degré de fiabilité des données d'enquête. En effet, pour calibrer par exemple un modèle d'utilisation du sol, nous pouvons accorder plus d'importance aux critères où figurent les données de la matrice O-D. De même, si on s'intéresse à

un modèle de trafic sur les autoroutes on accordera alors plus d'importance aux critères relatifs aux temps de trajet. Par ailleurs, on peut aussi accorder plus d'importance aux critères où existent des données d'enquête jugées fiables.

Nous avons choisi pour notre étude de considérer que les quatre critères ont la même importance, ce qui revient à utiliser la pondération  $w_i = 0,25$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ :

### 1- Choix de la fonction d'objectif

Le principe consiste à estimer le critère général (CG) afin de le minimiser. Toutefois, une question se pose : comment estimer (CG) sachant qu'on ne connaît pas son expression ? Pour remédier à ce problème, et étant donnée la forme présumée convexe de CG, nous avons testé les paramétrisations suivantes de la fonction  $CG(n; \cdot)$  :

Forme 1

$$CG = A n^2 + B n^2 + C \cdot^2 + D n + E \cdot + F \cdot n + G: \quad (2.2)$$

Forme 2

$$CG = A n^2 + B n^2 + C \cdot^2 + G n + H n + I \cdot + J: \quad (2.3)$$

Forme 2'

$$CG = \alpha (n - n_1)^2 + \beta (n - n_1)^2 + \gamma (\cdot - \cdot_1)^2 + S: \quad (2.4)$$

Dans ce dernier cas,  $n_1$ ,  $n_1$  et  $\cdot_1$  représentent les valeurs des paramètres qui minimisent cette fonction. La forme 2' peut s'écrire comme la forme 2:

$$CG = A n^2 + B n^2 + C \cdot^2 + G n + H n + I \cdot + J: \quad (2.5)$$

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A, cas 1, pour une explication de la relation entre les équations 2.4 et 2.5.

Forme 3

$$CG = \alpha (n - n_1)^4 + \beta (n - n_1)^4 + \gamma (\cdot - \cdot_1)^4 + S: \quad (2.6)$$

Dans ce cas  $n_1$ ,  $n_1$  et  $\cdot_1$  sont les valeurs des paramètres qui minimisent cette fonction. Ce qui revient à estimer la forme :

$$CG = A \cdot 1^4 + B \cdot n^4 + C \cdot 4 + D \cdot 1^3 + E \cdot n^3 + F \cdot 3 + G \cdot 1^2 + H \cdot n^2 + I \cdot 2 + J \cdot 1 + K \cdot n + L \cdot + M; \quad (2.7)$$

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A, cas 2, pour une explication de la relation entre les équations 2.6 et 2.7.

En utilisant ces formes, nous avons obtenu des résultats insatisfaisants (ajustement faible, valeurs trop grandes ou trop petites pour  $n_{opt}$ ;  $n_{opt}$ ;  $n_{opt}$  et  $CG_{min...}$ , ainsi que des problèmes d'interprétation - mauvais signes pour les coefficients.)

A la suite de plusieurs essais, nous avons préféré retenir la fonction d'objectif plus générale suivante :

$$CG = A \cdot 1^2 + B \cdot n^2 + C \cdot 2 + D \cdot 1 \cdot n + E \cdot 1 \cdot + F \cdot n + G \cdot 1 + H \cdot n + I \cdot + J; \quad (2.8)$$

Par la suite, nous imposerons des conditions permettant d'assurer la convexité de cette forme.

## 2- Méthode d'estimation de la fonction d'objectif

La fonction d'objectif choisie (2.8) est linéaire par rapport aux variables à estimer, ce qui nécessite une régression multiple.

C'est sous cette forme que nous avons introduit nos données dans le logiciel d'analyse statistique "STATA" afin d'effectuer l'estimation par la méthode des moindres carrés ordinaire (MCO). Dans tout ce qui suit, nous présentons l'équation de régression sous sa forme polynomiale c'est-à-dire en fonction des paramètres  $1; n$  et  $\cdot$ .

Nous disposons de 176 observations (simulations) sur  $1; n; \cdot$  et  $CG$ ; notées  $1; n; \cdot_i$  et  $CG_i$ ;  $i = 1; \dots; 176$ : Grâce à notre base de données, nous voulons estimer les paramètres inconnus  $A; B; C; D; E; F; G; H; I$  et  $J$ . Le modèle stochastique s'écrit :

$$CG_i = A \cdot 1_i^2 + B \cdot n_i^2 + C \cdot 2_i + D \cdot 1_i \cdot n_i + E \cdot 1_i \cdot + F \cdot n_i + G \cdot 1_i + H \cdot n_i + I \cdot + J + \epsilon_i; \quad (2.9)$$

où  $\epsilon = (\epsilon_1; \dots; \epsilon_{176})$  représente un vecteur dont les composantes modélisent l'erreur due à plusieurs facteurs.

La méthode des moindres carrés ordinaire (MCO) consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs SCR :

$$SCR(1; n; \cdot) = \sum_{i=1}^{176} (CG_i - \hat{CG}_i)^2; \quad (2.10)$$

avec :

$$\mathcal{G}_i = A \cdot 1_i^2 + B \cdot n_i^2 + C \cdot 1_i^2 + D \cdot 1_i \cdot n_i + E \cdot 1_i \cdot 1_i + F \cdot 1_i \cdot n_i + G \cdot 1_i + H \cdot n_i + I \cdot 1_i + J \cdot n_i \quad (2.11)$$

Ce modèle de régression multiple, conduit à la fonction estimée suivante :

$$\mathcal{G} = A \cdot 1^2 + B \cdot n^2 + C \cdot 1^2 + D \cdot 1 \cdot n + E \cdot 1 \cdot 1 + F \cdot 1 \cdot n + G \cdot 1 + H \cdot n + I \cdot 1 + J \cdot n \quad (2.12)$$

où  $A; B; C; D; E; F; G; H; I; J$  sont les paramètres à estimer. Cette fonction, aussi appelée "équation de régression", est celle qui passe au plus près du nuage de points de notre base de données (simulations).

### 3- Méthode d'optimisation

Cette troisième étape permet d'optimiser la fonction déjà estimée<sup>1</sup> pour trouver les paramètres qui permettent de minimiser le critère général estimé ( $\mathcal{G}$ ). Dans ce cas, le problème de minimisation s'écrit sous la forme :

$$\min_{1;n;\cdot} \mathcal{G}(1;n;\cdot) \quad (2.13)$$

#### Conditions de premier ordre

Les conditions de premier ordre prennent ici la forme de l'annulation de la dérivée partielle de la fonction d'objectif estimée ( $\mathcal{G}$ ) par rapport à chaque variable. Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{@1} \frac{\partial \mathcal{G}(1;n;\cdot)}{\partial 1} &= 0 \\ \sum_{@n} \frac{\partial \mathcal{G}(1;n;\cdot)}{\partial n} &= 0 \\ \sum_{@.} \frac{\partial \mathcal{G}(1;n;\cdot)}{\partial \cdot} &= 0: \end{aligned} \quad (2.14)$$

1. Voir Varian, H.R.(1995), Analyse Microéconomique, chapitre 27 pp 496-498, (3ème édition).

Conditions de second ordre

Les conditions de second ordre permettent de garantir la convexité de la fonction. Elles consistent à imposer la condition de non-négativité de la matrice Hessienne, notée H (matrice des dérivées secondes).

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial \eta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial \epsilon} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \theta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \epsilon} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \epsilon \partial \theta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \epsilon \partial \eta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \epsilon^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

En d'autres termes, cette condition requiert que la matrice Hessienne soit semi-définie positive, ce qui revient à vérifier si les déterminants des mineurs principaux sont tous positifs. En effet, nous rappelons qu'un mineur principal est un déterminant d'une sous-matrice dont les éléments diagonaux proviennent de la diagonale principale de la matrice<sup>2</sup>. La condition de second ordre est réalisée par la vérification du système suivant :

$$\begin{cases} \det(H_1) > 0 \\ \det(H_2) > 0 \\ \det(H_3) > 0; \end{cases} \quad (2.16)$$

où H<sub>1</sub>; H<sub>2</sub> et H<sub>3</sub> sont les sous-matrices principales de la matrice hessienne H: Ceci revient simplement à vérifier les trois conditions sur les coefficients (voir la formulation générale de ces conditions dans l'annexe B):

$$\begin{cases} 8ABC_i - 2A^2B^2_i - 2B^2C^2_i + 2B^2C^2_i > 0 \\ 4B^2C^2_i - B^2 > 0 \\ C^2 > 0; \end{cases} \quad (2.17)$$

2.2.2 Critère linéaire

Après avoir exposé la méthodologie retenue pour l'estimation et l'optimisation du critère général, nous présenterons dans cette sous-section, son application à des données qui ont été mesurées à partir d'une formulation linéaire des critères. Nous commencerons tout d'abord par rappeler leurs formulations, puis par présenter les résultats d'estimation et d'optimisation. Par la suite, nous illustrerons graphiquement l'étude de la fonction d'objectif.

2. Voir Lipschutz, S (1991), Algèbre linéaire, McGraw-Hill , pp 255-256.



1- Formulation linéaire

Dans la section 2.3, nous avons développé la définition de chaque critère et sa formulation. Les mesures de distance entre simulation (S) et réalité (R) sont rappelées dans le tableau 13 .

Tableau 13 : mesures de distance

Temps de trajet moyen	$d_i^{tt} = \frac{\sum_j \overline{tt}_i^S \overline{tt}_i^R j}{\overline{tt}_i^R}$
Fréquence de temps de trajet	$d_i^P = \frac{\sum_{j=1}^P P_{j;i}^R j P_{j;i}^S P_{j;i}^R j}{\sum_{j=1}^P P_{j;i}^R}$
Volume à deux heures de pointe	$d_i^{N_{7i-9}} = \frac{\sum_j N_i^{7i-9S} N_i^{7i-9R} j}{N_i^R}$
Volume à une heure de pointe	$d_i^{N_{8i-9}} = \frac{\sum_{i=1}^P N_i^{8i-9S} N_i^{8i-9R}}{\sum_{i=1}^P N_i^R}$

Nous utilisons les notations suivantes :

$\overline{tt}_i$  : le temps de trajet moyen pour le groupe géographique i :

$P_{j;i}$  : la part des déplacements en zone i ayant un temps de trajet en tranches j .

$N_i^{7i-9}$  : le nombre de déplacements entre 7 heures et 9 heures du matin provenant des données de l'EGT.

$N_i^{8i-9}$  : le nombre de départs entre 8 heures et 9 heures (l'heure de pointe du matin) provenant de la matrice O-D de l'IAURIF.

Ces mesures de distance nous permettent de calculer les quatre critères suivants (voir tableau 14):

Tableau 14 : les quatre critères

Temps de trajet moyen : $C_1 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^{tt}$	$C_1 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{\sum_j \overline{tt}_i^S \overline{tt}_i^R j}{\overline{tt}_i^R}$
Distribution des temps de trajets : $C_2 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^P$	$C_2 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{\sum_{j=1}^P P_{j;i}^R j P_{j;i}^S P_{j;i}^R j}{\sum_{j=1}^P P_{j;i}^R}$
Volume pendant les 2 heures de pointe : $C_3 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^{N_{7i-9}}$	$C_3 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{\sum_j N_i^{7i-9S} N_i^{7i-9R} j}{N_i^R}$
Volume pendant l'heure de pointe : $C_4 = d_i^{N_{8i-9}}$	$C_4 = \frac{\sum_{i=1}^P N_i^{8i-9S} N_i^{8i-9R}}{\sum_{i=1}^P N_i^R}$

La part des déplacements (calculée à partir des données de l'EGT 91) suivant l'origine et la destination est mesurée par  $\mu_i$  ( $i=1,\dots,3$ ).

A partir de ces critères, nous présentons le critère général linéaire :

$$CG = \frac{[C_1 + C_2 + C_3 + C_4]}{4} \tag{2.18}$$

2- Estimation et calcul du minimum

L'estimation du critère général, par la méthode MCO en adoptant la forme (2.8) conduit aux résultats représentés dans les tableaux 15 et 16.

Tableau 15: résultats d'estimation

coefficients estimés	Valeurs	t Student
A	0; 0000908	0; 497
B	0; 414	3; 81 $\times 10^i 2$
C	0; 0419	0; 145
D	i 0; 00414	i 0; 199
E	1; 31 $\times 10^i 3$	0; 372
F	i 0; 0912	i 0; 117
G	3; 88 $\times 10^i 3$	0; 477
H	i 1; 36	i 4; 08 $\times 10^i 2$
P	0; 0127	2; 019
J	1; 301	3; 94 $\times 10^i 2$

Tableau 16: qualité d'ajustement

Coefficient de détermination $R^2$	0; 881
Coefficient de détermination ajusté $R^2_{ajusté}$	0; 874

Comme nous le savons, le coefficient de détermination  $R^2$  nous fournit un indicateur de la qualité d'ajustement réalisée par la régression multiple et dans notre cas nous avons obtenu un  $R^2$  assez élevé, ce qui constitue un bon résultat. Généralement nous utilisons un autre indicateur de qualité d'ajustement qui est le  $R^2_{ajusté}$ , sa valeur est très proche de  $R^2$  lorsque le nombre d'observations est élevé. Nous pouvons affirmer que la qualité d'ajustement est bonne car le  $R^2_{ajusté}$  est élevé (0; 874) :

Par conséquent, l'équation de régression est la suivante :

$$CG = 10^i 3(0; 0908^{12} + 414n^2 + 41; 9 \cdot 2 \cdot i 4; 14^1 n + 1; 31^1 \cdot i 91; 2 \cdot n + 3; 88^1 i 1360n + 12; 7 \cdot + 1301) \tag{2.19}$$

Abordons maintenant le problème de minimisation de cette fonction. La résolution du système de trois équations qui annulent les dérivées partielles de la fonction d'objectif, conduit aux résultats suivants :

$$p_{opt} = 8,73; n_{opt} = 1,87 \text{ et } \sigma_{opt} = 1,75: \tag{2.20}$$

En remplaçant ces valeurs optimales, nous obtenons :

$$CG_{min} = 5,93 \times 10^6. \tag{2.21}$$

D'autre part, la condition de second ordre est vérifiée (annexe 2) puisque :

$$\begin{aligned} & \geq 8ABC; 2A^2B^2; 2B^2C + 2B^2A; 2C^2B = 9; 25 \times 10^6 > 0 \\ & > 4BC; B^2 = 6; 13 \times 10^6 > 0 \\ & > C = 0,0419 > 0: \end{aligned} \tag{2.22}$$

La fonction (2.8) fournit, par conséquent, un bon ajustement de nos observations (base de données des simulations) et vérifie bien les conditions de convexité (les conditions du second ordre). Nous pouvons donc être assuré de l'existence d'un minimum global. Cette base comprend un critère général maximum ( $CG_{max}$ ) de 0,223 et un critère général moyen ( $CG_{moy}$ ) de 0,166.

Par ailleurs, nous illustrons ci-dessous la courbe du critère général estimé ( $CG_{estimé}$ ) et celle du critère général simulé ( $CG_{simulé}$ ) selon un tri croissant, ainsi que la courbe de la différence entre le critère simulé et estimé (Différence).

D'après ce graphique, la courbe de la différence qui mesure l'erreur entre ces deux critères, confirme la bonne qualité d'ajustement. D'autre part, l'erreur moyenne de cet ajustement (moyenne des différences de chaque simulation) qui est de  $3,17 \times 10^6$  en valeur absolue, est très satisfaisante.

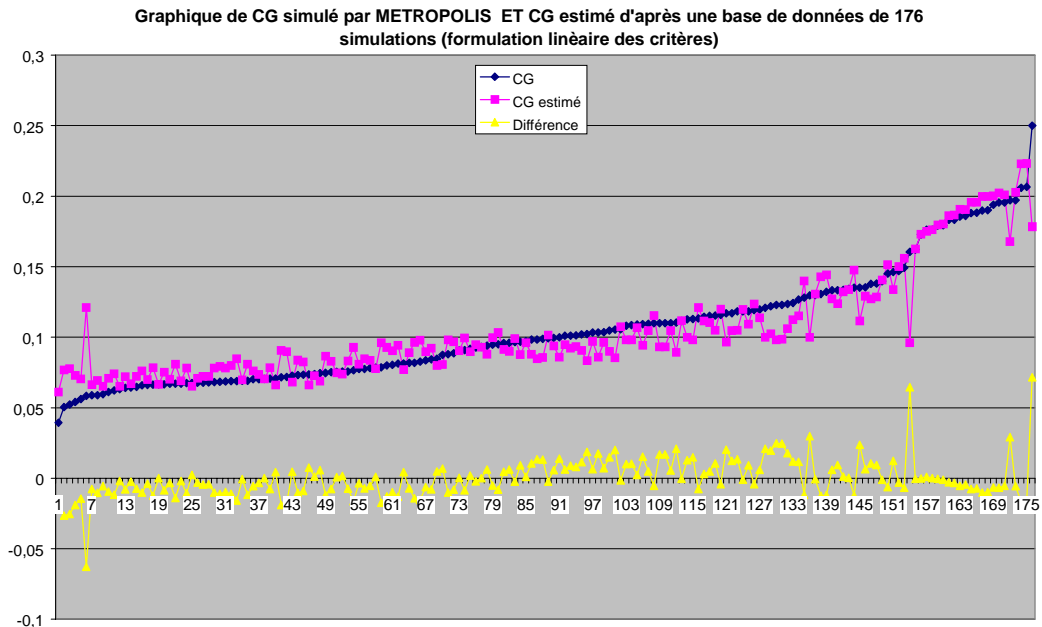


Figure 2 : les différentes mesures de CG

### 3- Représentation graphique

Suite à l'estimation de notre fonction d'objectif, nous nous proposons d'étudier la variation du critère général estimé  $\mathcal{C}_G$  par rapport à chacun des paramètres  $n_1; n$  et  $\cdot$  : Nous représentons graphiquement en 3 dimensions la courbe  $\mathcal{C}_G$  afin de visualiser cette variation et de localiser le minimum de cette fonction  $\mathcal{C}_G$ . Notre démarche consiste à se situer au minimum  $(n_{opt}; \cdot_{opt})$  et à tracer les 3 graphiques de  $\mathcal{C}_G$  (en 3 dimensions) en fonction de deux paramètres. En d'autres termes, nous traçons la courbe de  $\mathcal{C}_G$  en fonction de deux paramètres sachant que le dernier est optimal. Ces courbes sont  $\mathcal{C}_G(n_{opt}; \cdot)$ ;  $\mathcal{C}_G(n; \cdot_{opt})$  et  $\mathcal{C}_G(n; \cdot_{opt})$  : Nous présentons maintenant les caractéristiques et l'illustration d'un des graphiques. Les deux autres graphiques peuvent être obtenus selon la même méthode.

Notons que dans les graphiques,  $\mathcal{C}_{G_{est}}$  est le critère général estimé noté  $\mathcal{C}_G$ :

– Graphique  $\mathcal{C}_G(n; \cdot)$

Ce graphique représente  $\mathcal{C}_G$  en fonction des paramètres  $n$  et  $\cdot$  avec  $n_1 = n_{opt} = 8; 73$ : Nous n'avons pas jugé utile de représenter ce graphique car il est qualitativement semblable au graphique suivant.

– La fonction se réduit à la forme suivante :

$$CG = 1;34 + 0;415n^2 + 4;2 \times 10^i \cdot 2 \cdot i \cdot 1;393n + 0;0241 \cdot i \cdot 9;12 \times 10^i \cdot 2 \cdot n; \quad (2.23)$$

– Graphique  $CG(1; \cdot)$

Ce graphique représente  $CG$  en fonction des paramètres  $1$  et  $\cdot$  avec  $n = n_{opt} = 1;87$ . Il nous permet de visualiser la forme convexe de la fonction  $CG$ . La fonction se réduit à la forme suivante :

$$CG = 9;08 \times 10^i \cdot 5 \cdot 1^2 + 0;214 + 4;2 \times 10^i \cdot 2 \cdot 2 \cdot i \cdot 3;87 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 + 1;31 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 \cdot i \cdot 0;158 \cdot ; \quad (2.24)$$

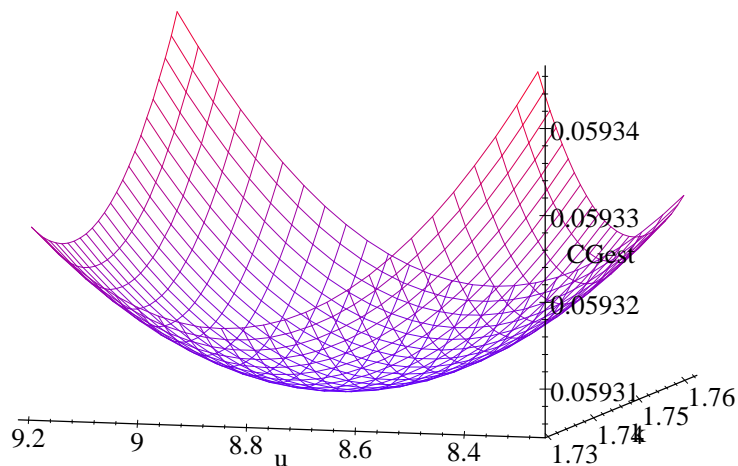


Figure 3:  $CG$  en fonction de  $1$  et  $\cdot$  sachant que  $n = n_{opt} = 1;87$

– Graphique  $CG(1; n)$

Ce graphique représente  $CG$  en fonction des paramètres  $1$  et  $n$  avec  $\cdot = \cdot_{opt} = 1;75$ . Nous n'avons pas jugé utile de représenter ce graphique car il est qualitativement semblable au graphique précédent. La fonction se réduit à la forme suivante :

$$CG = 9;08 \times 10^i \cdot 5 \cdot 1^2 + 0;415n^2 + 1;451 \cdot i \cdot 4;145 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 n + 6;175 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 \cdot i \cdot 1;516n; \quad (2.25)$$

### Interprétation

D'après ces 3 graphiques (dont un seul est représenté ici), nous observons que la forme convexe apparaît clairement, ce qui permet une visualisation du minimum global. En effet, la visualisation du critère général minimum qui est égal, dans notre cas, à  $5;93 \text{ E } 10^i \text{ }^2$  nous renseigne sur la variabilité des différents paramètres  $\cdot$ ;  $n$  et  $\cdot$ . Nous remarquons que  $\cdot$  varie dans un intervalle très étendu par rapport à  $n$  et  $\cdot$ : Les valeurs de  $\cdot$  nécessaires pour visualiser le minimum sont entre 2 et 14. Alors que pour les autres paramètres, cet intervalle n'est pas très étendu étant donné que pour le paramètre  $n$ , ces valeurs sont entre 1;8 et 1;9 et pour le paramètre  $\cdot$  ces valeurs sont entre 1;73 et 1;78. La variabilité de  $\cdot$  est donc de l'ordre de 137% tandis que la variabilité de  $n$  est de l'ordre de 5;5% et que celle de  $\cdot$  est de l'ordre de 2;86%: Le critère général est donc très peu sensible à la variation de  $\cdot$  et très sensible à la variation des paramètres  $n$  et  $\cdot$ :

Nous pouvons conclure que le critère général qui résume de manière synthétique la différence entre les simulations et les données empiriques (voir sous-section 3.2.2) est très peu sensible au niveau de l'homogénéité des individus représenté par le paramètre Logit du choix de l'heure de départ ( $\cdot$ ) et très sensible au facteur de croissance homothétique de la matrice O-D ( $n$ ) ainsi qu'au facteur multiplicatif de la capacité statique des arcs ( $\cdot$ ).

Par ailleurs et après avoir estimé la fonction du critère général en utilisant des données qui ont été mesurées à partir d'une formulation linéaire des critères, nous obtenons les différents minimums suivants:

Tableau 17: résultats estimés-simulés

Paramètres	Minimum simulés	Minimum estimés
$\cdot$	8	8; 73
$n$	1; 81	1; 87
$\cdot$	1; 57	1; 74
$CG_{\min}$	3; 94 $\text{ E } 10^i \text{ }^2$	5; 93 $\text{ E } 10^i \text{ }^2$

Notons que  $CG_{\min}$  simulé représente le minimum de  $CG$  à partir de la base de données des 176 simulations et le  $CG$  estimé représente le minimum trouvé après avoir optimisé la fonction d'objectif estimée ( $CG$ ). Les valeurs des trois paramètres  $\cdot$ ;  $n$  et  $\cdot$  sont comparables mais le  $CG_{\min}$  simulé présente une valeur relativement plus faible que le  $CG_{\min}$  estimé. D'autre part, les mesures d'erreur entre les résultats des simulations et les résultats des estimations sont consignées ci-dessous:

Tableau 18: mesure d'erreur

Erreur relative (en valeur absolue)	$5; 35 \text{ } \epsilon \text{ } 10^i \text{ } ^2$
Erreur moyenne (en valeur absolue)	$3; 17 \text{ } \epsilon \text{ } 10^i \text{ } ^6$

Nous considérons que l'erreur relative est la somme des différences entre le critère général simulé et estimé de chaque simulation, alors que l'erreur moyenne est la somme des différences entre le critère général simulé et estimé de chaque simulation, divisée par le nombre de simulations (erreur moyenne = erreur relative/176).

### 2.2.3 Critère quadratique

Nous avons utilisé une autre formulation des critères pour traiter le même problème. Nous présentons dans ce qui suit cette nouvelle formulation quadratique, puis les résultats d'estimation et d'optimisation, sans oublier leurs représentations graphiques et leurs interprétations.

#### 1- Formulation quadratique

La formulation quadratique diffère de la formulation linéaire dans la forme des mesures retenues. Nous conserverons les mêmes notations pour les variables. Cette formulation se présente tout d'abord par les mesures de distance entre les données de simulation (S) et les données empiriques (R) (tableau 19).

Tableau 19: mesure de distance

Temps de trajet moyen	$d_i^{tt} = \frac{(\overline{tt}_i^S - \overline{tt}_i^R)^2}{(\overline{tt}_i^R)^2}$
Fréquence de temps de trajet	$d_i^P = \frac{\sum_{j=1}^m P_{j;i}^R (P_{j;i}^S - P_{j;i}^R)^2}{\sum_{j=1}^m P_{j;i}^R}$
Volume à deux heures de pointe	$d_i^{N_{7i}^9} = \frac{(N_i^{7i}{}^9S - N_i^{7i}{}^9R)^2}{(N_i^R)^2}$
Volume à une heure de pointe	$d_i^{N_{8i}^9} = \frac{\sum_{i=1}^m N_i^{8i}{}^9S - \sum_{i=1}^m N_i^{8i}{}^9R}{\sum_{i=1}^m N_i^R}$

Nous avons utilisé les notations suivantes :

$\overline{tt}_i$  : le temps de trajet moyen pour le groupe géographique i :

$P_{j;i}$  : la part des déplacements en zone i ayant un temps de trajet en tranche j.

$N_i^{7i\ 9}$ : le nombre de déplacements entre 7 heures et 9 heures du matin provenant des données d'EGT.

$N_i^{8i\ 9}$ : le nombre de départs entre 8 heures et 9 heures (l'heure de pointe) provenant de la matrice O-D de l'IAURIF.

Nous utilisons ces mesures de distances pour calculer les critères définis dans le tableau 20.

Tableau 20 : les quatre critères

Temps de trajet moyen : $C_1 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^{tt}$	$C_1 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{(\overline{tt_i^S} - \overline{tt_i^R})^2}{(\overline{tt_i^R})^2}$
Distribution des temps de trajets : $C_2 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^P$	$C_2 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{\sum_{j=1}^P P_{j,i}^R (P_{j,i}^S - P_{j,i}^R)^2}{\sum_{j=1}^P P_{j,i}^R}$
Volume pendant les 2 heures de pointe : $C_3 = \sum_{i=1}^P \mu_i d_i^{N_{7i\ 9}}$	$C_3 = \sum_{i=1}^P \mu_i \frac{(N_i^{7i\ 9S} - N_i^{7i\ 9R})^2}{(N_i^R)^2}$
Volume pendant l'heure de pointe : $C_4 = d_i^{N_{8i\ 9}}$	$C_4 = \frac{\sum_{i=1}^P N_i^{8i\ 9S} \sum_{i=1}^P N_i^{8i\ 9R}}{\sum_{i=1}^P N_i^R}$

Dans ce tableau  $\mu_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) représente les parts des déplacements (calculées à partir des données de l'EGT 91) suivant l'origine et la destination.

A partir de ces critères, nous présentons le critère général quadratique :

$$CG = \frac{\mu}{4} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$



2- Estimation et calcul du minimum

L'estimation du critère général, par la méthode MCO et en adoptant la forme (2.8) conduit aux résultats représentés dans les tableaux 21 et 22.

Tableau 21 : résultats d'estimation

coefficients estimés	Valeurs	t Student
$A$	$0,83 \times 10^{-4}$	0,607
$B$	0,485	$3,65 \times 10^{-2}$
$C$	0,0436	0,156
$D$	$1,00487 \times 10^{-1}$	0,190
$E$	0,00118	0,462
$F$	$1,0982 \times 10^{-1}$	0,122
$G$	0,00577	0,36
$H$	$1,0616 \times 10^{-1}$	0,1
$I$	0,0312	0,916
$J$	1,55	$3,7 \times 10^{-2}$

Tableau 22 : qualité d'ajustement

Coefficient de détermination $R^2$	0,889
Coefficient de détermination ajusté $R^2_{ajusté}$	0,883

D'après la valeur élevée que nous avons obtenue pour le  $R^2_{ajusté}$ , nous pouvons affirmer que la qualité d'ajustement est bonne.

Par conséquent, l'équation de la droite de régression est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{CG} = & 10^{-3}(0,083n^2 + 485n + 43,6 \times 10^{-2}) + 4,871n \\
 & + 1,181 \times 10^{-1} + 98,2 \times 10^{-1}n + 5,771 \times 10^{-1}n \\
 & + 31,2 + 1550)
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Abordons maintenant le problème de minimisation de cette fonction. La résolution du système de trois équations qui annulent les dérivées partielles de la fonction d'objectif nous donne les résultats suivants :

$$n_{opt} = 8,63; \quad n_{opt} = 1,87 \text{ et } \cdot_{opt} = 1,63;
 \tag{2.28}$$

En remplaçant ces valeurs optimales, nous obtenons :

$$\boxed{CG_{\min} = 8;59 \text{ € } 10^i \text{ } ^2;} \quad (2.29)$$

D'autre part, la condition de second ordre est vérifiée (annexe 2) :

$$\begin{aligned} \geq & 8AB\theta_i + 2AP^2_i + 2B^2\theta + 2DE\theta_i + 2E^2\theta = 1;01 \text{ € } 10^i \text{ } ^5 > 0 \\ & 4B\theta_i + \theta^2 = 7;49 \text{ € } 10^i \text{ } ^2 > 0 \\ \leq & \theta = 4;36 \text{ € } 10^i \text{ } ^2 > 0: \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donc, la fonction (2.8) ajuste bien nos points (simulations) et vérifie les conditions de convexité (conditions du second ordre) qui assurent l'existence d'un minimum global. Cette base comprend un critère général maximum ( $CG_{\max}$ ) de 0;28 et un critère général moyen ( $CG_{\text{moy}}$ ) de 0;136.

Par ailleurs, nous illustrons dans la figure 4 la courbe du critère général estimé ( $CG_{\text{estimé}}$ ) et celle du critère général simulé ( $CG_{\text{simulé}}$ ) selon un tri croissant, ainsi que la courbe de la différence (Difference) entre le critère simulé et estimé.

D'après la figure, la courbe de la différence qui mesure l'erreur entre ces deux critères, confirme la bonne qualité d'ajustement. D'autre part, l'erreur moyenne de cet ajustement (moyenne des différences de chaque simulation) qui est de  $1;33 \text{ € } 10^i \text{ } ^3$  en valeur absolue, est très satisfaisante.

### 3- Représentation graphique

Nous présentons dans ce qui suit l'étude de la variation du critère général estimé  $CG$  par rapport aux paramètres  $n$  et  $\cdot$  : Notre démarche consiste à se situer au minimum  $i_{1_{\text{opt}}; n_{\text{opt}}; \cdot_{\text{opt}}}$  et à tracer les 3 graphiques de  $CG$  (en 3 dimensions) en fonction de deux paramètres sachant que le troisième paramètre est optimal. Ces courbes sont  $CG(i_{1_{\text{opt}}; n; \cdot})$ ;  $CG(1; n_{\text{opt}}; \cdot)$  et  $CG(1; n; \cdot_{\text{opt}})$  : Nous présentons maintenant les caractéristiques et l'illustration d'un des graphiques. Les deux autres graphiques peuvent être obtenus selon la même méthode.

Notons que dans les graphiques,  $CG_{\text{est}}$  est le critère général estimé noté  $CG$  :

- Graphique  $CG(n; \cdot)$

Ce graphique représente  $CG$  en fonction des paramètres  $n$  et  $\cdot$  avec

$i_1 = i_{1_{\text{opt}}} = 8;63$  : Ce graphique nous permet de visualiser la forme convexe de  $CG$  : La fonction se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}G = & 1;6 + 0;485n^2 + 4;36 \times 10^i \cdot 2 \cdot 2 \cdot j \cdot 1;66n \\
 & + 4;14 \times 10^i \cdot 2 \cdot j \cdot 9;82 \times 10^i \cdot 2 \cdot n:
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

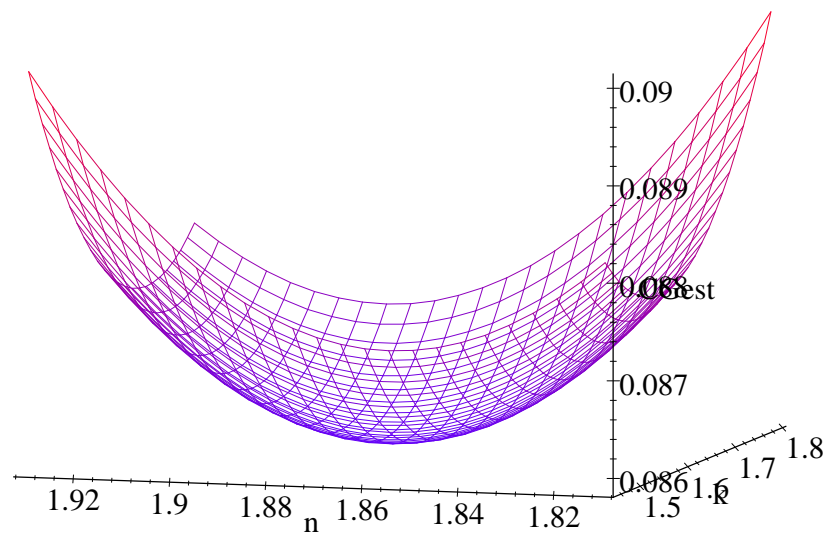


Figure 5:  $\mathcal{C}G$  en fonction de  $n$  et  $i$  sachant que  $i = i_{opt} = 8;63$

– Graphique  $\mathcal{C}G(i; \cdot)$

Ce graphique représente  $\mathcal{C}G$  en fonction des paramètres  $i$  et  $\cdot$  avec

$n = n_{opt} = 1;87$ : Nous n'avons pas jugé utile de représenter ce graphique car il est qualitativement semblable au graphique précédent. La fonction se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}G = & 8;3 \times 10^i \cdot 4 \cdot 1^2 + 0;225 + 4;36 \times 10^i \cdot 2 \cdot 2 \cdot j \cdot 3;36 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 \\
 & j \cdot 3;36 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 + 1;18 \times 10^i \cdot 3 \cdot 1 \cdot j \cdot 0;153 \cdot :
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

– Graphique  $\mathcal{C}G(i; n)$

Ce graphique représente  $\mathcal{C}G$  en fonction des paramètres  $i$  et  $n$  avec

$\alpha = \alpha_{opt} = 1;63$ : Nous n'avons pas jugé utile de représenter ce graphique car il est qualitativement semblable au graphique de la figure 5. Cependant, cette représentation est disponible dans le rapport intermédiaire relatif à la troisième année du projet QUATOR. La fonction se réduit à la forme suivante :

$$CG = 8;3 \times 10^{i-2} n^2 + 0;485n^2 + 1;72 \alpha - 4;87 \times 10^{i-3} n + 7;7 \times 10^{i-3} \alpha - 1;77n \quad (2.33)$$

### Interprétation

D'après ces 3 graphiques (dont un seul est représenté ici), nous observons que la forme convexe apparaît clairement, ce qui permet une visualisation du minimum global. En effet, nous avons visualisé le critère général minimum qui est égal à  $8;59 \times 10^{i-2}$  afin d'étudier la variabilité des différents paramètres  $\alpha$ ,  $n$  et  $\alpha$ . Nous remarquons que  $\alpha$  varie dans un intervalle étendu par rapport à  $n$  et  $\alpha$ . Les valeurs de  $\alpha$  nécessaires pour visualiser le minimum sont comprises entre 5 et 12. Alors que pour les autres paramètres, cet intervalle n'est pas très étendu étant donné que pour le paramètre  $n$ , ces valeurs sont entre 1;81 et 1;92 et que pour le paramètre  $\alpha$  ces valeurs sont entre 1;45 et 1;8. La plus grande variabilité est celle du paramètre  $\alpha$ ; elle est de l'ordre de 81%. Le paramètre  $\alpha$  à la seconde plus grande variabilité; elle est de l'ordre de 21;4%. Quant au paramètre  $n$ , il présente la plus faible variabilité.

Le critère général est donc très sensible à la variation du facteur de croissance homothétique de la matrice O-D ( $n$ ), peu sensible à la variation du facteur multiplicatif de la capacité statique des arcs ( $\alpha$ ) et très peu sensible à la variation du niveau d'homogénéité des individus qui est représenté par le paramètre Logit du choix de l'heure de départ ( $\alpha$ ):

Par ailleurs, et après avoir estimé la fonction du critère général en utilisant des données qui ont été mesurées à partir d'une formulation linéaire des critères, nous avons les différents minimums suivants :

Tableau 23: Résultats estimés-simulés

Paramètres	Minimum simulés	Minimum estimés
$\alpha$	1	8;63
$n$	1;75	1;87
$\alpha$	1;25	1;63
$CG_{min}$	$7;99 \times 10^{i-2}$	$8;59 \times 10^{i-2}$

Notons que  $CG_{\min}$  simulé représente le minimum de  $CG$  à partir de la base de données des 176 simulations et le  $CG$  estimé représente le minimum trouvé après avoir optimisé la fonction d'objectif estimée ( $\hat{CG}$ ). Dans le tableau 24, les valeurs des paramètres  $n$  et  $\cdot$  sont plus ou moins comparables alors que les valeurs du paramètre  $^1$  sont très éloignées. Ceci peut s'expliquer par l'existence d'erreurs de mesure ce qui influence peu notre critère général étant donné qu'il est très peu sensible à ce paramètre. Les valeurs de  $CG_{\min}$  estimé et simulé sont très proches.

Les erreurs entre les résultats des simulations et les résultats des estimations sont consignées ci-dessous :

Tableau 24 : Mesure d'erreur

Erreur relative (en valeur absolue)	$1,55 \times 10^{-2}$
Erreur moyenne (en valeur absolue)	$1,33 \times 10^{-3}$

Nous considérons que l'erreur relative est la somme des différences entre le critère général simulé et estimé de chaque simulation, alors que l'erreur moyenne est la somme des différences entre le critère général simulé et estimé de chaque simulation, divisée par le nombre de simulations (erreur moyenne = erreur relative/176).

Les deux procédures que nous avons examinées, fournissent des résultats très satisfaisants. Néanmoins, nous adopterons par la suite la seconde spécification étant donné qu'elle utilise des fonctions différentiables ce qui n'est pas le cas de la première spécification. De plus, dans le cas des critères quadratiques les résultats des estimations sont plus satisfaisants que ceux relatifs au modèle linéaire (voir annexe 3). Enfin, le coefficient de détermination ajusté est légèrement plus élevé dans le cas quadratique.

Nous décrivons dans les sections suivantes deux méthodes pour trouver de manière systématique le minimum de la fonction d'objectif  $CG$ . La première procédure est économétrique et la seconde est itérative.

## 2.3 Procédure économétrique

Suite à l'estimation de notre fonction d'objectif qui, rappelons le, représente le critère général calculé d'après les quatre critères qui mesurent la différence entre les simulations et la réalité en termes de temps de trajet, de distribution du temps de trajet, de nombre de départs entre 7h et 9h du matin et de nombre de départs entre 8h et 9h du matin, nous proposons une nouvelle procédure économétrique qui a pour but d'étudier la vitesse de convergence vers un minimum global. Nous avons appliqué cette nouvelle procédure à la base de données dans laquelle les critères sont calculés selon une formulation quadratique.

Dans ce qui suit, nous présentons le descriptif sous forme algorithmique de la procédure ECOMETRO. Une programmation de cette procédure a été réalisée dans le langage

PYTHON<sup>3</sup>. En...n, nous présentons l'utilisation générale de cette méthode sous forme d'un processus de pilotage de simulation.

### 2.3.1 Description de la méthode

Pour mener à bien notre étude, qui consiste à étudier la vitesse de convergence vers un minimum global, nous partons de la base de données comprenant 176 simulations. Chaque simulation représente un point caractérisé par les variables d'entrée de METROPOLIS  $^1; n; \cdot$  et par le critère général CG:

A partir de cette base de données, nous effectuons un tirage aléatoire de 12 points. Ensuite en utilisant ces 12 points nous estimons la fonction d'objectif retenue (voir sous-section 3.2.2).

$$CG = A \cdot ^1^2 + B \cdot n^2 + C \cdot ^2 + D \cdot ^1n + E \cdot ^1 \cdot + F \cdot n + G \cdot ^1 + Hn + I \cdot + J: \quad (2.34)$$

La régression multiple de CG sur 9 variables d'après la méthode MCO nous fournit les coefficients estimés de la fonction CG. L'optimisation de la fonction estimée nous donne  $^1_{opt}; n_{opt}; \cdot_{opt}$ . En remplaçant ces valeurs dans la fonction estimée nous obtenons alors la valeur du  $CG_{min}$ : En pratique, nous effectuerons une simulation pour la valeur du minimum.

L'étape suivante consiste à choisir parmi les points non tirés précédemment le point le plus proche du point minimum trouvé à partir de l'optimisation de la fonction d'objectif estimée  $CG$ : Nous choisissons le point  $(^1^a; n^a; \cdot^a)$  le plus proche du minimum trouvé  $(^1_{opt}; n_{opt}; \cdot_{opt})$  en terme de  $^1; n$  et  $\cdot$  en minimisant la distance euclidienne entre ces deux points.

Notons par  $A = (^1_{opt}; n_{opt}; \cdot_{opt})$  et par  $B = (^1^a; n^a; \cdot^a)$  deux points de  $\mathbb{R}^3$ . La distance euclidienne  $d(A; B)$  entre A et B est définie par l'égalité:

$$d(A; B) = \sqrt{(^1_{opt} - ^1^a)^2 + (n_{opt} - n^a)^2 + (\cdot_{opt} - \cdot^a)^2}: \quad (2.35)$$

Une fois que le point le plus proche du minimum est défini, nous l'ajoutons dans la base de données dans laquelle le tirage aléatoire initial a été effectué et nous réestimons la fonction d'objectif. Par exemple, après la première réestimation, nous aurons une base de données composée de 13 points (simulations). Nous présenterons cette procédure de manière simplifiée à l'aide d'un algorithme décrit dans le paragraphe suivant.

3. <http://www.python.org>

### 2.3.2 Algorithme

Cet algorithme permet de présenter d'une manière sommaire les différentes étapes que nous avons suivies afin d'appliquer cette nouvelle procédure.

#### ALGORITHME

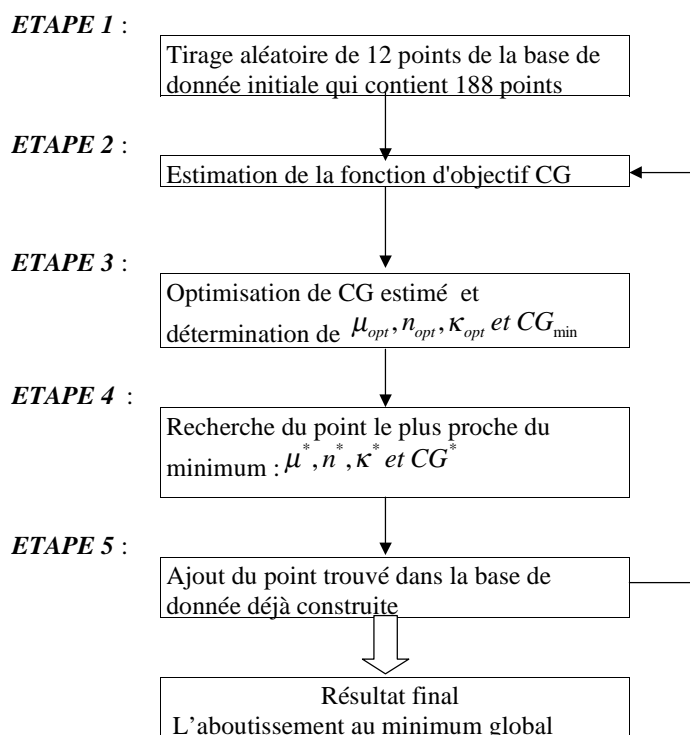


Figure 6 : algorithme de la procédure économétrique

La boucle (étape 5-étape 2) sera répétée jusqu'à ce que le minimum absolu de la base de données soit retrouvé. Par souci de rapidité et de précision, nous avons développé un programme spécifique (ECOMETRO). Ce programme nous a permis d'exécuter toutes ces étapes automatiquement et de stocker à chaque itération les résultats nécessaires pour l'analyse de la convergence vers le minimum global.

### 2.3.3 Résultats et analyse

Afin de mieux suivre et comprendre l'évolution de la procédure économétrique de recherche du minimum global, nous avons essayé d'extraire le maximum d'informations des résultats du programme.

Pour chaque itération (étape 2-étape 5), nous établissons les graphiques des courbes suivantes :

1. La courbe "CG" représente les valeurs du critère général CG des points optimaux trouvés à partir de l'optimisation de la fonction d'objectif estimée à une étape donnée.
2. La courbe "CG min" représente les CG des points qui ont les plus petites valeurs de CG de la base de données des simulations après chaque itération.
3. La courbe "CGsimul": représente l'ensemble des CG des points simulés les plus proches du  $CG_{min}$  en terme de  $\frac{1}{n}$  et  $\cdot$  ; et qui seront intégrés à l'étape suivante dans la nouvelle base pour la réestimation de la fonction d'objectif.
4. La courbe "CGsimEST" représente les valeurs des CG des points de la courbe "CGsimul" remplacés dans la fonction estimée CG.

La totalité des graphiques représentant ces quatre courbes pour chaque itération est au nombre de 1000. A titre d'exemple, nous représentons à la figure 7 l'un de ces graphiques.

Le premier point de la courbe "CG min", qui coïncide avec l'un des points de la courbe "CGsimul", nous renseigne sur le nombre de points (simulations) nécessaires pour trouver le minimum absolu de la base de données. Graphiquement, ceci revient à déterminer le nombre de points nécessaires pour que ces deux courbes se coupent pour la première fois. Dans notre exemple, ces deux courbes se coupent après l'ajout de 10 points au 12 déjà tirés aléatoirement, donc nous avons besoin de 22 points pour atteindre le minimum global réel. Nous remarquons d'autre part, que le minimum dépend du tirage aléatoire initial ; cela veut dire que lorsque nous tirons aléatoirement 12 points proches du minimum, la convergence est rapide et le nombre de points nécessaires n'est pas très élevé. Dans le cas contraire, nous aurons besoin de beaucoup plus de points pour atteindre la convergence vers un minimum.

Nous avons effectué 1000 itérations, dans lesquelles nous exécutons la boucle (Etape 2-Etape 5) ; nous avons donc stocké 1000 graphiques présentant chacun quatre courbes.

D'après ces 1000 graphiques, nous avons recueilli l'information sur le nombre de points nécessaires pour atteindre le minimum absolu.



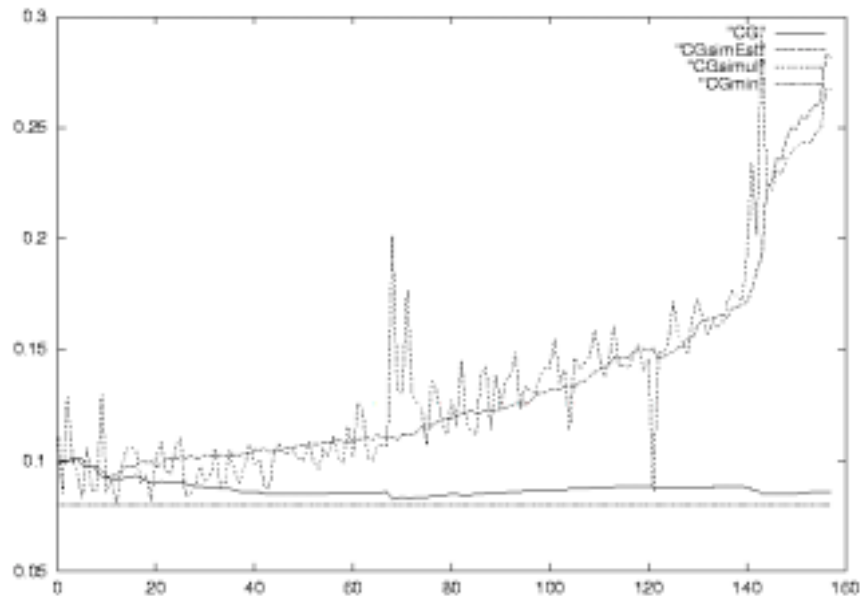


Figure 7 : les différentes courbes de CG

Pour mieux synthétiser et visualiser l'information, nous proposons de représenter la fonction de densité du nombre de points nécessaires pour atteindre le minimum. Le nuage des points de la fonction de densité suggère une forme d'une loi lognormale<sup>4</sup> de paramètres  $\mu$  et  $\frac{\sigma^2}{2}$ .

Soit  $X$  une variable suivant une loi lognormale, l'espérance et la variance de cette variable s'écrivent :

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad (2.36)$$

et

$$\text{Var}(X) = \exp\left(\sigma^2\right) \exp\left(2\mu + \frac{3\sigma^2}{2}\right); \quad (2.37)$$

4. Une variable  $X$  suit une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\frac{\sigma^2}{2}$  si  $X = \exp(Y)$  où  $Y$  est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\frac{\sigma^2}{2}$ .

Nous avons procédé à l'estimation non linéaire de cette fonction par la minimisation de la somme des erreurs en utilisant la méthode de descente et selon l'algorithme de Levenberg-Marquardt<sup>5</sup>. Le tableau suivant résume les résultats de l'estimation

Tableau 25 : résultats

Paramètres	Paramètres estimés	Ecart i type
1	3; 047	0; 982%
3/4	0; 725	3; 05%

La qualité d'ajustement est mesurée par les coefficients qui figurent dans le tableau 26.

Tableau 26 : coefficients d'ajustement

Erreur quadratique moyenne des résidus	$3; 04 \times 10^3$
Variance des résidus	$9; 27 \times 10^6$

---

5. Voir Antoniadis, A. et al.(1992) Régression non linéaire, Economica. pp 220-222.

D'après ces résultats, nous pouvons affirmer que la loi lognormale ajuste bien notre nuage de points, comme l'illustre la figure 8.

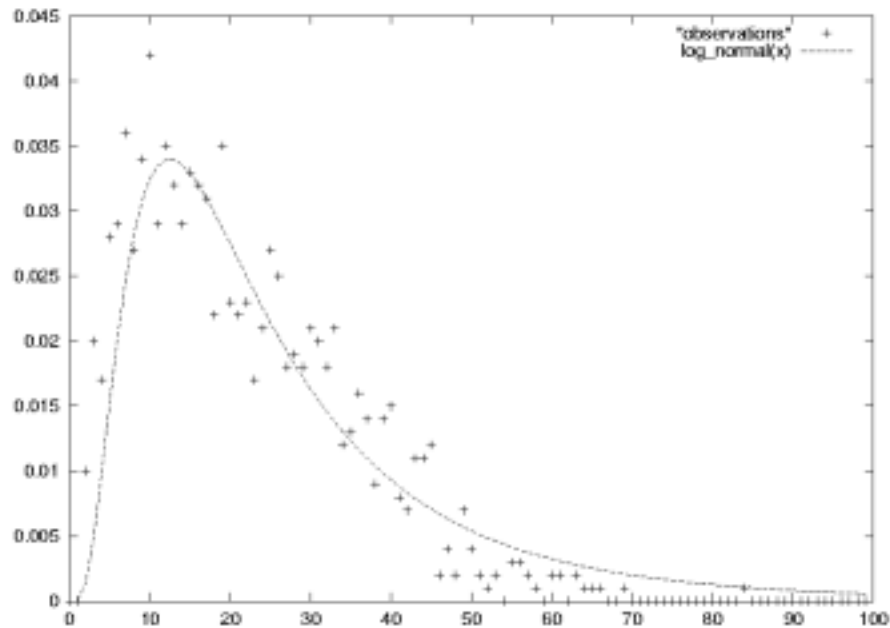


Figure 8 : densité du nombre de points nécessaires à l'estimation

D'après cette estimation, nous calculons la moyenne et la variance suivantes :

$$E(X) = 27,4$$

$$\sigma^2(X) = 22,8$$

La valeur moyenne du nombre de points nécessaires pour converger vers le minimum est presque 40 points (dont 12 points provenant du tirage aléatoire initial).

Pour compléter notre analyse, nous présentons l'étude du gain moyen et du gain marginal de la procédure économétrique. Nous nous proposons de définir le gain moyen en terme de CG comme étant une fonction du nombre de points nécessaires pour trouver le minimum. Cette fonction est caractérisée par l'équation suivante :

$$GAIN_{moy}(n) = \frac{CG_{moy} - CG(n)}{CG(n)} \quad (2.38)$$

Nous définissons par  $CG_{moy}$  le critère général moyen pour l'ensemble de la base de données (176 simulations) et par  $CG(n)$  le critère général moyen trouvé au bout de  $n$  points de simulation lors des 1000 tirages aléatoires.

Nous illustrons à la figure 9 la courbe de cette fonction.

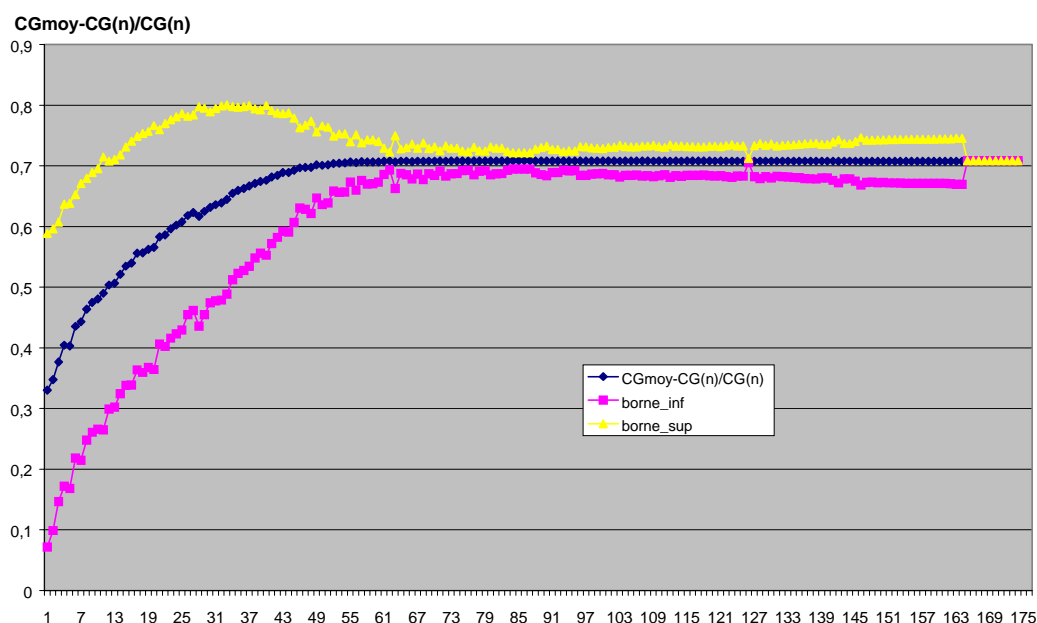


Figure 9: gain moyen de la méthode "ECOMETRO"

Nous définissons par  $borne\_inf$  (resp.  $borne\_sup$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) de la fonction  $GAIN_{moy}(n)$ . D'après cette courbe nous remarquons que le gain moyen augmente jusqu'à ce que le nombre de points se rapproche de 55 puis il se stabilise et tend vers 0,71. En effet, la valeur du critère moyen ( $CG_{moy}$ ) de la base de données contenant 176 simulations est égale à 0,136. D'autre part, le critère général ( $CG(n)$ ) trouvé au bout de  $n$  simulations, ne peut prendre comme valeur minimale que le minimum de la base de données qui est de 0,0799. Ce qui permet de détecter une asymptote horizontale d'équation  $y = 0,71$ :

Cette procédure économétrique nous a permis d'obtenir un gain moyen en terme de CG de 70% avec une variabilité (mesurée par l'écart type) décroissante au fur et à mesure que le nombre de simulations nécessaires augmente.

D'autre part, nous pouvons analyser le gain marginal en terme de CG et ce en le définissant comme une fonction du nombre de points nécessaires pour trouver le minimum. C'est la fonction caractérisée par l'équation suivante :

$$GAIN_{\text{marginal}}(n) = \frac{CG(n) - CG(n+1)}{CG(n+1)}; \quad (2.39)$$

Notons que  $CG(n)$  (resp.  $CG(n+1)$ ) représente le gain moyen après 1000 tirages aléatoires pour un nombre  $n$  (resp.  $n+1$ ) de simulations utilisées. La figure 10 nous renseigne sur l'évolution du gain marginal.

Nous définissons par  $borne\_inf$  (resp.  $borne\_sup$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) du gain marginal. Remarquons que lorsque le nombre de simulations est petit (inférieur à 10), le gain marginal est élevé. Mais il décroît au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente. Le gain marginal se rapproche de 0 lorsque le nombre de simulations dépasse 55, sa variabilité s'annule presque partout lorsque le nombre de simulations est supérieur à 70:

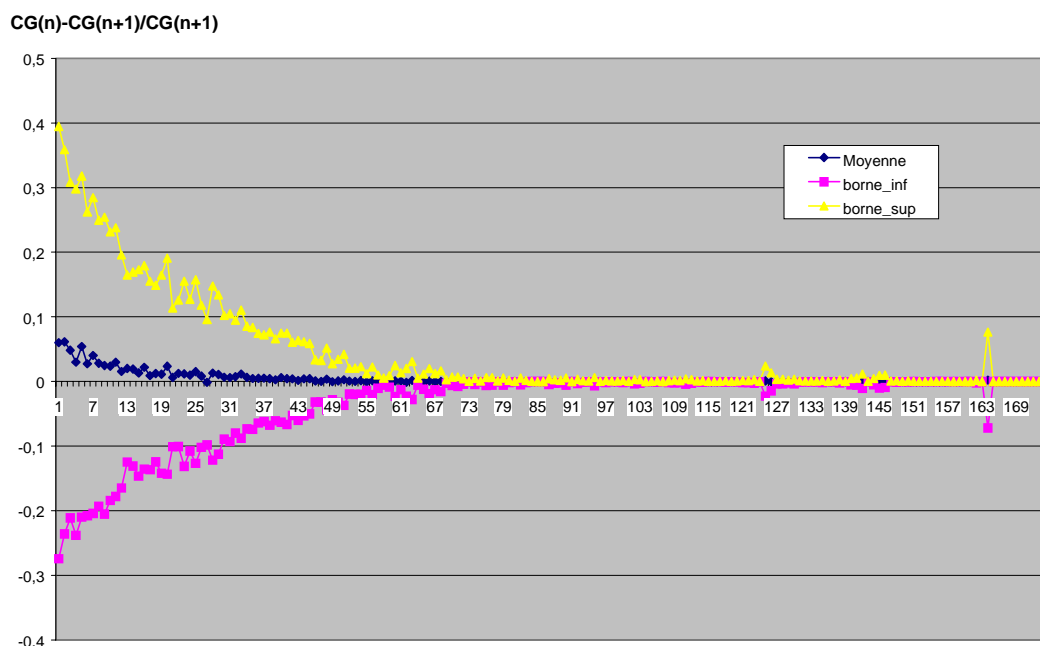


Figure 10 : gain marginal de la méthode "ECOMETRO"

### 2.3.4 Procédure de pilotage des simulations

L'objet du développement de cette procédure économétrique est de la rendre opérationnelle pour un utilisateur qui s'apprête à calibrer un modèle. En effet, étant donné que les productions des simulations sont coûteuses, nous avons essayé de concevoir une méthodologie qui nous permettra à la fois de limiter le nombre de simulations à produire et de caler les paramètres de notre modèle.

Cette procédure de pilotage de simulations consiste à suivre les étapes suivantes :

Etape 1

Déterminer les coordonnées  $(x_i; y_i; z_i)$  de 12 points; pour cela nous pouvons tirer aléatoirement des valeurs de chacun des paramètres  $x_i; y_i$  et  $z_i$  en respectant leurs domaines de variation. Nous pouvons utiliser une autre méthode qui consiste à construire une grille pour chacun des paramètres en précisant la valeur de départ, la valeur finale et le pas et en définissant la règle d'arrêt ensuite choisir 12 points éloignés les uns par rapport aux autres. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour déterminer les points de départ.

Etape 2

Une fois que les coordonnées des points sont définies, nous effectuons les 12 simulations correspondantes avec METROPOLIS.

Etape 3

Les résultats de ces simulations nous permettent d'obtenir une base de données composée de 12 points; chacun est caractérisé par  $(x_i; y_i; z_i)$  et  $CG_i$ :

Etape 4

Nous estimons une fonction convexe et déterminons son minimum. Nous obtenons  $(x_{opt}; y_{opt}; z_{opt})$  et  $CG_{min}$ :

Etape 5

Nous introduisons  $(x_{opt}; y_{opt}; z_{opt})$  issus de l'optimisation (étape 4) dans l'outil de simulation METROPOLIS qui nous fournira un autre  $CG_{min}^0$ :

Etape 6 <sup>a</sup>

Le point  $(x_{opt}; y_{opt}; z_{opt})$  ainsi que la valeur  $CG_{min}^0$  qui lui correspond sont alors ajoutés à la base de données initiale (étape1).

Etape 7

Réestimation de la fonction avec la nouvelle base de données.

Etape 8

Reprise des étapes 4-7 jusqu'à ce que nous atteignons le critère d'arrêt prédéfini par l'opérateur.

La programmation de cette procédure est immédiate; elle nous permet, par ailleurs, de réduire le nombre de simulations à effectuer et accélère la procédure de calage des

paramètres de notre modèle. L'architecture de la procédure de pilotage est représentée dans la figure 11.

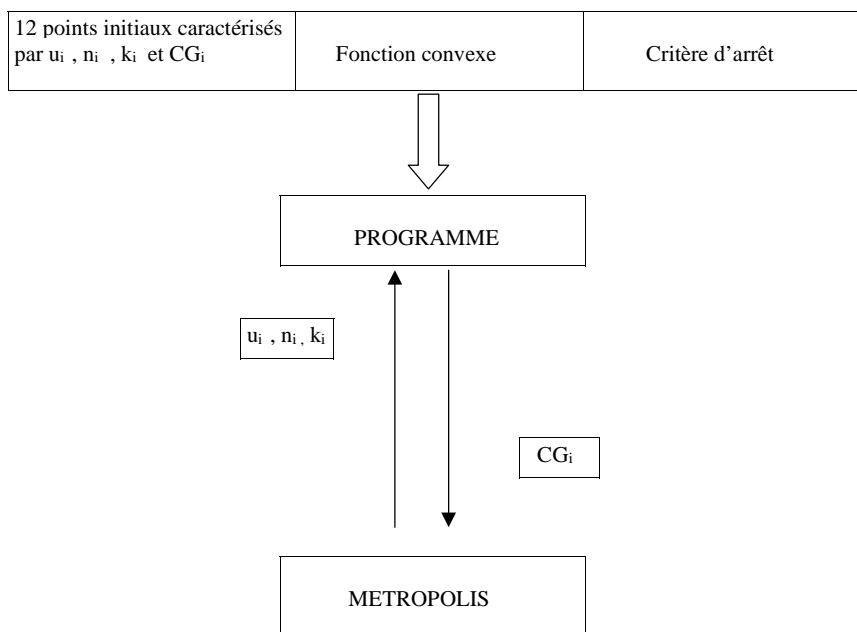


Figure 11 : architecture de la procédure de pilotage des simulations

### 2.3.5 Procédure de recherche itérative

Nous proposons, dans la section suivante, de présenter une nouvelle méthode avec laquelle nous analysons la recherche du minimum global à partir d'une base de données. Cette méthode " itérative" se différencie de la méthode économétrique puisque ici nous n'essayons pas d'estimer la fonction d'objectif (CG), mais nous nous basons sur les observations réelles. Nous utilisons à nouveau la base de données composée de 176 simulations. Chaque simulation représente un point de coordonnées  $(n_i; k_i)$  auquel est associé un CG:

Dans un premier temps, nous exposons la méthode que nous avons suivie. Le schéma et l'explication de l'algorithme feront l'objet d'une autre sous-section. Ensuite, après avoir établi le programme BIMETRO, nous avons jugé plus judicieux de vérifier la mise en marche du programme. Ensuite nous présentons les résultats fournis par ce programme.

### 2.3.6 Description de la méthode

La méthodologie consiste à générer un processus itératif d'optimisation dans laquelle nous poursuivons les étapes suivantes :

1. Nous prenons un point (une simulation) caractérisé par  ${}^1; n; \cdot$  et CG:
2. Nous choisissons un des paramètres parmi  $f^1; n; \cdot g$ .
3. Nous choisissons un pas (sens positif ou négatif).
4. Après avoir fait varier le paramètre sélectionné dans l'étape 2 par le pas choisi dans l'étape 3 (dans l'un des sens), nous obtenons un nouveau point. Nous cherchons le point le plus proche. Pour ce faire, nous utilisons la fonction de distance elliptique (2.40) pour trouver le point le plus proche dans l'espace  $({}^1; n; \cdot)$  : Soit le point a de coordonnées  $({}^1_a; n_a; \cdot_a)$  et le point b de coordonnées  $({}^1_b; n_b; \cdot_b)$  ; alors a est le point le plus proche de b si la distance  $[d(a; b)]$  est minimale. Cette fonction de distance se présente comme suit :

$$[d(a; b)] = \frac{q}{({}^1_b \text{ j } {}^1_a)^2 g_1 + (n_b \text{ j } n_a)^2 g_n + (\cdot_b \text{ j } \cdot_a)^2 g_{\cdot}} \quad (2.40)$$

où  $g_1; g_n$  et  $g_{\cdot}$  normalisent et intègrent les préférences relatives à  ${}^1; n$  et  $\cdot$  :

Si notre ordre de préférence est  ${}^1; n$  puis  $\cdot$ , nous utilisons l'ordre: (3; 2; 1); pour calculer  $g_1; g_n$  et  $g_{\cdot}$  de la manière suivante :

$$g_1 = \frac{i_1 + \frac{3}{10}^{\mathbb{C}}}{\max {}^1 \text{ j } \min {}^1}; \quad (2.41)$$

$$g_n = \frac{i_n + \frac{2}{10}^{\mathbb{C}}}{\max n \text{ j } \min n}; \quad (2.42)$$

$$g_{\cdot} = \frac{i_{\cdot} + \frac{1}{10}^{\mathbb{C}}}{\max \cdot \text{ j } \min \cdot}; \quad (2.43)$$

Avec  $\max {}^1$  : le maximum du paramètre  ${}^1$  dans la base de 176 simulations.(de même pour les paramètre n et  $\cdot$ ),

et  $\min {}^1$  : le minimum du paramètre  ${}^1$  dans la base de 176 simulations.(de même pour les paramètre n et  $\cdot$ ).

Les valeurs maximales et minimales de ces paramètres ...gurent dans le tableau 27 :



Tableau 27 : valeurs Max et Min des paramètres

Paramètres	Min	Max
$\lambda$	0; 5	17; 49
$n$	1; 2	2; 2
$\cdot$	0; 75	2; 75

Si nous coupons par un plan la surface représentée par l'équation (2.40), nous obtenons des lignes de niveaux en formes elliptiques comme l'illustre la figure ci-après qui présente une coupe avec  $\lambda$  constant.

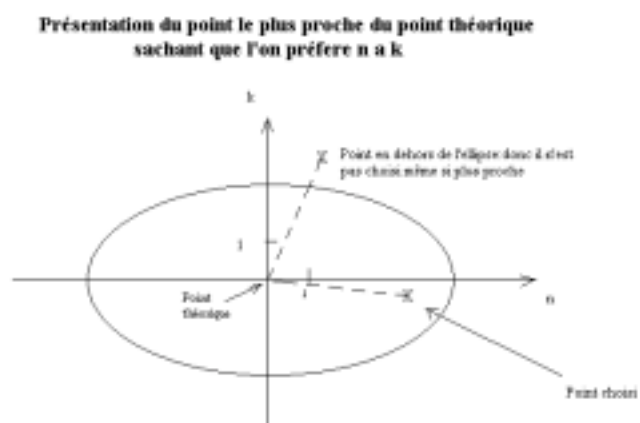


Figure 12: choix d'un point selon une distance elliptique

5. Après avoir choisi le point le plus proche et connaissant son CG, nous le comparons avec le CG du point initial et nous retenons le point qui a la plus petite valeur de CG.
6. Si la variation du paramètre précédent dans ce sens ne donne pas un résultat meilleur en terme de CG; nous reprenons ce que nous avons fait précédemment en ajoutant un pas dans le sens contraire. Si dans ce sens aussi, nous n'obtenons pas un résultat meilleur en terme de CG, nous retenons finalement le point initial.
7. A partir du point retenu précédemment, nous avons fait varier un autre paramètre du même pas et nous avons repris les étapes 4-6.
8. Nous refaisons les étapes 4-6 après avoir déterminé le point à retenir dans l'étape 7.

9. Dans le cas où nous ne trouvons pas un résultat meilleur (CG plus faible) pour tous les paramètres dans toutes les directions, nous divisons le pas choisi par deux : c'est le principe de la méthode de la bisection.
10. L'étape 8 est reprise le nombre nécessaire de fois jusqu'à ce que le pas soit inférieur au seuil prédéterminé : 0,001.

En fait, nous définissons le nombre d'itérations comme étant le nombre nécessaire pour trouver le meilleur point en terme de CG (nombre de fois où nous avons changé de point). Par la suite, nous nous proposons de déterminer le nombre d'itérations ainsi que le nombre de points (simulations) nécessaires pour trouver le minimum global.

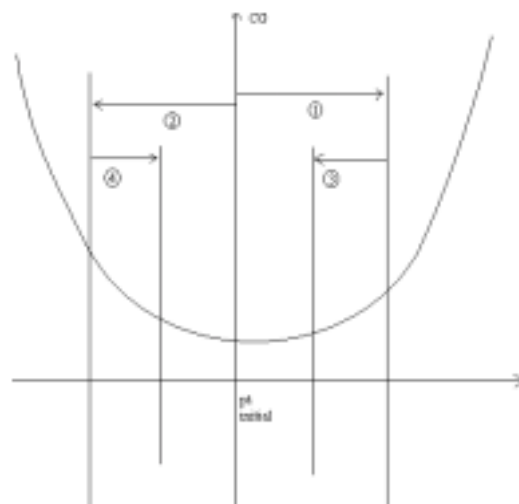


Figure 13 : méthode de bisection

### 2.3.7 L'algorithme

Après l'illustration du schéma qui décrit brièvement les étapes qui ont été suivies dans l'algorithme, nous présentons l'explication des fonctions spécifiques introduites afin de faciliter les tâches répétitives. Ensuite, nous exposons le programme principal qui nous permettra d'exécuter les procédures introduites dans l'algorithme.

Schéma

Nous présentons dans ce schéma les plus grandes étapes que nous avons suivies pour faire l'algorithme puis la programmation de la procédure itérative. L'explication détaillée de ces étapes suit ce schéma.

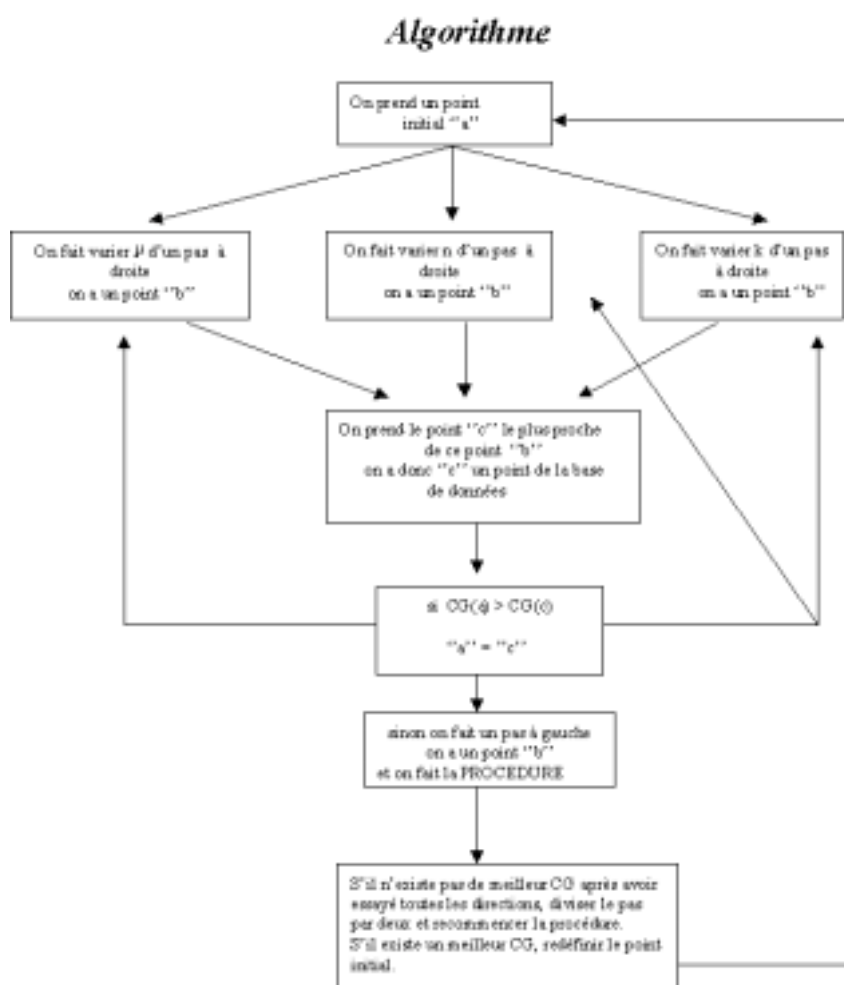


Figure 14 : algorithme de la procédure itérative

Description des fonctions du programme BIMETRO

Les fonctions introduites dans le programme, sont au nombre de sept. Voici leurs descriptions :

1. Fonction "min" : cherche la valeur minimum.
2. Fonction "max" : cherche la valeur maximum.

3. Fonction "compteur" : compte le nombre d'itérations (nous définissons une itération, comme la procédure par laquelle on part d'un point jusqu'au moment où on trouve un CG inférieur à celui du départ).
4. Fonction "distance" : on rentre deux points chacun défini par  $(x; y; z)$  et on calcule la distance euclidienne qui les sépare.
5. Fonction "test" : on rentre deux points et on teste si la valeur du CG du deuxième point est inférieure à celle du premier ; si c'est le cas, on remplace le premier point par le deuxième (utilisation de la fonction distance).
6. Fonction "ptproche" (point proche) : on rentre un point et la fonction nous fournit le point le plus proche en comparant avec tous les autres points du tableau.
7. fonction "trouve" : on rentre un point et un pas. On calcule les préférences pour un paramètre sous forme de poids selon la formule suivante :

$$\text{poids}[i] = ((\text{sens}[i]=10) + 1) \cdot f[i]; \quad (2.44)$$

avec  $i = 0; 1; 2$  (où  $i$  représente les colonnes du tableau :  $x; y; z$ ). Les poids  $\text{sens}[i]$  et les facteurs de normalisation  $f[i]$  sont définis dans le programme principal.

Pour une explication plus détaillée nous allons prendre comme ordre de préférence  $x$  puis  $y$  et un pas égal à 8. Nous partons d'un point initial  $a$  et nous augmentons la valeur de son paramètre  $x$  d'un pas égal à 8. Nous appelons alors ce nouveau point  $b$ . Nous cherchons le point  $c$  le plus proche de  $b$  (à l'aide de la fonction `ptproche`). Nous testons si la valeur du CG du point  $c$  est inférieure à celle du point  $a$  (fonction `test`). Si c'est le cas, nous remplaçons  $a$  par  $c$  et nous passons au deuxième paramètre  $y$ . Dans le cas contraire, nous reprenons les paramètres du point initial  $a$  et nous diminuons la valeur du premier paramètre  $x$  du pas initial de valeur 8. Nous enregistrons la nouvelle valeur dans  $b$ . Nous cherchons le point  $c$  le plus proche de  $b$  puis nous testons. Nous revenons au point initial  $a$  si nous n'avons pas trouvé de meilleur CG; nous considérons dans ce cas que le point  $a$  possède le meilleur CG. Nous passons alors au deuxième paramètre  $y$ , nous augmentons le point  $a$  suivant ce deuxième paramètre  $y$  du pas désiré (c'est à dire de 8). Nous enregistrons la nouvelle valeur dans  $b$  puis nous cherchons le point  $c$  le plus proche de  $b$ ; Nous comparons la valeur des CG (fonction `test`) : si le point  $c$  est meilleur (c'est à dire a un meilleur CG), nous passons au troisième paramètre  $z$ ; sinon, nous diminuons suivant le deuxième paramètre  $y$  du pas désiré (8); nous enregistrons la nouvelle valeur dans  $b$ ; nous cherchons le point  $c$  le plus proche de  $b$ . Puis nous effectuons de nouveau le même raisonnement pour le troisième paramètre  $z$ . Si le point initial n'a pas été changé après ces 3 itérations, la fonction retourne la valeur 0; sinon elle retourne 1.

### Description du programme principal

Le programme BIMETRO écrit en langage C permet de prendre un tableau de valeurs ordonnées selon  $1; n; \cdot$  et CG, issues d'un tableau Excel<sup>6</sup>. Nous demandons à l'utilisateur de rentrer le numéro de ligne du point de départ. Le programme calcule les facteurs de normalisation  $f[i]$  suivant la formule :

$$f[i] = 1/(\max(i) - \min(i)); \quad (2.45)$$

avec  $i = 0; \dots; 2$  ( $i$  représente les colonnes du tableau:  $1; n; \cdot$  ).

L'utilisateur introduit ensuite le sens désiré selon le système : 3 pour le plus important et 1 pour le dernier en prenant soin de ne pas répéter deux fois le même chiffre, par exemple si nous voulons comme ordre de préférence  $1; n; \cdot$  nous rentrerons  $\text{sens}[0] = 3$ ,  $\text{sens}[1] = 2$ ,  $\text{sens}[2] = 1$ , puis le pas souhaité normalisé c'est à dire compris entre un et dix avec, 10 pour l'intervalle tout entier et donc un pour le dixième. En...n, nous appelons la fonction "trouve" : si la valeur retournée est 0, nous divisons le pas par 2; dans le cas contraire (si la valeur retournée est 1), nous continuons de chercher le meilleur CG à partir du nouveau point trouvé. Dès que le pas est inférieur à 0,001, nous affichons à l'écran le point trouvé qui a le meilleur CG.

### Vérification de la mise en marche du programme

La vérification de la mise en marche du programme BIMETRO est une étape primordiale dans notre travail. Afin de s'assurer de l'efficacité du programme nous l'avons testé sur une fonction convexe.

Pour cela, nous avons pris la fonction parabolique suivante :

$$F(x; y; z) = (x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2; \quad (2.46)$$

Nous avons généré 1000 points uniformément répartis sur le cube défini par  $[0,10]$ ,  $[0,10]$ ,  $[0,10]$ . Dans ce cas,  $F(x; y; z)$  représente notre CG. Ensuite nous avons exécuté ce programme, en utilisant comme "input" le fichier de données déjà créé.

Nous avons pu constater après cette exécution que pour tous les points de départ nous arrivons au  $CG_{\min}$  de la base de données, nous pouvons donc considérer que le programme est bien opérationnel.

6. Séparées par des tabulations et écrites avec des points (et non des virgules ).

### 2.3.8 Résultats et analyse

Après plusieurs utilisations de ce programme, nous avons obtenu les résultats qui figurent dans les tableaux de sortie du programme (voir annexe 5). En effet, les résultats se composent de 9 tableaux où figurent des ordres de préférences différents pour les paramètres ainsi que des pas différents. Dans chacun des tableaux figurent les valeurs de  $\lambda$ ;  $n$ ,  $\sigma$  et CG initiaux et finaux ainsi que le nombre d'itérations et le nombre de points nécessaires pour aboutir à un minimum.

Pour mieux décrire le contenu informationnel qui figure dans ces tableaux (5), nous présentons les 9 tableaux synthétiques suivants ainsi que les 9 fonctions de densité.

Tableau 28 : résumé des résultats

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 1

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,10807131	2,20	7,95
écart-type	0,04637392	1,48	3,48

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 2

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,10931901	2,20	7,39
écart-type	0,04686831	1,32	2,72

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 3

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08615495	2,20	18,09
écart-type	0,00999776	1,44	2,89

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 4

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,09514072	2,20	6,77
écart-type	0,03396019	1,44	2,52

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 5

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08559128	2,20	15,86
écart-type	0,00302185	1,42	3,35

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 6

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08556551	2,20	17,21
écart-type	0,00439666	1,36	3,14

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 7

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08805059	2,55	7,90
écart-type	0,01404935	1,48	2,95

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 8

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08083444	2,20	15,75
écart-type	0,00122983	1,67	3,57

Moyenne et écart-type pour la fonction de densité 9

	C G final	nb itérations	nb pts nécessaires
moyenne	0,08064757	2,20	17,69
écart-type	0,00118702	1,58	4,50

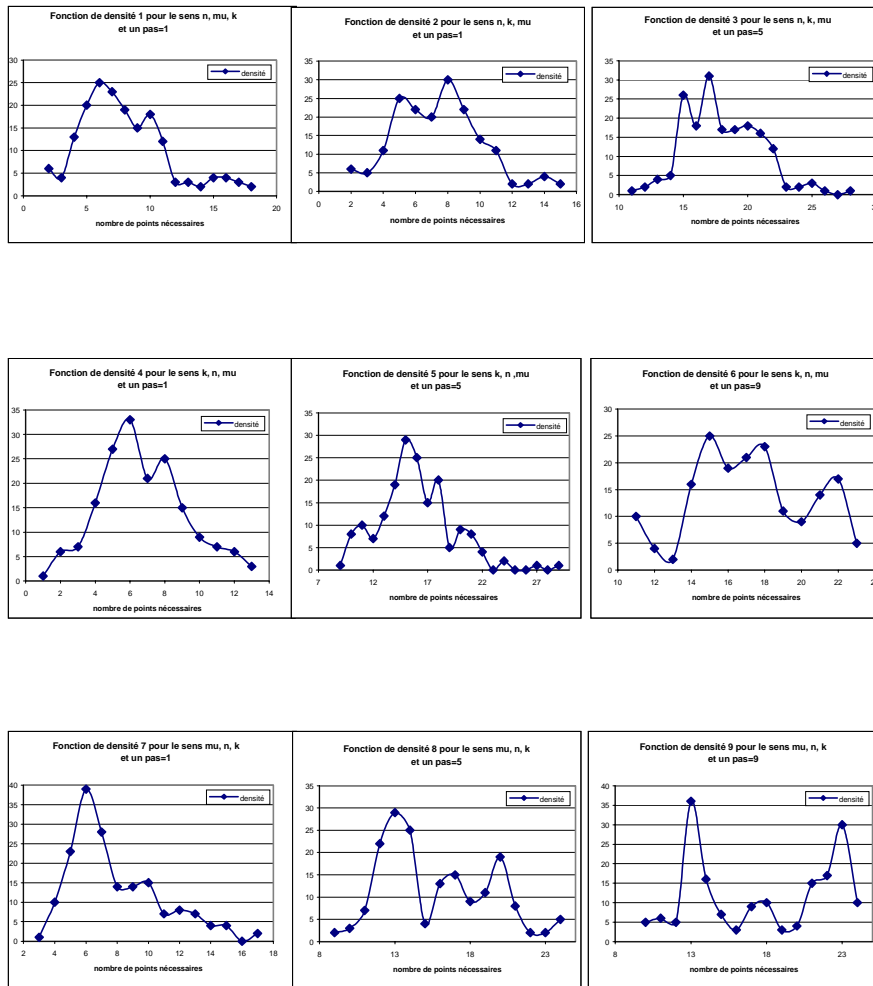


Figure 15 : les fonctions de densité

Nous avons essayé cette procédure itérative en prenant à chaque fois des préférences différentes pour les paramètres ainsi que des pas différents. Les 9 graphiques précédents illustrent les fonctions de densité du nombre de points nécessaires pour aboutir à un minimum. La fonction de densité globale est caractérisée par les valeurs reprises dans le tableau 29.



Tableau 29 : valeurs globales

	CG global	nb d'itération	nb pts nécessaires
moyenne	0,091	2,24	12,7
écart type	0,0179	1,47	3,24

La courbe de cette fonction de densité est donnée à la figure 16.

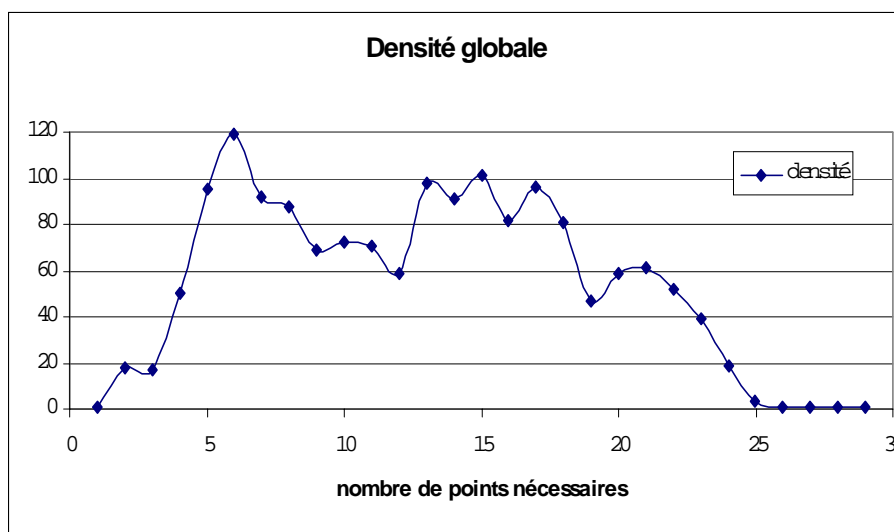


Figure 16 : fonction de densité globale du nombre de points nécessaires

Nous pouvons donc voir qu'avec cette méthode nous avons besoin de plusieurs simulations, en moyenne 13, pour trouver le minimum global, ce qui réduit le nombre de simulations nécessaires pour cette fonction.

Néanmoins nous n'obtenons pas toujours le minimum pour toute condition initiale et toute valeur initiale du pas. En effet, il est nécessaire de changer le sens plusieurs fois et de faire varier le pas, pour trouver le CG minimum global<sup>7</sup>.

D'autre part, la méthode itérative nous permet d'étudier le gain moyen en terme de CG: Nous définissons par  $CG_{moy}$  le critère général moyen pour l'ensemble de la base de données (176 simulations) et par  $CG(n)$  le critère général moyen trouvé au bout de  $n$  points de simulations. D'après notre base de données, le  $CG_{moy} = 0,137$ :

7. Ceci peut s'expliquer d'une part, par la préférence donnée par le sens qui implique que le point le plus proche ne soit pas le même à chaque fois. D'autre part, par le pas puisqu'il est divisé par deux lorsqu'aucun point ne convient, et donc nous pouvons sauter un point qui aurait pu nous intéresser.

Nous dé...nissons alors le gain moyen en terme de CG comme une fonction qui dépend du nombre de points nécessaires pour trouver le minimum. Cette fonction est caractérisée par l'équation suivante :

$$GAIN_{moy}(n) = \frac{CG_{moy} - CG(n)}{CG(n)}$$

Nous illustrons à la ...gure 17 la courbe de cette fonction.

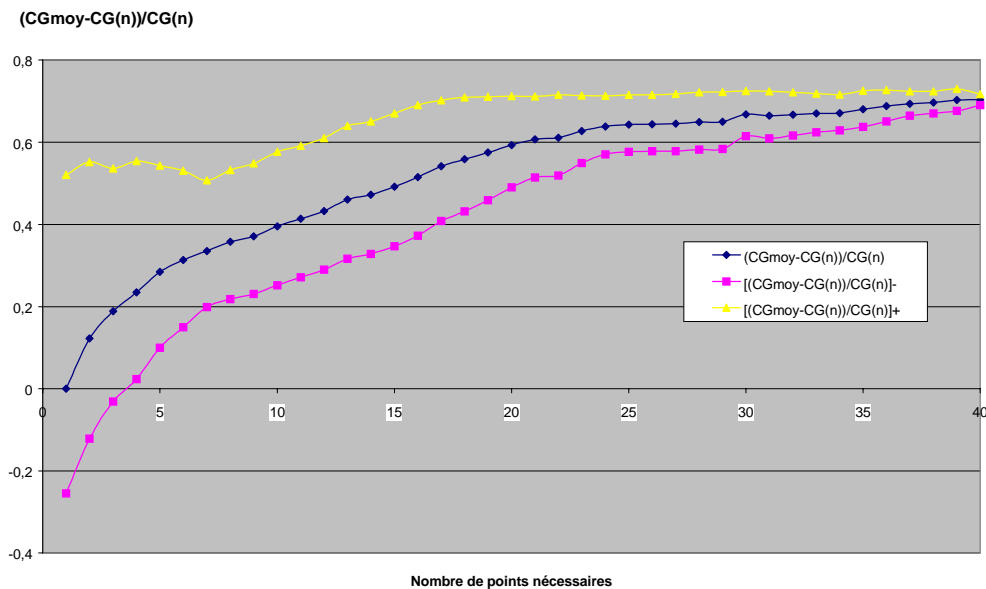


Figure 17 : gain moyen de la méthode "BIMETRO"

Nous dé...nissons par  $\frac{CG_{moy} - CG(n)}{CG(n)}$  (resp.  $\frac{CG_{moy} - CG(n)}{CG(n)}$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) de la fonction  $GAIN_{moy}(n)$ . D'après cette courbe nous remarquons, comme attendu, que le gain moyen de cette méthode augmente avec le nombre de points utilisés. La procédure atteint un niveau satisfaisant lorsque le  $GAIN \geq 0,7$  cas où le nombre nécessaire de points s'approche de 40. En effet, la valeur du critère moyen ( $CG_{moy}$ ) de la base de données contenant 176 simulations est égale à 0,137. La valeur minimale que peut prendre le critère général moyen ( $CG^*(n)$ ) trouvé au bout de n points de simulations est la même que celle du minimum de la base de données qui est égale à 0,0799. Donc la courbe du gain moyen présente une asymptote horizontale d'équation  $y = 0,71$ :

Cette procédure itérative nous a permis d'obtenir un gain moyen en terme de CG presque égale à 70% avec une variabilité (mesurée par l'écart-type) décroissante au fur et à mesure que le nombre de simulations nécessaires augmente.

D'autre part nous pouvons analyser le gain marginal en terme de CG: Nous pouvons le définir en fonction du nombre de points nécessaires pour trouver le minimum. C'est la fonction caractérisée par l'équation suivante :

$$GAIN_{marginal}(n) = \frac{CG(n) - CG(n+1)}{CG(n+1)} \quad (2.47)$$

Le graphique ci-dessous nous renseigne sur l'évolution du gain marginal ainsi que sur sa variabilité.

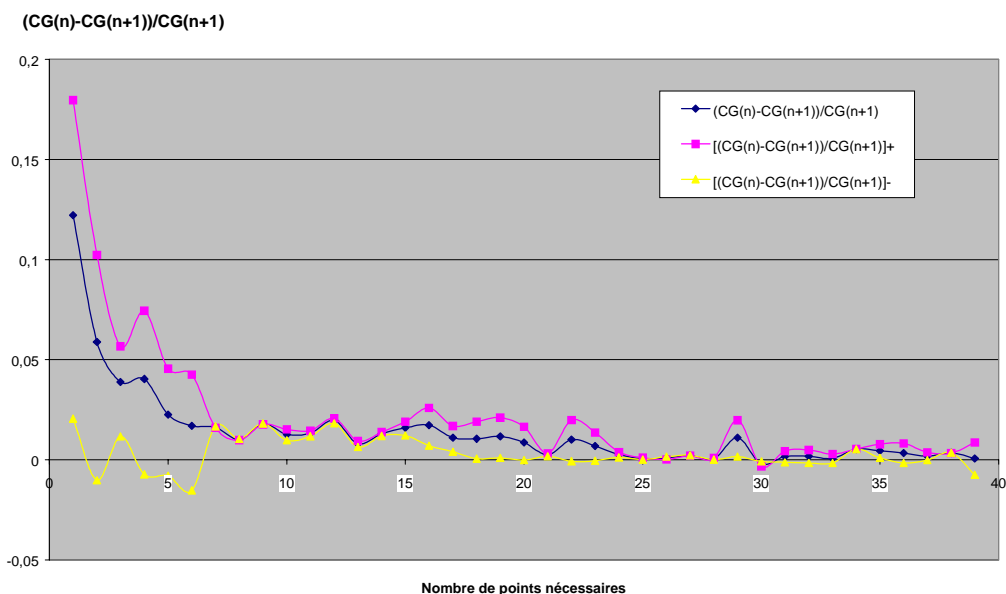


Figure 18 : gain marginal de la méthode "BIMETRO"

Nous définissons par  $\frac{CG(n) - CG(n+1)}{CG(n+1)}$  (resp.  $\frac{CG(n) - CG(n+1)}{CG(n+1)}_+$ ) la borne inférieure (resp. supérieure) du gain marginal.

Nous remarquons que lorsque le nombre de simulations est petit (inférieur à 10), le gain marginal est élevé. Mais il décroît au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente. Le gain marginal se rapproche de 0 et varie faiblement (voir borne inférieure et supérieure) lorsque le nombre de simulations dépasse 30 sa variabilité se rapproche de 0 au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente.

### 2.3.9 Procédure de pilotage des simulations

Dans l'objectif de caler les paramètres de METROPOLIS, nous avons mis en place cette procédure itérative qui nous a permis d'étudier la vitesse de convergence vers un minimum global. Mais en dehors de cette analyse, cette procédure permet un pilotage des simulations, cela veut dire que cette procédure itérative peut être utilisée par des opérateurs qui veulent caler les paramètres d'un modèle sans devoir effectuer un nombre élevé de simulations qui s'avèrent très coûteuses. Pour utiliser la méthode testée, nous proposons une architecture qui permettrait à l'utilisateur de donner au lancement du programme BIMETRO, le pas désiré, le sens choisi, le critère d'arrêt et les paramètres  $\mu$ ,  $n$  et  $k$  ainsi que le CG initial. Puis le programme BIMETRO nous fournira les nouveaux paramètres pour lancer la nouvelle simulation sur METROPOLIS. Après que la simulation sur METROPOLIS ait été effectuée nous donnerons au programme le nouveau CG: Puis, il nous fournira les nouveaux paramètres pour trouver le minimum des CG: La figure 19 illustre cette architecture.

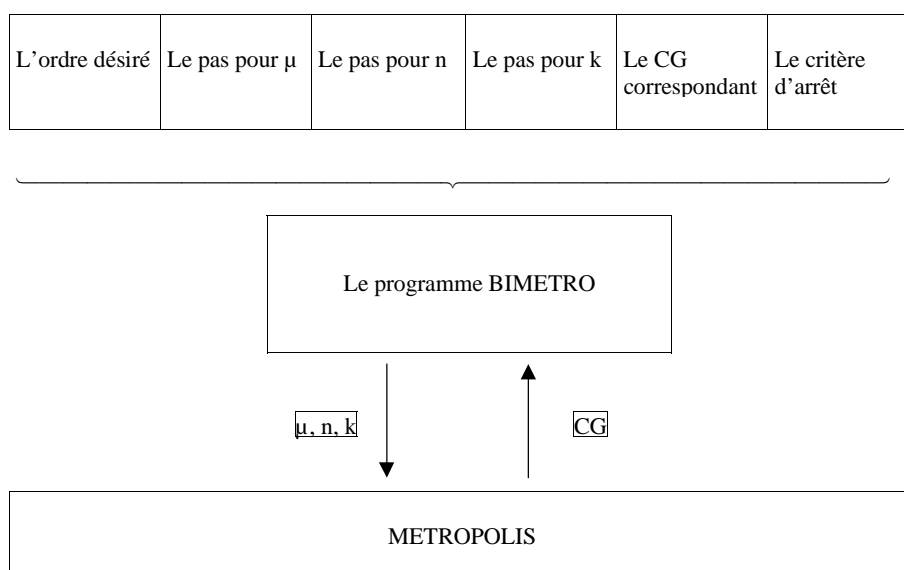


Figure 19: architecture de la procédure de pilotage des simulations

Notons que le critère d'arrêt est un critère prédéfini par l'utilisateur pour arrêter le programme. Ce critère peut être une borne inférieure pour le pas. Cette procédure de pilotage des simulations peut être programmée facilement, sa mise en marche facilitera énormément la procédure de calage.

## 2.4 Comparaison et conclusions

Dans ce chapitre, nous avons essayé de proposer une autre approche pour le calage des paramètres de METROPOLIS. Cette année, nous avons proposé d'étudier le problème de calage d'une manière différente. En effet, après avoir utilisé une approche intuitive dans les travaux des années précédentes, nous proposons une approche systématique de la procédure de calage des paramètres de METROPOLIS dans laquelle nous avons commencé par estimer notre critère général CG par une fonction convexe. Ensuite, nous avons proposé deux méthodes d'étude de convergence vers un minimum global, une procédure économétrique et une autre itérative. La conception des deux méthodes est différente. Nous discutons l'efficacité de chaque méthode d'après les résultats obtenus. En effet, notre objectif est de trouver la valeur du minimum du critère général tout en générant le plus petit nombre de simulations possible.

Pour les deux procédures, nous avons utilisé une base de données de 176 simulations en utilisant une formulation quadratique des critères (section (3.2.4)) ; la valeur du critère général moyen ( $CG_{moy}$ ) dans cette base est égale à 0,137. D'autre part, la valeur minimale que peut prendre le  $CG(n)$  moyen trouvé après  $n$  simulations, est égale à 0,0799 (c'est la même valeur que le minimum de la base de données).

Comme nous venons de le constater dans la section (3.3.1), nous avons besoin de 40 simulations en moyenne pour que la méthode économétrique converge vers un minimum. Ces 40 simulations contiennent les 12 points qui ont été tirés aléatoirement et les 28 points restants ne sont autres que la moyenne de la fonction de densité du nombre de points nécessaires à l'estimation (section 3.3.3). Par contre, en utilisant la procédure itérative, nous avons besoin de 13 points en moyenne pour trouver le minimum global.

Par ailleurs, nous avons étudié l'efficacité de ces deux procédures en termes de gain moyen et de gain marginal. Pour les deux procédures, le gain moyen ( $GAIN_{moy}(n)$ ) défini par l'équation (2.38), tend asymptotiquement vers 0,71. Nous remarquons que dans la procédure économétrique, le gain moyen atteint 0,7 après 55 simulations et sa variabilité (en terme d'écart-type) tend vers 0 lorsque le nombre de simulations dépasse 55. Alors que dans la procédure itérative, le gain moyen atteint cette même valeur au bout de 40 simulations et sa variabilité tend vers 0 lorsque le nombre de simulations est supérieur à 40:

Le gain marginal  $GAIN_{marginal}(n)$  défini par l'équation (2.39) est élevé pour les deux procédures lorsque le nombre de simulations est inférieur à 10 et il commence à diminuer lorsque le nombre de simulations se rapproche de 55 pour la procédure économétrique, et de 40, pour la procédure itérative.

D'après ces résultats, la méthode itérative semble être meilleure dans le sens où nous avons besoin d'un nombre réduit de simulations à effectuer. Néanmoins, les résultats

de la méthode itérative peuvent être critiqués du fait que lors de son application nous risquons de ne pas utiliser les vrais points, puisque nous introduisons à chaque fois le point le plus proche de celui existant dans notre base de données. Les résultats de la procédure économétrique dépendent aussi du tirage aléatoire initial des 12 points, cela justifie, en quelque sorte, la différence entre le nombre de points nécessaires pour trouver un minimum global entre les deux méthodes.

Malgré, les imperfections que présentent ces résultats, ces deux méthodes nous permettront de réduire, de manière notable, le nombre de simulations nécessaires.

Ces deux procédures nous ont permis de proposer l'architecture des deux processus de pilotage de simulations. La programmation de ces deux processus de pilotage est facile à établir. Ces programmes permettront aux opérateurs désirant utiliser METROPOLIS de caler les paramètres de leur modèle en effectuant un nombre réduit de simulations.

## Références

- [1] de Palma, A. et Fontan, C. (1998), "Enquête MADDIF : Multimotif Adaptée à la Dynamique des comportements de Déplacement en Ile-de-France", Projet DRAST/PREDIT 99MT20.
- [2] Small, K, Noland, R. et Koskenoja, P., (1995), "Socio-economic Attributes and Impacts of Travel Reliability: A Stated Preference Approach", University of California, Irvine, California PATH Research Report, UCN-ITS-PRR-95-36.
- [3] Small, K. (1977), "Some Notes on Discrete Choice Models and Scheduling of Activities", Document de travail, National Science Foundations, Grant N°SOC77-07082.
- [4] Small, K. (1982), "The scheduling of Consumer Activities", *American Economic Review*, 72, 467-479.
- [5] Antoniadis, A. et al. (1992), *Régression non linéaire*, Economica.
- [6] Lipschutz, S (1991), *Algèbre linéaire*. McGraw-Hill.
- [7] Wonnacott, T.S. et Wonnacott, R.J. (1991), *Statistique*, Economica (4ème édition).
- [8] Varian, H.R. (1995), *Analyse Microéconomique*, Balise (3ème édition).
- [9] Archinard, G. et Guerrien, B. (1992), *Analyse Mathématique pour Economistes*, Economica.
- [10] Gourieroux, C et Monfort, A. (1996), *Statistique et Modèle Econométrique*, Economica.
- [11] Ross, M.S. (1996); *Initiation aux probabilités*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

## Annexe A

### Les lois de passage

Afin d'estimer le critère général, nous avons essayé plusieurs formes. Nous présentons dans cette annexe la forme 2' et 3. Nous partons de la forme suivante de CG :

$$CG = \alpha (1 - \beta_1)^{\xi} + \beta (n - n_1)^{\xi} + \gamma (\beta_1 - \beta_1)^{\xi} + S;$$

- Cas 1 :  $\xi = 2$  (forme 2')

Nous avons :

$$CG = \alpha (1 - \beta_1)^2 + \beta (n - n_1)^2 + \gamma (\beta_1 - \beta_1)^2 + S;$$

Le développement de cette expression nous donne :

$$CG = \alpha 1^2 + \beta n^2 + \gamma \beta_1^2 + 2\alpha(1 - \beta_1) + 2\beta(n - n_1) + 2\gamma(\beta_1 - \beta_1) + \alpha 1^2 + \beta n_1^2 + \gamma \beta_1^2 + S;$$

Cette expression est de la forme :

$$f = A 1^2 + B n^2 + C \beta_1^2 + G 1 + H n + I \beta_1 + J;$$

Les conditions initiales sont :

$$\alpha; \beta; \gamma; S; 1; n_1; \beta_1 > 0;$$

Par identification, et selon les conditions initiales, nous avons :

$$A = \alpha > 0$$

$$B = \beta > 0$$

$$C = \gamma > 0$$

$$G = 2\alpha - 2\beta_1 < 0$$

$$H = 2\beta - 2n_1 < 0$$

$$I = 2\gamma - 2\beta_1 < 0$$

$$J = \alpha 1^2 + \beta n_1^2 + \gamma \beta_1^2 + S > 0;$$



- Cas 2:  $\xi = 4$  (forme 3)

Nous avons:

$$CG = \textcircled{R} (1 - \textcircled{1}_1)^4 + \textcircled{-} (n - n_1)^4 + \textcircled{\circ} (\cdot - \textcircled{1}_1)^4 + S;$$

Le développement de cette expression nous donne:

$$CG = \textcircled{R}^{14} + \textcircled{-} n^4 + \textcircled{\circ} \cdot 4 \textcircled{1}_1^3 + 4 \textcircled{R}^{13} \textcircled{1}_1 + 4 \textcircled{-} n_1 n^3 + 4 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^3 + 6 \textcircled{R}^{12} \textcircled{1}_1^2 + 6 \textcircled{-} n_1^2 n^2 + 6 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^2 \textcircled{1}_1 + 4 \textcircled{R}^{13} \textcircled{1}_1 + 4 \textcircled{-} n_1^3 n + 4 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^3 + \textcircled{R}^{14} + \textcircled{-} n_1^4 + \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^4 + S;$$

C'est de la forme:

$$f = A^{14} + B n^4 + C \cdot 4 + D^{13} + E n^3 + F \cdot 3 + G^{12} + H n^2 + I \cdot 2 + J^1 + K n + L \cdot + M;$$

Les conditions initiales sont:

$$\textcircled{R}; \textcircled{-}; \textcircled{\circ}; S; \textcircled{1}_1; n_1; \cdot \textcircled{1}_1 > 0:$$

Par identi...cation et selon les conditions initiales nous avons:

$$A = \textcircled{R} > 0$$

$$B = \textcircled{-} > 0$$

$$C = \textcircled{\circ} > 0$$

$$D = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{R}^{13} < 0$$

$$E = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{-} n_1 < 0$$

$$F = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1 < 0$$

$$G = 6 \textcircled{R}^{12} \textcircled{1}_1^2 > 0$$

$$H = 6 \textcircled{-} n_1^2 > 0$$

$$I = 6 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^2 > 0$$

$$J = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{R}^{13} < 0$$

$$K = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{-} n_1^3 < 0$$

$$L = \textcircled{1}_1 4 \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1 < 0$$

$$M = \textcircled{R}^{14} + \textcircled{-} n_1^4 + \textcircled{\circ} \cdot \textcircled{1}_1^4 + S > 0:$$

Ces lois de passage nous ont permis d'utiliser des formes linéaires (forme 2' et forme 3) en partant d'une forme générale tout en respectant les conditions sur des paramètres. Ces nouvelles formes faciliteront, par la suite, la procédure d'estimation de la fonction d'objectif CG:

## Annexe B

# Matrice des dérivées secondes semi-définie positive : conditions générales

Partons de la forme suivante de CG (2.8), nous déterminons les conditions du second ordre comme étant les conditions nécessaires pour avoir une matrice des dérivées secondes (matrice hessienne H) semi-définie positive.

La forme utilisée est :

$$CG = A^{12} + Bn^2 + C \cdot 2 + D^{1n} + E^{1.} + F \cdot n + G^{1} + Hn + I + J:$$

Nous définissons la matrice hessienne H comme suit :

$$H = \begin{matrix} & \frac{\partial^2 CG}{\partial 1^2} & \frac{\partial^2 CG}{\partial 1 \partial n} & \frac{\partial CG}{\partial 1} \\ \frac{\partial^2 CG}{\partial n \partial 1} & \frac{\partial^2 CG}{\partial n^2} & \frac{\partial^2 CG}{\partial n} \\ \frac{\partial^2 CG}{\partial 1} & \frac{\partial^2 CG}{\partial n} & \frac{\partial^2 CG}{\partial} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{matrix} = \begin{matrix} 2A & D & I \\ D & 2B & F \\ I & F & 2C \end{matrix}$$

Les sous-matrices principales  $H_1$ ;  $H_2$  et  $H_3$  ainsi que les mineurs principaux  $\det(H_1)$ ,  $\det(H_2)$  et  $\det(H_3)$  sont calculés de la manière suivante :

$$H_1 = \begin{matrix} & \frac{\partial^2 CG}{\partial 1^2} & \frac{\partial CG}{\partial 1} \\ \frac{\partial^2 CG}{\partial 1} & \frac{\partial^2 CG}{\partial} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 2A & I \\ I & 2C \end{matrix}$$

Le 1<sup>er</sup> mineur principal est donné par  $\det(H_1)$  :

$$\det(H_1) = 8ABC + 2A^2B^2 + 2B^2C + 2DE + 2E^2B$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2B & \rho \\ \rho & 2C \end{pmatrix}$$

Le 2<sup>ème</sup> mineur principal est donné par  $\det(H_2)$  :

$$\det(H_2) = 4BC - \rho^2$$

$$H_3 = 2C$$

En...n, le 3<sup>ème</sup> mineur principal est donné par  $\det(H_3)$  :

$$\det(H_3) = 2C$$

Pour avoir une matrice des dérivées secondes semi-définie positive, il suffit de remplir les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \det(H_1) > 0 \\ \det(H_2) > 0 \\ \det(H_3) > 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} 8ABC + 2A^2B^2 + 2B^2C + 2DE + 2E^2B > 0 \\ 4BC - \rho^2 > 0 \\ C > 0 \end{cases}$$

Les conditions qui nous garantissent la convexité de notre fonction se réduisent alors à la vérification des trois inégalités qui figurent dans le système ci-dessus.

## B.1 Les fonctions d'objectif estimées

### Cas 1: Formulation linéaire des critères

L'estimation de la fonction d'objectif (2.8) en utilisant une formulation linéaire des critères donne les résultats qui figurent dans le tableau ci dessous :

Tableau : résultats d'estimation

coefficients estimés	Valeurs	t Student
$\alpha$	0;0000908	0; 497
$\beta$	0;414	3; 812 $\times 10^i 2$
$\gamma$	0;0419	0; 145
$\delta$	$i 0;00414$	$i 0; 199$
$\epsilon$	$1;31 \times 10^i 3$	0; 372
$\zeta$	$i 0;0912$	$i 0; 117$
$\eta$	$3;88 \times 10^i 3$	0; 477
$\theta$	$i 1;36$	$i 4; 078 \times 10^i 2$
$\rho$	0;0127	2; 019
$\sigma$	1;3	$3; 94 \times 10^i 2$

Tableau : qualité d'ajustement

Coefficient de détermination $R^2$	0;881
Coefficient de détermination ajusté $R^2_{ajusté}$	0;874

### Cas 2: Formulation quadratique des critères

L'estimation de la fonction d'objectif (2.8) en utilisant une formulation quadratique des critères donne les résultats ci dessous :

Tableau : résultats d'estimation

coefficients estimés	Valeurs	t Student
$A$	$0,83 \times 10^4$	0,607
$B$	0,485	$3,650 \times 10^2$
$C$	0,0436	0,156
$D$	$0,00487$	$0,190$
$E$	0,00118	0,462
$F$	$0,0982$	$0,122$
$G$	0,00577	0,36
$H$	$0,616$	$0,1$
$I$	0,0312	0,916
$J$	1,55	$3,70 \times 10^2$

Tableau : qualité d'ajustement

Coefficient de détermination $R^2$	0,889
Coefficient de détermination ajusté $R^2_{ajusté}$	0,883

## Annexe C

# Le programme C de la procédure itérative

Ce programme est écrit dans un langage C. Il est disponible à la demande.

```
/*programme BIMETRO*/
/*****/
/* créé et développé par */
/* Eric Daupley et Denis Gougeon */
/* le 18 mai 2001 version 1.1 */
/*****/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#dé...nie sqr(x) ((x)*(x))
#dé...nie N 200
/* dé...nition de type */
typedef struct {
int numli;
float val[4];
}pt;
/* declaration des fonctions */
float min(int a);
float max(int a);
int ptproche(pt* a,pt* b);
int compteur(void);
int test( pt* a, pt* b);
float distance(pt a,pt b,float fx,float fy,float fz);
/* declaration des variables */
FILE *...ch,*...ch1;
int i,j; /* var de boucle */
```

```
int r,g,n,crs=0;
pt ptinitial,ptvar,pt...c,pt0;
float tab[4][N];
float poidsx,poidsy,poidsz,pasa,pasv,sens1,sens2,sens3,f[3],sens[3];
int yop[N];
/* de...nition des fonctions */
float min(int a){
int i;
float sortie=200.0;
for(i=0;i<N;i++){
if(tab[a][i]<sortie)sortie=tab[a][i];}
return(sortie);
}
float max(int a){
int i;
float sortie=0.0;
for(i=0;i<N;i++){
if(tab[a][i]>sortie)sortie=tab[a][i];}
return(sortie);
}
int compteur(void){
static int i1,j1;
j1=i1;
i1++;
return j1;
}
int compteur1(void){
static int i1,j1;
j1=i1;
i1++;
return j1;
}
float distance(pt a,pt b,float fx,float fy,float fz){
for(i=0;i<4;i++){
b.val[i]=tab[i][b.numli];
}
return(sqr((a.val[0]-b.val[0])*fx)+sqr((a.val[1]-b.val[1])*fy)
+sqr((a.val[2]-b.val[2])*fz));
}
int test(pt* a,pt* b){
if ((*a).val[3]>(*b).val[3]){
```

```
*a=*b; /*test si le pt b est mieux que a et on remplace*/
printf("test+1 %i", compteur());
return 1;} /* si oui on retourne 1*/
else return 0;
}
int ptproche(pt* a,pt* b){
float k100=100000.0;
int r12,i12,j12,pap,pam;
pt pointeur;
printf(" ut pt proche nn");
printf(" %f %f %f %f", a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
for(i12=1;i12<n;i12++){
(*b).numli=i12;
if(distance(*a,*b,poidsx,poidsy,poidsz)<k100){
k100=distance(*a,*b,poidsx,poidsy,poidsz);
printf("i12 %i",i12);
r12=i12;}
}
printf("nn r12: %i nn",r12);
pointeur.numli=r12;
for(j12=0;j12<4;j12++){
pointeur.val[j12]=tab[j12][pointeur.numli];
*b=pointeur;
pap=0;
for(i12=0;i12<(crs+1);i12++){if(r12==yop[i12])pap=1;}
if(pap==0){yop[+crs]=r12;
pam=compteur1();
fprintf(...ch1,"%i %f %i nn",pam,tab[3][r12],r12);
}
printf(" Le point le plus procheAA %i AA %f %f %f %f nn",
b->numli,b->val[0],b->val[1],b->val[2],b->val[3]);
return r12;
}
int trouve(pt* a,float p){
int i=0,j=0,k=0,l,rt=0,nume;
float axe[3];
pt b,a1;
for(l=0;l<3;l++)if(sens[l]==3)i=l;
for(l=0;l<3;l++)if(sens[l]==2)j=l;
for(l=0;l<3;l++)if(sens[l]==1)k=l;
poidsx=((sens[0]/10.0)+1)*f[0];
```



```
poidsy=((sens[1]/10.0)+1)*f[1];
poidsz=((sens[2]/10.0)+1)*f[2];
axe[0]=poidsx;
axe[1]=poidsy;
axe[2]=poidsz;
for(l=0;l<3;l++)
b.val[l]=(*a).val[l];
b.val[i]=(*a).val[i]+p/(f[i]*10);
b.numli=a->numli;
a1=b;
printf("ut trouve ");
if(test(a,&a1)==1){rt=1;
printf(" trouve2 ");
goto etape2;}
else{
b.val[i]=(*a).val[i]-p/(10*f[i]);
ptproche(&b,&a1);
printf("ptinial: %f %f %f %f",a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
printf("pttrouve: %f %f %f %f",a1.val[0],a1.val[1],a1.val[2],a1.val[3]);
if(test(a,&a1)==1)
rt=1;
else
{etape2: axe[j]=1.3*f[j];
axe[i]=1.2*f[i];
axe[k]=1.1*f[k];
poidsx=axe[0];
poidsy=axe[1];
poidsz=axe[2];
for(l=0;l<4;l++)
b.val[l]=(*a).val[l];
b.val[j]=(*a).val[j]+p/(10*f[j]);
ptproche(&b,&a1);
printf("ptinial2: %f %f %f %f",a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
printf("pttrouve2: %f %f %f %f",a1.val[0],a1.val[1],a1.val[2],a1.val[3]);
if(test(a,&a1)==1){rt=1;
goto etape3;}
else{
b.val[j]=(*a).val[j]-p/(10*f[j]);
ptproche(&b,&a1);
printf("ptinial2: %f %f %f %f",a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
printf("pttrouve2: %f %f %f %f",a1.val[0],a1.val[1],a1.val[2],a1.val[3]);
```

```

if(test(a,&a1)==1)rt=1;
else { etape3: axe[k]=1.3*f[k];
axe[i]=1.2*f[i];
axe[j]=1.1*f[j];
poidsx=axe[0];
poidsy=axe[1];
poidsz=axe[2];
for(l=0;l<4;l++)
b.val[l]=(*a).val[l];
b.val[k]=(*a).val[k]+p/(10*f[k]);
ptproche(&b,&a1);
printf("ptinial3: %f %f %f %f",a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
printf("pttrouve3: %f %f %f %f",a1.val[0],a1.val[1],a1.val[2],a1.val[3]);
if(test(a,&a1)==1)rt=1;
else{
b.val[k]=(*a).val[k]-p/(10*f[k]);
ptproche(&b,&a1);
printf("ptinial3: %f %f %f %f nn",a->val[0],a->val[1],a->val[2],a->val[3]);
printf("pttrouve3: %f %f %f %fnn",a1.val[0],a1.val[1],a1.val[2],a1.val[3]);
if(test(a,&a1)==1)rt=1;
}}}}
}
printf("si la val: %i est egale a 0 on doit diviser par 2 le pas %f nn",rt,p);
return rt;}
/* coeur de la fonction main */
main(){
printf(" Bienvenue dans ce programme qui permet de trouver
le cg minimum
a partir d'un point de départ.nn
Ce programme vous renvoie le nombre d'itérations
(de changements de point),
et le nombre de points nécessairesnn
pour trouver le cg minnn");
...ch = fopen("crit4ini1.txt","r");
...ch1 = fopen("resulat.txt","w");
if(...ch==NULL)printf("...chier pas ouvert");
while( fscanf(...ch,"%f %f %f %f",&tab[0][i],&tab[1][i],&tab[2][i],
&tab[3][i])==4)i++;
n=i;
fclose(...ch);
printf("nn Entrez un chire entre 0 et %i :nn",n-1);

```

```

scanf("%i",&r);
ptinitial.numli=r;
for(i=0;i<4;i++)
ptinitial.val[i]=tab[i][r];
for(i=0;i<3;i++)
f[i]=1.0/(max(i)-min(i));
printf("%f %f %f %f nn",tab[0][r],tab[1][r],tab[2][r],tab[3][r]);
printf("Attention n'entrez que des coef differents pour mu n k nn ");
printf("Entrez le coefficient d'importance de mu entre 1 et 3nn
avec 3 pour le plus important et 1 pour le moins: ");
scanf("%f",&sens1);
printf("Entrez le coefficient d'importance de n entre 1 et 3nn
avec 3 pour le plus important et 1 pour le moins: ");
scanf("%f",&sens2);
printf("Entrez le coefficient d'importance de k entre 1 et 3nn
avec 3 pour le plus important et 1 pour le moins: ");
scanf("%f",&sens3);
sens[0]=sens1;
sens[1]=sens2;
sens[2]=sens3;
for(i=0;i<3;i++)
printf("sens %i %f nn",i,sens[i]);
printf("Entrez le pas désiré de 1 à 10nn");
scanf("%f",&pasa);
printf("pasa %f nn",pasa);
pasv=pasa;
ptvar=ptinitial;
for(i=0;i<n;i++)yop[i]=-1;
for(i=0;i<4;i++)
pt...c.val[i]=tab[i][100];
printf(" nn un %f main nn",distance(pt...c,ptinitial,1.1,1.1,1.1));
printf(" nn un %f main nn",distance(pt0,ptinitial,1.1,1.1,1.1));
printf("main ptp g ");
g=1;
printf("g nn ");
printf("ptvar.numli: %i nn",ptvar.numli);
phase1: if(trouve(&ptvar,pasv)==0)
pasv=pasv/2.0;
g=1;
if(pasv<0.001)goto phase2;
while (g==1){

```

```
g=trouve(&ptvar,pasv);
if (g==0)goto phase1;}
phase2: printf(" nn nn nn nn ligne %inn on a un cg min pour
mu= %f,n= %f,k= %f,cg= %f, nn avec %i iterations nn",ptvar.numli,
ptvar.val[0],ptvar.val[1],ptvar.val[2],ptvar.val[3],compteur());
printf(" et %i comparaisons nn et avec pour point de
depart mu= %f,n= %f,k= %f,cg= %f nn",compteur1(),
tab[0][r],tab[1][r],tab[2][r],tab[3][r]);}
```

# Annexe D

**Tableau 1 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et pas =1**

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,6	1	0,111333	2	9
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,6	1	0,111333	0	6
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,6	1	0,111333	1	8
0,5	1,6	1,5	0,129951	0,5	1,6	1	0,111333	2	10
0,5	1,6	2	0,14187	1	1,75	1,25	0,079929	7	16
0,5	1,6	2,25	0,143321	1	1,75	1,25	0,079929	7	18
0,5	1,75	0,95	0,129602	0,5	1,6	1	0,111333	1	6
0,5	1,75	1	0,0851	1	1,75	1,25	0,079929	2	9
0,5	1,75	1,25	0,080785	1	1,75	1,25	0,079929	1	7
0,5	1,75	2	0,105982	1	1,75	1,25	0,079929	3	12
0,5	1,75	2,25	0,106917	1	1,75	1,25	0,079929	4	15
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	10
0,5	2	2	0,104344	0,5	2	2,25	0,100159	1	6
0,5	2	2,25	0,100159	0,5	2	2,25	0,100159	0	4
0,5	2,2	1,5	0,171416	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
0,5	2,2	1,5	0,153383	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	5
0,5	2,2	2	0,147276	0,5	2	2,25	0,100159	2	6
0,5	2,2	2,25	0,148318	0,5	2	2,25	0,100159	1	4
1	1,2971	0,95	0,22176	1	1,2971	0,95	0,22176	0	2
1	1,2971	1	0,224715	1	1,2971	0,95	0,22176	1	2
1	1,45	0,95	0,162582	0,5	1,6	1	0,111333	5	11
1	1,45	1	0,163956	0,5	1,6	1	0,111333	3	10
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,6	1	0,111333	1	8
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,6	1	0,111333	1	7
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,6	1	0,111333	1	7
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,6	1	0,111333	2	10
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,6	1	0,111333	2	9
1	1,6	1,5	0,131114	1	1,75	1,25	0,079929	5	13
1	1,6	2	0,141782	1	1,75	1,25	0,079929	5	16
1	1,6	2,25	0,142741	1	1,75	1,25	0,079929	6	17
1	1,75	0,95	0,093819	1	1,75	1,25	0,079929	1	9
1	1,75	1	0,085627	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	6
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	10
1	1,75	2	0,105236	1	1,75	1,25	0,079929	2	14
1	1,75	2,25	0,10646	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
1	2	0,95	0,14515	1	1,75	1,25	0,079929	2	10
1	2	1	0,13154	1	1,75	1,25	0,079929	4	9
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	1	6

**Tableau 1 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	2	10
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	3	14
1	2	2,25	0,100755	0,5	2	2,25	0,100159	1	6
1	2,2	0,95	0,292603	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
1	2,2	1	0,202057	1	1,75	1,25	0,079929	5	10
1	2,2	1,25	0,172771	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
1	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
1	2,2	2	0,160278	1	1,75	1,25	0,079929	4	15
1	2,2	2,25	0,148792	0,5	2	2,25	0,100159	2	6
4	1,6	0,95	0,13933	0,5	1,6	1	0,111333	2	8
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,6	1	0,111333	2	7
4	1,6	1,25	0,125859	0,5	1,6	1	0,111333	3	9
4	1,6	1,5	0,130129	1	1,75	1,25	0,079929	4	13
4	1,6	2	0,140693	1	1,75	1,25	0,079929	4	16
4	1,6	2,25	0,14164	1	1,75	1,25	0,079929	5	17
4	1,75	0,95	0,128598	1	1,75	1,25	0,079929	2	11
4	1,75	1	0,083449	1	1,75	1,25	0,079929	2	9
4	1,75	1,25	0,083099	1	1,75	1,25	0,079929	1	7
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	11
4	1,75	1,75	0,101899	1	1,75	1,25	0,079929	3	13
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	3	15
4	1,75	2,25	0,107027	1	1,75	1,25	0,079929	4	18
4	2	0,95	0,176538	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
4	2	1	0,126052	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
4	2	1,25	0,100062	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
4	2	1,5	0,089667	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
4	2	2	0,107238	1	1,75	1,25	0,079929	4	15
4	2	2,25	0,101262	0,5	2	2,25	0,100159	2	7
4	2,2	0,95	0,23422	1	1,75	1,25	0,079929	4	12
4	2,2	1	0,191951	1	1,75	1,25	0,079929	4	10
4	2,2	1,25	0,165578	1	1,75	1,25	0,079929	3	8
4	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	4	12
4	2,2	2	0,158544	1	1,75	1,25	0,079929	5	16
4	2,2	2,25	0,149356	0,5	2	2,25	0,100159	3	7
8	1,2	0,95	0,26725	8	1,2	1	0,267213	1	2
8	1,2	1	0,267213	8	1,2	1	0,267213	0	2
8	1,2971	0,95	0,229109	8	1,2971	0,95	0,229109	0	3
8	1,2971	1	0,231033	8	1,2971	0,95	0,229109	1	4
8	1,45	0,95	0,171876	8	1,6	0,95	0,123058	3	8
8	1,45	1	0,173602	8	1,6	0,95	0,123058	3	8

**Tableau 1 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et pas =1**

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,6	0,95	0,123058	8	1,6	0,95	0,123058	0	5
8	1,6	1	0,123185	8	1,6	0,95	0,123058	1	6
8	1,6	1,1	0,12489	8	1,6	0,95	0,123058	1	7
8	1,6	1,15	0,126848	8	1,6	0,95	0,123058	1	8
8	1,6	1,25	0,13057	8	1,6	0,95	0,123058	2	7
8	1,6	1,5	0,135875	8	1,6	0,95	0,123058	3	8
8	1,6	1,75	0,142075	8	1,6	0,95	0,123058	4	9
8	1,6	2	0,143865	8	1,6	2,25	0,143574	1	2
8	1,6	2,25	0,143574	8	1,6	2,25	0,143574	0	2
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	1	0,084606	1	5
8	1,75	1	0,084606	8	1,75	1	0,084606	0	4
8	1,75	1,25	0,089454	8	1,75	1	0,084606	1	6
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	1	0,084606	2	8
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	1	0,084606	3	10
8	1,75	2	0,107668	8	1,75	2,25	0,106879	1	4
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	2,25	0,106879	0	3
8	1,81	1,57	0,090628	8	1,75	1	0,084606	2	9
8	2	0,95	0,118321	8	1,75	1	0,084606	2	5
8	2	1	0,108327	8	1,75	1	0,084606	1	4
8	2	1,1	0,098328	8	1,75	1	0,084606	1	4
8	2	1,15	0,097026	8	1,75	1	0,084606	2	6
8	2	1,25	0,095314	8	1,75	1	0,084606	2	6
8	2	1,5	0,095375	8	1,75	1	0,084606	3	9
8	2	1,75	0,100289	8	1,75	1	0,084606	4	11
8	2	2	0,106437	8	2	2,25	0,101218	1	5
8	2	2,25	0,101218	8	2	2,25	0,101218	0	4
8	2	2,5	0,111863	8	1,75	2,25	0,106879	1	3
8	2	2,75	0,11346	8	1,75	2,25	0,106879	2	5
8	2,2	0,95	0,17621	8	1,75	1	0,084606	3	6
8	2,2	1	0,171147	8	1,75	1	0,084606	2	5
8	2,2	1,25	0,156999	8	1,75	1	0,084606	3	7
8	2,2	1,5	0,145598	8	1,75	1	0,084606	4	9
8	2,2	1,75	0,153496	8	1,75	1	0,084606	5	11
8	2,2	2	0,154521	8	2	2,25	0,101218	2	5
8	2,2	2,25	0,146419	8	2	2,25	0,101218	1	4
12	1,2971	0,95	0,235946	12	1,2971	0,95	0,235946	0	3
12	1,2971	1	0,236966	12	1,2971	0,95	0,235946	1	4
12	1,6	0,95	0,138021	12	1,75	1,5	0,093277	3	10
12	1,6	1	0,129514	12	1,6	1	0,129514	0	7
12	1,6	1,1	0,131682	12	1,6	1	0,129514	1	8

**Tableau 1 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12	1,6	1,15	0,133598	12	1,6	1	0,129514	1	8
12	1,6	1,25	0,136215	12	1,75	1,5	0,093277	2	6
12	1,6	1,5	0,137333	12	1,75	1,5	0,093277	2	6
12	1,6	2	0,147315	12	1,75	1,5	0,093277	2	8
12	1,6	2,25	0,148278	12	1,75	1,5	0,093277	4	10
12	1,75	0,95	0,092259	12	1,75	1	0,089973	1	6
12	1,75	1	0,089973	12	1,75	1	0,089973	0	5
12	1,75	1,25	0,093949	12	1,75	1,5	0,093277	1	6
12	1,75	1,5	0,093277	12	1,75	1,5	0,093277	0	5
12	1,75	1,75	0,108145	12	1,75	1,5	0,093277	1	6
12	1,75	2	0,11115	12	1,75	1,5	0,093277	2	9
12	1,75	2,25	0,11158	12	1,75	1,5	0,093277	3	10
12	2	0,95	0,105234	12	1,75	1	0,089973	2	6
12	2	1	0,099813	12	1,75	1	0,089973	1	5
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,5	0,0817	1	6
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	5
12	2	2	0,104234	14	2	2,25	0,098641	1	5
12	2	2,25	0,098677	14	2	2,25	0,098641	1	5
12	2,2	0,95	0,162205	12	1,75	1	0,089973	3	7
12	2,2	1	0,156233	12	1,75	1	0,089973	2	6
12	2,2	1,25	0,145633	12	2	1,5	0,0817	2	6
12	2,2	1,5	0,137503	12	2	1,5	0,0817	1	5
12	2,2	2	0,148606	14	2	2,25	0,098641	2	5
12	2,2	2,25	0,141007	14	2	2,25	0,098641	2	5
14	1,2971	0,95	0,239042	12	1,2971	0,95	0,235946	1	4
14	1,2971	1	0,240896	12	1,2971	0,95	0,235946	2	5
14	1,6	0,95	0,146296	12	1,75	1,5	0,093277	4	11
14	1,6	1	0,134855	12	1,6	1	0,129514	1	8
14	1,75	0,95	0,096117	12	1,75	1	0,089973	2	8
14	1,75	1	0,104451	12	1,75	1	0,089973	1	7
14	1,75	1,25	0,097219	12	1,75	1,5	0,093277	2	8
14	1,75	2,25	0,115387	12	1,75	1,5	0,093277	4	10
14	2	0,95	0,101715	12	1,75	1	0,089973	3	8
14	2	1	0,096144	12	2	1,5	0,0817	3	10
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,5	0,0817	2	7
14	2	2,25	0,098641	14	2	2,25	0,098641	0	4
14	2,2	0,95	0,159373	12	1,75	1	0,089973	4	9
14	2,2	1	0,153465	12	2	1,5	0,0817	4	10
14	2,2	1,25	0,140553	12	2	1,5	0,0817	3	7
16	1,2971	0,95	0,243069	12	1,2971	0,95	0,235946	2	5



**Tableau 1 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
16	1,2971	1	0,243979	12	1,2971	0,95	0,235946	3	6
17,49	1,2971	0,75	0,242819	17,49	1,2971	0,75	0,242819	0	4
17,49	1,2971	0,95	0,245835	12	1,2971	0,95	0,235946	3	5
17,49	1,2971	1	0,246014	12	1,2971	0,95	0,235946	4	6
17,49	1,2971	1,1	0,247809	12	1,2971	0,95	0,235946	4	7
17,49	1,2971	1,15	0,248352	12	1,2971	0,95	0,235946	4	7
17,49	1,2971	1,25	0,24898	12	1,2971	0,95	0,235946	4	7
17,49	1,75	0,75	0,201046	12	1,75	1	0,089973	3	8
17,49	1,75	0,95	0,129646	12	1,75	1	0,089973	3	8
17,49	1,75	1	0,125653	12	1,75	1	0,089973	2	7
17,49	1,75	1,1	0,099594	17,49	1,75	1,1	0,099594	0	7
17,49	1,75	1,15	0,100737	17,49	1,75	1,1	0,099594	1	6
17,49	1,75	1,25	0,102941	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
17,49	1,75	1,5	0,10999	12	1,75	1,5	0,093277	4	10
17,49	1,75	1,75	0,115155	12	1,75	1,5	0,093277	5	10
17,49	1,75	0,95	0,129646	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
17,49	1,75	1	0,125653	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
17,49	1,75	1,1	0,099594	17,49	1,75	1,1	0,099594	0	7
17,49	1,75	1,15	0,100737	17,49	1,75	1,1	0,099594	1	6
17,49	1,75	1,25	0,102941	12	1,75	1,5	0,093277	2	9
17,49	1,75	1,5	0,10999	12	1,75	1,5	0,093277	3	10
17,49	1,75	1,75	0,115155	12	1,75	1,5	0,093277	4	10
17.490000	1.297100	0.950000	0.245835	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.000000	0.246014	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.100000	0.247809	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.150000	0.248352	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	2	3
17.490000	1.297100	1.250000	0.248980	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	2	3
17.490000	1.750000	0.750000	0.201046	17.490000	1.750000	0.750000	0,201046	0	1
17.490000	1.750000	0.950000	0.129646	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	8
17.490000	1.750000	1.000000	0.125653	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	3	10
17.490000	1.750000	1.100000	0.099594	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	0	4
17.490000	1.750000	1.150000	0.100737	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	1	4
17.490000	1.750000	1.250000	0.102941	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	3	9
17.490000	1.750000	1.500000	0.109990	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	4	9
17.490000	1.750000	1.750000	0.115155	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	5	10

**Tableau 2 - valeurs pour tous les points du tableau avec mu=1, n=3, k=2 et pas=1**

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,6	1	0,111333	2	9
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,6	1	0,111333	0	6
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,6	1	0,111333	1	7
0,5	1,6	1,5	0,129951	0,5	1,6	1	0,111333	2	8
0,5	1,6	2	0,14187	0,5	1,6	1	0,111333	3	9
0,5	1,6	2,25	0,143321	0,5	1,6	1	0,111333	4	9
0,5	1,75	0,95	0,129602	0,5	1,6	1	0,111333	1	6
0,5	1,75	1	0,0851	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
0,5	1,75	1,25	0,080785	1	1,75	1,25	0,079929	1	8
0,5	1,75	2	0,105982	1	1,75	1,25	0,079929	2	10
0,5	1,75	2,25	0,106917	1	1,75	1,25	0,079929	3	12
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	2	8
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	8
0,5	2	2	0,104344	0,5	2	2,25	0,100159	1	5
0,5	2	2,25	0,100159	0,5	2	2,25	0,100159	0	4
0,5	2,2	1,5	0,171416	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
0,5	2,2	1,5	0,153383	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	5
0,5	2,2	2	0,147276	0,5	2	2,25	0,100159	2	5
0,5	2,2	2,25	0,148318	0,5	2	2,25	0,100159	1	4
1	1,2971	0,95	0,22176	1	1,2971	0,95	0,22176	0	2
1	1,2971	1	0,224715	1	1,2971	0,95	0,22176	1	2
1	1,45	0,95	0,162582	0,5	1,6	1	0,111333	3	10
1	1,45	1	0,163956	0,5	1,6	1	0,111333	3	10
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,6	1	0,111333	1	9
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,6	1	0,111333	1	8
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,6	1	0,111333	2	10
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,6	1	0,111333	2	10
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,6	1	0,111333	2	9
1	1,6	1,5	0,131114	0,5	1,6	1	0,111333	3	10
1	1,6	2	0,141782	0,5	1,6	1	0,111333	4	11
1	1,6	2,25	0,142741	0,5	1,6	1	0,111333	5	11
1	1,75	0,95	0,093819	1	1,75	1,25	0,079929	1	7
1	1,75	1	0,085627	1	1,75	1,25	0,079929	1	7
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	6
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	8
1	1,75	2	0,105236	1	1,75	1,25	0,079929	2	10
1	1,75	2,25	0,10646	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
1	2	0,95	0,14515	1	1,75	1,25	0,079929	2	8

**Tableau 2 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	2	1	0,13154	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	1	6
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	2	8
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	3	10
1	2	2,25	0,100755	0,5	2	2,25	0,100159	1	7
1	2,2	0,95	0,292603	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
1	2,2	1	0,202057	1	1,75	1,25	0,079929	3	8
1	2,2	1,25	0,172771	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
1	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	3	9
1	2,2	2	0,160278	1	1,75	1,25	0,079929	4	11
1	2,2	2,25	0,148792	0,5	2	2,25	0,100159	2	7
4	1,6	0,95	0,13933	0,5	1,6	1	0,111333	4	11
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,6	1	0,111333	2	10
4	1,6	1,25	0,125859	0,5	1,6	1	0,111333	3	11
4	1,6	1,5	0,130129	1	1,75	1,25	0,079929	4	13
4	1,6	2	0,140693	1	1,75	1,25	0,079929	4	14
4	1,6	2,25	0,14164	1	1,75	1,25	0,079929	5	14
4	1,75	0,95	0,128598	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
4	1,75	1	0,083449	1	1,75	1,25	0,079929	2	7
4	1,75	1,25	0,083099	1	1,75	1,25	0,079929	1	9
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	11
4	1,75	1,75	0,101899	1	1,75	1,25	0,079929	3	13
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	4	14
4	1,75	2,25	0,107027	1	1,75	1,25	0,079929	5	15
4	2	0,95	0,176538	1	1,75	1,25	0,079929	3	8
4	2	1	0,126052	1	1,75	1,25	0,079929	3	8
4	2	1,25	0,100062	1	1,75	1,25	0,079929	2	9
4	2	1,5	0,089667	1	1,75	1,25	0,079929	3	11
4	2	2	0,107238	1	1,75	1,25	0,079929	5	14
4	2	2,25	0,101262	0,5	2	2,25	0,100159	2	9
4	2,2	0,95	0,23422	1	1,75	1,25	0,079929	4	9
4	2,2	1	0,191951	1	1,75	1,25	0,079929	4	9
4	2,2	1,25	0,165578	1	1,75	1,25	0,079929	3	10
4	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	4	12
4	2,2	2	0,158544	1	1,75	1,25	0,079929	6	15
4	2,2	2,25	0,149356	0,5	2	2,25	0,100159	3	9
8	1,2	0,95	0,26725	8	1,2	1	0,267213	1	2
8	1,2	1	0,267213	8	1,2	1	0,267213	0	2
8	1,2971	0,95	0,229109	8	1,2971	0,95	0,229109	0	3
8	1,2971	1	0,231033	8	1,2971	0,95	0,229109	1	4

**Tableau 2 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,45	0,95	0,171876	8	1,6	0,95	0,123058	3	8
8	1,45	1	0,173602	8	1,6	0,95	0,123058	3	8
8	1,6	0,95	0,123058	8	1,6	0,95	0,123058	0	5
8	1,6	1	0,123185	8	1,6	0,95	0,123058	1	6
8	1,6	1,1	0,12489	8	1,6	0,95	0,123058	1	7
8	1,6	1,15	0,126848	8	1,6	0,95	0,123058	1	7
8	1,6	1,25	0,13057	8	1,6	0,95	0,123058	2	7
8	1,6	1,5	0,135875	8	1,6	0,95	0,123058	3	8
8	1,6	1,75	0,142075	8	1,6	0,95	0,123058	4	9
8	1,6	2	0,143865	8	1,6	2,25	0,143574	1	2
8	1,6	2,25	0,143574	8	1,6	2,25	0,143574	0	2
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	1	0,084606	1	5
8	1,75	1	0,084606	8	1,75	1	0,084606	0	4
8	1,75	1,25	0,089454	8	1,75	1	0,084606	1	6
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	1	0,084606	2	8
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	1	0,084606	3	10
8	1,75	2	0,107668	8	1,75	2,25	0,106879	1	4
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	2,25	0,106879	0	3
8	1,81	1,57	0,090628	8	1,75	1	0,084606	2	8
8	2	0,95	0,118321	8	1,75	1	0,084606	2	5
8	2	1	0,108327	8	1,75	1	0,084606	1	4
8	2	1,1	0,098328	8	1,75	1	0,084606	1	4
8	2	1,15	0,097026	8	1,75	1	0,084606	2	6
8	2	1,25	0,095314	8	1,75	1	0,084606	2	6
8	2	1,5	0,095375	8	1,75	1	0,084606	3	8
8	2	1,75	0,100289	8	1,75	1	0,084606	4	11
8	2	2	0,106437	8	2	2,25	0,101218	1	5
8	2	2,25	0,101218	8	2	2,25	0,101218	0	4
8	2	2,5	0,111863	8	1,75	2,25	0,106879	1	3
8	2	2,75	0,11346	8	1,75	2,25	0,106879	2	5
8	2,2	0,95	0,17621	8	1,75	1	0,084606	3	6
8	2,2	1	0,171147	8	1,75	1	0,084606	2	5
8	2,2	1,25	0,156999	8	1,75	1	0,084606	3	7
8	2,2	1,5	0,145598	8	1,75	1	0,084606	4	9
8	2,2	1,75	0,153496	8	1,75	1	0,084606	5	11
8	2,2	2	0,154521	8	2	2,25	0,101218	2	5
8	2,2	2,25	0,146419	8	2	2,25	0,101218	1	4
12	1,2971	0,95	0,235946	12	1,2971	0,95	0,235946	0	3
12	1,2971	1	0,236966	12	1,2971	0,95	0,235946	1	3
12	1,6	0,95	0,138021	12	1,75	1,5	0,093277	3	8

**Tableau 2 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12	1,6	1	0,129514	12	1,6	1	0,129514	0	7
12	1,6	1,1	0,131682	12	1,6	1	0,129514	1	8
12	1,6	1,15	0,133598	12	1,6	1	0,129514	1	8
12	1,6	1,25	0,136215	12	1,6	1	0,129514	1	8
12	1,6	1,5	0,137333	12	1,75	1,5	0,093277	2	7
12	1,6	2	0,147315	12	1,75	1,5	0,093277	2	8
12	1,6	2,25	0,148278	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
12	1,75	0,95	0,092259	12	1,75	1	0,089973	1	6
12	1,75	1	0,089973	12	1,75	1	0,089973	0	5
12	1,75	1,25	0,093949	12	1,75	1,5	0,093277	1	6
12	1,75	1,5	0,093277	12	1,75	1,5	0,093277	0	5
12	1,75	1,75	0,108145	12	1,75	1,5	0,093277	1	7
12	1,75	2	0,11115	12	1,75	1,5	0,093277	2	8
12	1,75	2,25	0,11158	12	1,75	1,5	0,093277	3	9
12	2	0,95	0,105234	12	1,75	1	0,089973	2	6
12	2	1	0,099813	12	1,75	1	0,089973	1	5
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,5	0,0817	1	6
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	5
12	2	2	0,104234	14	2	2,25	0,098641	2	5
12	2	2,25	0,098677	14	2	2,25	0,098641	1	5
12	2,2	0,95	0,162205	12	1,75	1	0,089973	3	7
12	2,2	1	0,156233	12	1,75	1	0,089973	2	6
12	2,2	1,25	0,145633	12	2	1,5	0,0817	2	6
12	2,2	1,5	0,137503	12	2	1,5	0,0817	1	5
12	2,2	2	0,148606	14	2	2,25	0,098641	3	5
12	2,2	2,25	0,141007	14	2	2,25	0,098641	2	5
14	1,2971	0,95	0,239042	12	1,2971	0,95	0,235946	1	5
14	1,2971	1	0,240896	12	1,2971	0,95	0,235946	2	5
14	1,6	0,95	0,146296	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
14	1,6	1	0,134855	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
14	1,75	0,95	0,096117	12	1,75	1	0,089973	2	9
14	1,75	1	0,104451	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
14	1,75	1,25	0,097219	12	1,75	1,5	0,093277	1	6
14	1,75	2,25	0,115387	12	1,75	1,5	0,093277	3	9
14	2	0,95	0,101715	12	1,75	1	0,089973	3	9
14	2	1	0,096144	12	2	1,5	0,0817	3	7
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,5	0,0817	1	6
14	2	2,25	0,098641	14	2	2,25	0,098641	0	4
14	2,2	0,95	0,159373	12	1,75	1	0,089973	4	10
14	2,2	1	0,153465	12	2	1,5	0,0817	4	8

**Tableau 2 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2,2	1,25	0,140553	12	2	1,5	0,0817	2	6
16	1,2971	0,95	0,243069	17,49	1,2971	0,75	0,242819	1	5
16	1,2971	1	0,243979	17,49	1,2971	0,75	0,242819	1	6
17,49	1,2971	0,75	0,242819	17,49	1,2971	0,75	0,242819	0	4
17,49	1,2971	0,95	0,245835	17,49	1,2971	0,75	0,242819	1	5
17,49	1,2971	1	0,246014	17,49	1,2971	0,75	0,242819	1	5
17,49	1,2971	1,1	0,247809	17,49	1,2971	0,75	0,242819	1	6
17,49	1,2971	1,15	0,248352	17,49	1,2971	0,75	0,242819	2	6
17,49	1,2971	1,25	0,24898	17,49	1,2971	0,75	0,242819	2	5
17,49	1,75	0,75	0,201046	12	1,75	1,5	0,093277	5	11
17,49	1,75	0,95	0,129646	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
17,49	1,75	1	0,125653	12	1,75	1,5	0,093277	3	8
17,49	1,75	1,1	0,099594	17,49	1,75	1,1	0,099594	0	7
17,49	1,75	1,15	0,100737	17,49	1,75	1,1	0,099594	1	6
17,49	1,75	1,25	0,102941	12	1,75	1,5	0,093277	2	9
17,49	1,75	1,5	0,10999	12	1,75	1,5	0,093277	3	10
17,49	1,75	1,75	0,115155	12	1,75	1,5	0,093277	4	10
17,49	1,2971	1,1	0,247809	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1,15	0,248352	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1,25	0,24898	8	1,75	1	0,084606	5	20
17,49	1,75	0,75	0,201046	8	1,75	1	0,084606	4	18
17,49	1,75	0,95	0,129646	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,75	1	0,125653	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,75	1,1	0,099594	1	1,75	1,25	0,079929	4	25
17,49	1,75	1,15	0,100737	8	1,75	1	0,084606	3	19
17,49	1,75	1,25	0,102941	8	1,75	1	0,084606	3	19
17,49	1,75	1,5	0,10999	8	1,75	1	0,084606	3	20
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	1	0,084606	3	20
17,49	1,75	1	0,125653	4	1,75	1	0,083449	2	17
17,49	1,75	1,1	0,099594	4	1,75	1	0,083449	2	18
17,49	1,75	1,15	0,100737	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,25	0,102941	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,5	0,10999	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	0,95	0,088341	2	15

**Tableau 3 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,6	1	0,111333	0	12
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
0,5	1,6	1,5	0,129951	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
0,5	1,6	2	0,14187	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
0,5	1,6	2,25	0,143321	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
0,5	1,75	0,95	0,129602	8	1,75	1	0,084606	4	17
0,5	1,75	1	0,0851	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
0,5	1,75	1,25	0,080785	1	1,75	1,25	0,079929	1	13
0,5	1,75	2	0,105982	1	1,75	1,25	0,079929	2	14
0,5	1,75	2,25	0,106917	8	1,75	1	0,084606	3	16
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	4	18
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
0,5	2	2	0,104344	1	1,75	1,25	0,079929	4	18
0,5	2	2,25	0,100159	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
0,5	2,2	1,5	0,171416	12	2	1,5	0,0817	6	20
0,5	2,2	1,5	0,153383	12	2	1,5	0,0817	6	20
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	12
0,5	2,2	2	0,147276	0,5	1,6	1	0,111333	3	16
0,5	2,2	2,25	0,148318	0,5	1,6	1	0,111333	3	15
1	1,2971	0,95	0,22176	12	2	1,5	0,0817	4	20
1	1,2971	1	0,224715	12	2	1,5	0,0817	4	20
1	1,45	0,95	0,162582	12	2	1,5	0,0817	4	20
1	1,45	1	0,163956	12	2	1,5	0,0817	4	20
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,6	1	0,111333	1	15
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,6	1	0,111333	1	13
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
1	1,6	1,5	0,131114	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
1	1,6	2	0,141782	0,5	1,6	1	0,111333	2	15
1	1,6	2,25	0,142741	12	2	1,5	0,0817	3	17
1	1,75	0,95	0,093819	8	1,75	1	0,084606	2	16

**Tableau 3 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	1,75	1	0,085627	1	1,75	1,25	0,079929	4	22
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	11
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	14
1	1,75	2	0,105236	8	1,75	1	0,084606	3	17
1	1,75	2,25	0,10646	8	1,75	1	0,084606	3	18
1	2	0,95	0,14515	1	1,75	1,25	0,079929	5	19
1	2	1	0,13154	1	1,75	1,25	0,079929	5	19
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	5	19
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	6	24
1	2	2,25	0,100755	1	1,75	1,25	0,079929	4	18
1	2,2	0,95	0,292603	12	2	1,5	0,0817	5	20
1	2,2	1	0,202057	12	2	1,5	0,0817	6	20
1	2,2	1,25	0,172771	12	2	1,5	0,0817	6	20
1	2,2	1,5	0,15247	12	2	1,5	0,0817	6	20
1	2,2	2	0,160278	0,5	1,6	1	0,111333	3	16
1	2,2	2,25	0,148792	12	2	1,5	0,0817	4	17
4	1,6	0,95	0,13933	8	1,75	1	0,084606	7	26
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,6	1	0,111333	1	16
4	1,6	1,25	0,125859	0,5	1,6	1	0,111333	3	19
4	1,6	1,5	0,130129	0,5	1,6	1	0,111333	3	19
4	1,6	2	0,140693	12	2	1,5	0,0817	3	17
4	1,6	2,25	0,14164	12	2	1,5	0,0817	3	17
4	1,75	0,95	0,128598	8	1,75	1	0,084606	5	19
4	1,75	1	0,083449	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,25	0,083099	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	20
4	1,75	1,75	0,101899	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
4	1,75	2,25	0,107027	8	1,75	1	0,084606	4	19
4	2	0,95	0,176538	12	2	1,5	0,0817	3	15
4	2	1	0,126052	12	2	1,5	0,0817	3	15
4	2	1,25	0,100062	12	2	1,5	0,0817	2	17
4	2	1,5	0,089667	12	2	1,5	0,0817	1	15
4	2	2	0,107238	12	2	1,5	0,0817	4	18
4	2	2,25	0,101262	12	2	1,5	0,0817	2	16
4	2,2	0,95	0,23422	12	2	1,5	0,0817	5	20
4	2,2	1	0,191951	12	2	1,5	0,0817	5	19
4	2,2	1,25	0,165578	12	2	1,5	0,0817	5	19
4	2,2	1,5	0,15247	0,5	1,6	1	0,111333	4	20



**Tableau 3 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
4	2,2	2	0,158544	12	2	1,5	0,0817	4	17
4	2,2	2,25	0,149356	12	2	1,5	0,0817	4	17
8	1,2	0,95	0,26725	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,2	1	0,267213	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,2971	0,95	0,229109	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,2971	1	0,231033	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,45	0,95	0,171876	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,45	1	0,173602	12	2	1,5	0,0817	5	19
8	1,6	0,95	0,123058	0,5	1,6	1	0,111333	1	16
8	1,6	1	0,123185	0,5	1,6	1	0,111333	2	17
8	1,6	1,1	0,12489	0,5	1,6	1	0,111333	2	17
8	1,6	1,15	0,126848	0,5	1,6	1	0,111333	2	17
8	1,6	1,25	0,13057	0,5	1,6	1	0,111333	2	17
8	1,6	1,5	0,135875	12	2	1,5	0,0817	3	17
8	1,6	1,75	0,142075	12	2	1,5	0,0817	3	17
8	1,6	2	0,143865	12	2	1,5	0,0817	3	17
8	1,6	2,25	0,143574	12	2	1,5	0,0817	3	17
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	1	0,084606	1	13
8	1,75	1	0,084606	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
8	1,75	1,25	0,089454	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	1,75	2	0,107668	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	1,81	1,57	0,090628	8	1,75	1	0,084606	2	15
8	2	0,95	0,118321	12	2	1,5	0,0817	3	18
8	2	1	0,108327	12	2	1,5	0,0817	2	17
8	2	1,1	0,098328	1	1,75	1,25	0,079929	4	22
8	2	1,15	0,097026	12	2	1,5	0,0817	2	18
8	2	1,25	0,095314	12	2	1,5	0,0817	2	17
8	2	1,5	0,095375	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	2	1,75	0,100289	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	2	2	0,106437	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
8	2	2,25	0,101218	12	2	1,5	0,0817	2	18
8	2	2,5	0,111863	1	1,75	1,25	0,079929	5	25
8	2	2,75	0,11346	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
8	2,2	0,95	0,17621	12	2	1,5	0,0817	3	18
8	2,2	1	0,171147	12	2	1,5	0,0817	3	18
8	2,2	1,25	0,156999	12	2	1,5	0,0817	3	18
8	2,2	1,5	0,145598	12	2	1,5	0,0817	3	17

**Tableau 3 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	2,2	1,75	0,153496	12	2	1,5	0,0817	4	18
8	2,2	2	0,154521	12	2	1,5	0,0817	4	18
8	2,2	2,25	0,146419	12	2	1,5	0,0817	4	17
12	1,2971	0,95	0,235946	8	1,75	1	0,084606	5	21
12	1,2971	1	0,236966	8	1,75	1	0,084606	5	21
12	1,6	0,95	0,138021	8	1,75	1	0,084606	6	24
12	1,6	1	0,129514	8	1,75	1	0,084606	6	25
12	1,6	1,1	0,131682	1	1,75	1,25	0,079929	5	28
12	1,6	1,15	0,133598	8	1,75	1	0,084606	4	22
12	1,6	1,25	0,136215	8	1,75	1	0,084606	4	22
12	1,6	1,5	0,137333	8	1,75	1	0,084606	4	23
12	1,6	2	0,147315	12	2	1,5	0,0817	3	17
12	1,6	2,25	0,148278	12	2	1,5	0,0817	3	16
12	1,75	0,95	0,092259	8	1,75	1	0,084606	2	14
12	1,75	1	0,089973	1	1,75	1,25	0,079929	3	22
12	1,75	1,25	0,093949	8	1,75	1	0,084606	3	15
12	1,75	1,5	0,093277	8	1,75	1	0,084606	3	16
12	1,75	1,75	0,108145	8	1,75	1	0,084606	3	16
12	1,75	2	0,11115	8	1,75	1	0,084606	3	16
12	1,75	2,25	0,11158	8	1,75	1	0,084606	3	16
12	2	0,95	0,105234	12	2	1,5	0,0817	2	15
12	2	1	0,099813	12	2	1,5	0,0817	2	15
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,5	0,0817	1	14
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	13
12	2	2	0,104234	12	2	1,5	0,0817	3	16
12	2	2,25	0,098677	12	2	1,5	0,0817	1	14
12	2,2	0,95	0,162205	8	1,75	1	0,084606	5	22
12	2,2	1	0,156233	8	1,75	1	0,084606	5	22
12	2,2	1,25	0,145633	8	1,75	1	0,084606	5	22
12	2,2	1,5	0,137503	12	2	1,5	0,0817	3	17
12	2,2	2	0,148606	12	2	1,5	0,0817	4	18
12	2,2	2,25	0,141007	12	2	1,5	0,0817	3	16
14	1,2971	0,95	0,239042	8	1,75	1	0,084606	5	22
14	1,2971	1	0,240896	8	1,75	1	0,084606	5	22
14	1,6	0,95	0,146296	8	1,75	1	0,084606	5	21
14	1,6	1	0,134855	8	1,75	1	0,084606	5	21
14	1,75	0,95	0,096117	8	1,75	1	0,084606	2	15
14	1,75	1	0,104451	1	1,75	1,25	0,079929	3	22
14	1,75	1,25	0,097219	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
14	1,75	2,25	0,115387	12	2	1,5	0,0817	3	16

**Tableau 3 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=3$ ,  $k=2$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2	0,95	0,101715	12	2	1,5	0,0817	2	17
14	2	1	0,096144	12	2	1,5	0,0817	1	16
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,5	0,0817	1	15
14	2	2,25	0,098641	12	2	1,5	0,0817	1	16
14	2,2	0,95	0,159373	12	2	1,5	0,0817	2	17
14	2,2	1	0,153465	12	2	1,5	0,0817	2	17
14	2,2	1,25	0,140553	12	2	1,5	0,0817	2	17
16	1,2971	0,95	0,243069	8	1,75	1	0,084606	5	21
16	1,2971	1	0,243979	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	0,75	0,242819	8	1,75	1	0,084606	4	18
17,49	1,2971	0,95	0,245835	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1	0,246014	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1,1	0,247809	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1,15	0,248352	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,2971	1,25	0,24898	8	1,75	1	0,084606	5	20
17,49	1,75	0,75	0,201046	8	1,75	1	0,084606	4	18
17,49	1,75	0,95	0,129646	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,75	1	0,125653	8	1,75	1	0,084606	5	21
17,49	1,75	1,1	0,099594	1	1,75	1,25	0,079929	4	25
17,49	1,75	1,15	0,100737	8	1,75	1	0,084606	3	19
17,49	1,75	1,25	0,102941	8	1,75	1	0,084606	3	19
17,49	1,75	1,5	0,10999	8	1,75	1	0,084606	3	20
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	1	0,084606	3	20
17,49	1,75	1,5	0,10999	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	0,95	0,088341	3	19

**Tableau 4 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0.500000	1.600000	0.950000	0.138514	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
0.500000	1.600000	1.000000	0.111333	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	2	6
0.500000	1.600000	1.250000	0.122137	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	1	5
0.500000	1.600000	1.500000	0.129951	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	8
0.500000	1.600000	2.000000	0.141870	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	13
0.500000	1.600000	2.250000	0.143321	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	4	6
0.500000	1.750000	0.950000	0.129602	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	8
0.500000	1.750000	1.000000	0.085100	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	1	7
0.500000	1.750000	1.250000	0.080785	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	0	5
0.500000	1.750000	2.000000	0.105982	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	5
0.500000	1.750000	2.250000	0.106917	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	1	4
0.500000	2.000000	1.250000	0.103074	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	1	6
0.500000	2.000000	1.500000	0.087321	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	12
0.500000	2.000000	2.000000	0.104344	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	1	6
0.500000	2.000000	2.250000	0.100159	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	0	4
0.500000	2.200000	1.500000	0.171416	0.500000	2.200000	1.750000	0,08554	2	5
0.500000	2.200000	1.500000	0.153383	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	13
0.500000	2.200000	1.750000	0.085540	0.500000	2.200000	1.750000	0,08554	0	5
0.500000	2.200000	2.000000	0.147276	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	6
0.500000	2.200000	2.250000	0.148318	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	1	4
1.000000	1.297100	0.950000	0.221760	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	4	8
1.000000	1.297100	1.000000	0.224715	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	4	8
1.000000	1.450000	0.950000	0.162582	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
1.000000	1.450000	1.000000	0.163956	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
1.000000	1.600000	0.950000	0.114134	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
1.000000	1.600000	1.000000	0.113207	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
1.000000	1.600000	1.100000	0.115432	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
1.000000	1.600000	1.150000	0.118282	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	7
1.000000	1.600000	1.250000	0.123067	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	2	5
1.000000	1.600000	1.500000	0.131114	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	8
1.000000	1.600000	2.000000	0.141782	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	12
1.000000	1.600000	2.250000	0.142741	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	15
1.000000	1.750000	0.950000	0.093819	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	9
1.000000	1.750000	1.000000	0.085627	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	2	7
1.000000	1.750000	1.250000	0.079929	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	0	6
1.000000	1.750000	1.500000	0.085747	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	10
1.000000	1.750000	2.000000	0.105236	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	14
1.000000	1.750000	2.250000	0.106460	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	6
1.000000	2.000000	0.950000	0.145150	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	11
1.000000	2.000000	1.000000	0.131540	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	9

**Tableau 4 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1.000000	2.000000	1.250000	0.103812	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	2	6
1.000000	2.000000	1.500000	0.087889	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	12
1.000000	2.000000	2.000000	0.107125	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	6
1.000000	2.000000	2.250000	0.100755	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	1	4
1.000000	2.200000	0.950000	0.292603	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	11
1.000000	2.200000	1.000000	0.202057	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	4	9
1.000000	2.200000	1.250000	0.172771	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	7
1.000000	2.200000	1.500000	0.152470	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	13
1.000000	2.200000	2.000000	0.160278	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	3	6
1.000000	2.200000	2.250000	0.148792	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	4
4.000000	1.600000	0.950000	0.139330	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	4	7
4.000000	1.600000	1.000000	0.116802	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	4	7
4.000000	1.600000	1.250000	0.125859	0.500000	1.750000	1.250000	0,080785	3	6
4.000000	1.600000	1.500000	0.130129	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	10
4.000000	1.600000	2.000000	0.140693	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	17
4.000000	1.600000	2.250000	0.141640	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	17
4.000000	1.750000	0.950000	0.128598	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	10
4.000000	1.750000	1.000000	0.083449	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	9
4.000000	1.750000	1.250000	0.083099	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	6
4.000000	1.750000	1.500000	0.086634	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	10
4.000000	1.750000	1.750000	0.101899	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	15
4.000000	1.750000	2.000000	0.105388	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	14
4.000000	1.750000	2.250000	0.107027	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	3	7
4.000000	2.000000	0.950000	0.176538	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	11
4.000000	2.000000	1.000000	0.126052	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	12
4.000000	2.000000	1.250000	0.100062	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	8
4.000000	2.000000	1.500000	0.089667	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	12
4.000000	2.000000	2.000000	0.107238	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	3	7
4.000000	2.000000	2.250000	0.101262	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	5
4.000000	2.200000	0.950000	0.234220	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	13
4.000000	2.200000	1.000000	0.191951	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	13
4.000000	2.200000	1.250000	0.165578	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	10
4.000000	2.200000	1.500000	0.152470	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	13
4.000000	2.200000	2.000000	0.158544	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	4	10
4.000000	2.200000	2.250000	0.149356	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	3	5
8.000000	1.200000	0.950000	0.267250	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	9
8.000000	1.200000	1.000000	0.267213	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	9
8.000000	1.297100	0.950000	0.229109	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	9
8.000000	1.297100	1.000000	0.231033	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	9
8.000000	1.450000	0.950000	0.171876	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	8

**Tableau 4 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8.000000	1.450000	1.000000	0.173602	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	8
8.000000	1.600000	0.950000	0.123058	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	6
8.000000	1.600000	1.000000	0.123185	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	5
8.000000	1.600000	1.100000	0.124890	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	6
8.000000	1.600000	1.150000	0.126848	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	7
8.000000	1.600000	1.250000	0.130570	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	7
8.000000	1.600000	1.500000	0.135875	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	11
8.000000	1.600000	1.750000	0.142075	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	6	14
8.000000	1.600000	2.000000	0.143865	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	3	7
8.000000	1.600000	2.250000	0.143574	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	7
8.000000	1.750000	0.950000	0.088341	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	6
8.000000	1.750000	1.000000	0.084606	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	0	5
8.000000	1.750000	1.250000	0.089454	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	8
8.000000	1.750000	1.500000	0.096487	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	11
8.000000	1.750000	1.750000	0.104874	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	5	14
8.000000	1.750000	2.000000	0.107668	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	6
8.000000	1.750000	2.250000	0.106879	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	5
8.000000	1.810000	1.570000	0.090628	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	12
8.000000	2.000000	0.950000	0.118321	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	7
8.000000	2.000000	1.000000	0.108327	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	6
8.000000	2.000000	1.100000	0.098328	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	7
8.000000	2.000000	1.150000	0.097026	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	10
8.000000	2.000000	1.250000	0.095314	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	9
8.000000	2.000000	1.500000	0.095375	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	12
8.000000	2.000000	1.750000	0.100289	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	15
8.000000	2.000000	2.000000	0.106437	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	7
8.000000	2.000000	2.250000	0.101218	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	0	5
8.000000	2.000000	2.500000	0.111863	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	5
8.000000	2.000000	2.750000	0.113460	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	3	6
8.000000	2.200000	0.950000	0.176210	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	7
8.000000	2.200000	1.000000	0.171147	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	6
8.000000	2.200000	1.250000	0.156999	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	9
8.000000	2.200000	1.500000	0.145598	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	12
8.000000	2.200000	1.750000	0.153496	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	5	15
8.000000	2.200000	2.000000	0.154521	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	7
8.000000	2.200000	2.250000	0.146419	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	5
12.000000	1.297100	0.950000	0.235946	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	5	9
12.000000	1.297100	1.000000	0.236966	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	8
12.000000	1.600000	0.950000	0.138021	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	6
12.000000	1.600000	1.000000	0.129514	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	5

**Tableau 4 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12.000000	1.600000	1.100000	0.131682	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	6
12.000000	1.600000	1.150000	0.133598	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	3	7
12.000000	1.600000	1.250000	0.136215	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	3	7
12.000000	1.600000	1.500000	0.137333	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	2	8
12.000000	1.600000	2.000000	0.147315	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	4	7
12.000000	1.600000	2.250000	0.148278	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	4	6
12.000000	1.750000	0.950000	0.092259	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	6
12.000000	1.750000	1.000000	0.089973	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	0	5
12.000000	1.750000	1.250000	0.093949	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	2	6
12.000000	1.750000	1.500000	0.093277	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	1	5
12.000000	1.750000	1.750000	0.108145	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	2	5
12.000000	1.750000	2.000000	0.111150	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	2	5
12.000000	1.750000	2.250000	0.111580	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	1	4
12.000000	2.000000	0.950000	0.105234	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	7
12.000000	2.000000	1.000000	0.099813	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	6
12.000000	2.000000	1.250000	0.088098	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	1	7
12.000000	2.000000	1.500000	0.081700	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	0	5
12.000000	2.000000	2.000000	0.104234	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	1	6
12.000000	2.000000	2.250000	0.098677	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	0	4
12.000000	2.200000	0.950000	0.162205	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	7
12.000000	2.200000	1.000000	0.156233	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	6
12.000000	2.200000	1.250000	0.145633	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	2	7
12.000000	2.200000	1.500000	0.137503	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	1	5
12.000000	2.200000	2.000000	0.148606	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	2	6
12.000000	2.200000	2.250000	0.141007	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	1	4
14.000000	1.297100	0.950000	0.239042	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	6	9
14.000000	1.297100	1.000000	0.240896	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	8
14.000000	1.600000	0.950000	0.146296	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	6
14.000000	1.600000	1.000000	0.134855	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	5
14.000000	1.750000	0.950000	0.096117	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	6
14.000000	1.750000	1.000000	0.104451	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	5
14.000000	1.750000	1.250000	0.097219	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	3	6
14.000000	1.750000	2.250000	0.115387	12.000000	2.000000	2.250000	0,098677	2	4
14.000000	2.000000	0.950000	0.101715	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	8
14.000000	2.000000	1.000000	0.096144	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	3	11
14.000000	2.000000	1.250000	0.089852	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	2	7
14.000000	2.000000	2.250000	0.098641	14.000000	2.000000	2.250000	0,098641	0	3
14.000000	2.200000	0.950000	0.159373	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	4	10
14.000000	2.200000	1.000000	0.153465	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	4	13
14.000000	2.200000	1.250000	0.140553	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	3	9

**Tableau 4 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
16.000000	1.297100	0.950000	0.243069	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	7	10
16.000000	1.297100	1.000000	0.243979	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	4	9
17.490000	1.297100	0.750000	0.242819	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	0	4
17.490000	1.297100	0.950000	0.245835	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	8	11
17.490000	1.297100	1.000000	0.246014	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	5	10
17.490000	1.297100	1.100000	0.247809	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	5	10
17.490000	1.297100	1.150000	0.248352	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	5	10
17.490000	1.297100	1.250000	0.248980	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	5	10
17.490000	1.750000	0.750000	0.201046	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	8
17.490000	1.750000	0.950000	0.129646	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	7
17.490000	1.750000	1.000000	0.125653	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	6
17.490000	1.750000	1.100000	0.099594	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	0	7
17.490000	1.750000	1.150000	0.100737	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	1	6
17.490000	1.750000	1.250000	0.102941	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	4	7
17.490000	1.750000	1.500000	0.109990	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	5	10
17.490000	1.750000	1.750000	0.115155	12.000000	2.000000	1.500000	0,0817	6	10



**Tableau 5 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	12
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
0,5	1,6	1,5	0,129951	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
0,5	1,6	2	0,14187	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
0,5	1,6	2,25	0,143321	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
0,5	1,75	0,95	0,129602	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
0,5	1,75	1	0,0851	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	11
0,5	1,75	1,25	0,080785	0,5	1,75	1,25	0,080785	0	10
0,5	1,75	2	0,105982	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	12
0,5	1,75	2,25	0,106917	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	4	20
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
0,5	2	2	0,104344	1	1,75	1,25	0,079929	4	20
0,5	2	2,25	0,100159	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
0,5	2,2	1,5	0,171416	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	14
0,5	2,2	1,5	0,153383	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	9
0,5	2,2	2	0,147276	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
0,5	2,2	2,25	0,148318	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
1	1,2971	0,95	0,22176	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,2971	1	0,224715	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,45	0,95	0,162582	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,45	1	0,163956	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
1	1,6	1,5	0,131114	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
1	1,6	2	0,141782	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	15
1	1,6	2,25	0,142741	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
1	1,75	0,95	0,093819	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
1	1,75	1	0,085627	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	11
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	14
1	1,75	2	0,105236	1	1,75	1,25	0,079929	3	19
1	1,75	2,25	0,10646	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
1	2	0,95	0,14515	1	1,75	1,25	0,079929	5	20

**Tableau 5 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	N final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	2	1	0,13154	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	3	16
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
1	2	2,25	0,100755	1	1,75	1,25	0,079929	4	17
1	2,2	0,95	0,292603	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
1	2,2	1	0,202057	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
1	2,2	1,25	0,172771	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	14
1	2,2	1,5	0,15247	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	16
1	2,2	2	0,160278	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
1	2,2	2,25	0,148792	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	13
4	1,6	0,95	0,13933	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
4	1,6	1,25	0,125859	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
4	1,6	1,5	0,130129	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
4	1,6	2	0,140693	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
4	1,6	2,25	0,14164	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	1,75	0,95	0,128598	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
4	1,75	1	0,083449	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,25	0,083099	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
4	1,75	1,75	0,101899	1	1,75	1,25	0,079929	3	23
4	1,75	2	0,105388	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	15
4	1,75	2,25	0,107027	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
4	2	0,95	0,176538	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	2	1	0,126052	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	2	1,25	0,100062	1	1,75	1,25	0,079929	2	15
4	2	1,5	0,089667	1	1,75	1,25	0,079929	3	16
4	2	2	0,107238	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	2	2,25	0,101262	1	1,75	1,25	0,079929	4	17
4	2,2	0,95	0,23422	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	2,2	1	0,191951	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
4	2,2	1,25	0,165578	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	14
4	2,2	1,5	0,15247	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	16
4	2,2	2	0,158544	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
4	2,2	2,25	0,149356	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	13
8	1,2	0,95	0,26725	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
8	1,2	1	0,267213	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	12
8	1,2971	0,95	0,229109	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
8	1,2971	1	0,231033	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	12

**Tableau 5 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,45	0,95	0,171876	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
8	1,45	1	0,173602	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
8	1,6	0,95	0,123058	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
8	1,6	1	0,123185	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
8	1,6	1,1	0,12489	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
8	1,6	1,15	0,126848	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
8	1,6	1,25	0,13057	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
8	1,6	1,5	0,135875	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
8	1,6	1,75	0,142075	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
8	1,6	2	0,143865	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
8	1,6	2,25	0,143574	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	1	0,084606	1	14
8	1,75	1	0,084606	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	1,75	1,25	0,089454	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,75	2	0,107668	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	12
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,81	1,57	0,090628	1	1,75	1,25	0,079929	2	14
8	2	0,95	0,118321	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
8	2	1	0,108327	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
8	2	1,1	0,098328	1	1,75	1,25	0,079929	4	19
8	2	1,15	0,097026	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
8	2	1,25	0,095314	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
8	2	1,5	0,095375	1	1,75	1,25	0,079929	3	16
8	2	1,75	0,100289	1	1,75	1,25	0,079929	3	16
8	2	2	0,106437	1	1,75	1,25	0,079929	5	20
8	2	2,25	0,101218	1	1,75	1,25	0,079929	4	17
8	2	2,5	0,111863	1	1,75	1,25	0,079929	4	17
8	2	2,75	0,11346	1	1,75	1,25	0,079929	4	17
8	2,2	0,95	0,17621	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	18
8	2,2	1	0,171147	0,5	1,75	1,25	0,080785	7	17
8	2,2	1,25	0,156999	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
8	2,2	1,5	0,145598	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
8	2,2	1,75	0,153496	0,5	2,2	1,75	0,08554	1	9
8	2,2	2	0,154521	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
8	2,2	2,25	0,146419	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	15
12	1,2971	0,95	0,235946	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
12	1,2971	1	0,236966	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	12
12	1,6	0,95	0,138021	8	1,75	1	0,084606	3	17

**Tableau 5 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	N final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12	1,6	1	0,129514	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
12	1,6	1,1	0,131682	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
12	1,6	1,15	0,133598	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
12	1,6	1,25	0,136215	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
12	1,6	1,5	0,137333	0,5	1,75	1,25	0,080785	6	14
12	1,6	2	0,147315	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
12	1,6	2,25	0,148278	1	1,75	1,25	0,079929	6	20
12	1,75	0,95	0,092259	8	1,75	1	0,084606	2	16
12	1,75	1	0,089973	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
12	1,75	1,25	0,093949	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
12	1,75	1,5	0,093277	1	1,75	1,25	0,079929	3	19
12	1,75	1,75	0,108145	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
12	1,75	2	0,11115	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	16
12	1,75	2,25	0,11158	1	1,75	1,25	0,079929	4	19
12	2	0,95	0,105234	12	2	1,5	0,0817	2	17
12	2	1	0,099813	12	2	1,5	0,0817	2	17
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,5	0,0817	1	14
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	12
12	2	2	0,104234	12	2	1,5	0,0817	2	17
12	2	2,25	0,098677	12	2	1,5	0,0817	1	14
12	2,2	0,95	0,162205	1	1,75	1,25	0,079929	6	24
12	2,2	1	0,156233	1	1,75	1,25	0,079929	6	24
12	2,2	1,25	0,145633	1	1,75	1,25	0,079929	6	24
12	2,2	1,5	0,137503	0,5	1,75	1,25	0,080785	8	22
12	2,2	2	0,148606	1	1,75	1,25	0,079929	7	24
12	2,2	2,25	0,141007	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
14	1,2971	0,95	0,239042	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
14	1,2971	1	0,240896	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
14	1,6	0,95	0,146296	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
14	1,6	1	0,134855	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
14	1,75	0,95	0,096117	8	1,75	1	0,084606	2	16
14	1,75	1	0,104451	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
14	1,75	1,25	0,097219	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
14	1,75	2,25	0,115387	1	1,75	1,25	0,079929	4	19
14	2	0,95	0,101715	12	2	1,5	0,0817	2	19
14	2	1	0,096144	12	2	1,5	0,0817	1	16
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,5	0,0817	2	16
14	2	2,25	0,098641	12	2	1,5	0,0817	1	16
14	2,2	0,95	0,159373	12	2	1,5	0,0817	2	19
14	2,2	1	0,153465	12	2	1,5	0,0817	2	19

**Tableau 5 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2,2	1,25	0,140553	12	2	1,5	0,0817	2	19
16	1,2971	0,95	0,243069	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
16	1,2971	1	0,243979	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
17,49	1,2971	0,75	0,242819	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
17,49	1,2971	0,95	0,245835	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
17,49	1,2971	1	0,246014	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
17,49	1,2971	1,1	0,247809	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
17,49	1,2971	1,15	0,248352	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
17,49	1,2971	1,25	0,24898	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	13
17,49	1,75	0,75	0,201046	8	1,75	1	0,084606	2	14
17,49	1,75	0,95	0,129646	8	1,75	1	0,084606	2	14
17,49	1,75	1	0,125653	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
17,49	1,75	1,1	0,099594	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
17,49	1,75	1,15	0,100737	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
17,49	1,75	1,25	0,102941	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
17,49	1,75	1,5	0,10999	8	1,75	1	0,084606	3	19
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	1	0,084606	3	19

**Tableau 6 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	13
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
0,5	1,6	1,5	0,129951	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
0,5	1,6	2	0,14187	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
0,5	1,6	2,25	0,143321	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
0,5	1,75	0,95	0,129602	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	16
0,5	1,75	1	0,0851	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	11
0,5	1,75	1,25	0,080785	0,5	1,75	1,25	0,080785	0	10
0,5	1,75	2	0,105982	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	13
0,5	1,75	2,25	0,106917	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	14
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
0,5	2	2	0,104344	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
0,5	2	2,25	0,100159	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
0,5	2,2	1,5	0,171416	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
0,5	2,2	1,5	0,153383	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	11
0,5	2,2	2	0,147276	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
0,5	2,2	2,25	0,148318	1	1,75	1,25	0,079929	5	21
1	1,2971	0,95	0,22176	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,2971	1	0,224715	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,45	0,95	0,162582	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,45	1	0,163956	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	15
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
1	1,6	1,5	0,131114	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
1	1,6	2	0,141782	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	1,6	2,25	0,142741	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
1	1,75	0,95	0,093819	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
1	1,75	1	0,085627	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	12
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	15
1	1,75	2	0,105236	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
1	1,75	2,25	0,10646	1	1,75	1,25	0,079929	3	20

**Tableau 6 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	2	0,95	0,14515	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2	1	0,13154	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2	2,25	0,100755	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
1	2,2	0,95	0,292603	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2,2	1	0,202057	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
1	2,2	1,25	0,172771	1	1,75	1,25	0,079929	7	22
1	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	5	22
1	2,2	2	0,160278	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
1	2,2	2,25	0,148792	1	1,75	1,25	0,079929	6	21
4	1,6	0,95	0,13933	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
4	1,6	1,25	0,125859	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
4	1,6	1,5	0,130129	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
4	1,6	2	0,140693	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
4	1,6	2,25	0,14164	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	1,75	0,95	0,128598	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
4	1,75	1	0,083449	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,25	0,083099	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
4	1,75	1,75	0,101899	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	17
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
4	1,75	2,25	0,107027	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	14
4	2	0,95	0,176538	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2	1	0,126052	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2	1,25	0,100062	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	2	1,5	0,089667	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
4	2	2	0,107238	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2	2,25	0,101262	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
4	2,2	0,95	0,23422	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2,2	1	0,191951	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2,2	1,25	0,165578	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
4	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
4	2,2	2	0,158544	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
4	2,2	2,25	0,149356	1	1,75	1,25	0,079929	6	21
8	1,2	0,95	0,26725	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,2	1	0,267213	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,2971	0,95	0,229109	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13

**Tableau 6 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,2971	1	0,231033	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,45	0,95	0,171876	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,45	1	0,173602	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,6	0,95	0,123058	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,6	1	0,123185	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,6	1,1	0,12489	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
8	1,6	1,15	0,126848	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
8	1,6	1,25	0,13057	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
8	1,6	1,5	0,135875	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
8	1,6	1,75	0,142075	1	1,75	1,25	0,079929	6	23
8	1,6	2	0,143865	1	1,75	1,25	0,079929	6	23
8	1,6	2,25	0,143574	1	1,75	1,25	0,079929	6	21
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	1	0,084606	1	15
8	1,75	1	0,084606	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	1,75	1,25	0,089454	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,75	2	0,107668	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	13
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	1	0,084606	2	18
8	1,81	1,57	0,090628	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
8	2	0,95	0,118321	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
8	2	1	0,108327	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
8	2	1,1	0,098328	8	1,75	1	0,084606	1	15
8	2	1,15	0,097026	8	1,75	1	0,084606	3	19
8	2	1,25	0,095314	8	1,75	1	0,084606	3	17
8	2	1,5	0,095375	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
8	2	1,75	0,100289	1	1,75	1,25	0,079929	4	20
8	2	2	0,106437	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
8	2	2,25	0,101218	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
8	2	2,5	0,111863	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
8	2	2,75	0,11346	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
8	2,2	0,95	0,17621	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
8	2,2	1	0,171147	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
8	2,2	1,25	0,156999	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
8	2,2	1,5	0,145598	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
8	2,2	1,75	0,153496	0,5	2,2	1,75	0,08554	1	11
8	2,2	2	0,154521	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
8	2,2	2,25	0,146419	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
12	1,2971	0,95	0,235946	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
12	1,2971	1	0,236966	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13



**Tableau 6 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12	1,6	0,95	0,138021	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
12	1,6	1	0,129514	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
12	1,6	1,1	0,131682	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
12	1,6	1,15	0,133598	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
12	1,6	1,25	0,136215	0,5	1,75	1,25	0,080785	5	14
12	1,6	1,5	0,137333	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
12	1,6	2	0,147315	1	1,75	1,25	0,079929	6	23
12	1,6	2,25	0,148278	1	1,75	1,25	0,079929	6	21
12	1,75	0,95	0,092259	8	1,75	1	0,084606	2	19
12	1,75	1	0,089973	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
12	1,75	1,25	0,093949	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
12	1,75	1,5	0,093277	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
12	1,75	1,75	0,108145	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	13
12	1,75	2	0,111115	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	13
12	1,75	2,25	0,11158	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	14
12	2	0,95	0,105234	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
12	2	1	0,099813	12	2	1,5	0,0817	2	21
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,5	0,0817	1	17
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	15
12	2	2	0,104234	12	2	1,5	0,0817	2	19
12	2	2,25	0,098677	12	2	1,5	0,0817	1	16
12	2,2	0,95	0,162205	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
12	2,2	1	0,156233	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
12	2,2	1,25	0,145633	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
12	2,2	1,5	0,137503	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
12	2,2	2	0,148606	1	1,75	1,25	0,079929	6	22
12	2,2	2,25	0,141007	1	1,75	1,25	0,079929	5	23
14	1,2971	0,95	0,239042	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
14	1,2971	1	0,240896	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
14	1,6	0,95	0,146296	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
14	1,6	1	0,134855	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	13
14	1,75	0,95	0,096117	8	1,75	1	0,084606	2	18
14	1,75	1	0,104451	0,5	1,75	1,25	0,080785	2	11
14	1,75	1,25	0,097219	0,5	1,75	1,25	0,080785	1	10
14	1,75	2,25	0,115387	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	14
14	2	0,95	0,101715	12	2	1,5	0,0817	3	24
14	2	1	0,096144	12	2	1,5	0,0817	1	17
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,5	0,0817	2	16
14	2	2,25	0,098641	12	2	1,5	0,0817	2	22
14	2,2	0,95	0,159373	1	1,75	1,25	0,079929	5	24

**Tableau 6 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=3$ ,  $n=2$ ,  $k=1$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2,2	1	0,153465	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
14	2,2	1,25	0,140553	1	1,75	1,25	0,079929	5	24
16	1,2971	0,95	0,243069	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
16	1,2971	1	0,243979	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
17,49	1,2971	0,75	0,242819	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
17,49	1,2971	0,95	0,245835	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	14
17,49	1,2971	1	0,246014	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
17,49	1,2971	1,1	0,247809	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
17,49	1,2971	1,15	0,248352	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
17,49	1,2971	1,25	0,24898	0,5	1,75	1,25	0,080785	4	13
17,49	1,75	0,75	0,201046	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
17,49	1,75	0,95	0,129646	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
17,49	1,75	1	0,125653	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
17,49	1,75	1,1	0,099594	0,5	1,75	1,25	0,080785	3	12
17,49	1,75	1,15	0,100737	1	1,75	1,25	0,079929	1	12
17,49	1,75	1,25	0,102941	1	1,75	1,25	0,079929	1	12
17,49	1,75	1,5	0,10999	1	1,75	1,25	0,079929	2	15
17,49	1,75	1,75	0,115155	1	1,75	1,25	0,079929	2	15

**Tableau 7 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0.500000	1.600000	0.950000	0.138514	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	5
0.500000	1.600000	1.000000	0.111333	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	1	6
0.500000	1.600000	1.250000	0.122137	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	2	6
0.500000	1.600000	1.500000	0.129951	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	3	7
0.500000	1.600000	2.000000	0.141870	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	4	8
0.500000	1.600000	2.250000	0.143321	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	5	9
0.500000	1.750000	0.950000	0.129602	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	2	7
0.500000	1.750000	1.000000	0.085100	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	0	5
0.500000	1.750000	1.250000	0.080785	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	9
0.500000	1.750000	2.000000	0.105982	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	7
0.500000	1.750000	2.250000	0.106917	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	8
0.500000	2.000000	1.250000	0.103074	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	11
0.500000	2.000000	1.500000	0.087321	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	9
0.500000	2.000000	2.000000	0.104344	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	10
0.500000	2.000000	2.250000	0.100159	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	0	5
0.500000	2.200000	1.500000	0.171416	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	11
0.500000	2.200000	1.500000	0.153383	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	12
0.500000	2.200000	1.750000	0.085540	0.500000	2.200000	1.750000	0,085540	0	4
0.500000	2.200000	2.000000	0.147276	0.500000	2.200000	1.750000	0,085540	1	4
0.500000	2.200000	2.250000	0.148318	0.500000	2.200000	1.750000	0,085540	2	5
1.000000	1.297100	0.950000	0.221760	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	4	8
1.000000	1.297100	1.000000	0.224715	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	5	8
1.000000	1.450000	0.950000	0.162582	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	3	8
1.000000	1.450000	1.000000	0.163956	0.500000	1.750000	1.000000	0,085100	4	8
1.000000	1.600000	0.950000	0.114134	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	1	5
1.000000	1.600000	1.000000	0.113207	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	2	6
1.000000	1.600000	1.100000	0.115432	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	5
1.000000	1.600000	1.150000	0.118282	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	5
1.000000	1.600000	1.250000	0.123067	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	3	7
1.000000	1.600000	1.500000	0.131114	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	4	8
1.000000	1.600000	2.000000	0.141782	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	5	9
1.000000	1.600000	2.250000	0.142741	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	6	10
1.000000	1.750000	0.950000	0.093819	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	0	5
1.000000	1.750000	1.000000	0.085627	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	1	8
1.000000	1.750000	1.250000	0.079929	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	0	6
1.000000	1.750000	1.500000	0.085747	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	6
1.000000	1.750000	2.000000	0.105236	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	7

**Tableau 7 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1.000000	1.750000	2.250000	0.106460	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	8
1.000000	2.000000	0.950000	0.145150	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	1	6
1.000000	2.000000	1.000000	0.131540	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	2	10
1.000000	2.000000	1.250000	0.103812	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	8
1.000000	2.000000	1.500000	0.087889	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	8
1.000000	2.000000	2.000000	0.107125	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	9
1.000000	2.000000	2.250000	0.100755	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	1	9
1.000000	2.200000	0.950000	0.292603	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	6
1.000000	2.200000	1.000000	0.202057	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	3	11
1.000000	2.200000	1.250000	0.172771	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	9
1.000000	2.200000	1.500000	0.152470	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	10
1.000000	2.200000	2.000000	0.160278	0.500000	2.200000	1.750000	0,085540	1	4
1.000000	2.200000	2.250000	0.148792	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	10
4.000000	1.600000	0.950000	0.139330	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	6
4.000000	1.600000	1.000000	0.116802	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	1	6
4.000000	1.600000	1.250000	0.125859	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	2	6
4.000000	1.600000	1.500000	0.130129	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	3	7
4.000000	1.600000	2.000000	0.140693	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	11
4.000000	1.600000	2.250000	0.141640	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	12
4.000000	1.750000	0.950000	0.128598	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	1	7
4.000000	1.750000	1.000000	0.083449	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	0	5
4.000000	1.750000	1.250000	0.083099	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	1	9
4.000000	1.750000	1.500000	0.086634	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	9
4.000000	1.750000	1.750000	0.101899	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	10
4.000000	1.750000	2.000000	0.105388	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	11
4.000000	1.750000	2.250000	0.107027	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	12
4.000000	2.000000	0.950000	0.176538	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	2	8
4.000000	2.000000	1.000000	0.126052	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	1	7
4.000000	2.000000	1.250000	0.100062	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	2	11
4.000000	2.000000	1.500000	0.089667	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	11
4.000000	2.000000	2.000000	0.107238	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	12
4.000000	2.000000	2.250000	0.101262	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	2	12
4.000000	2.200000	0.950000	0.234220	1.000000	1.750000	0.950000	0,093819	3	8
4.000000	2.200000	1.000000	0.191951	4.000000	1.750000	1.000000	0,083449	2	8
4.000000	2.200000	1.250000	0.165578	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	3	12
4.000000	2.200000	1.500000	0.152470	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	4	13
4.000000	2.200000	2.000000	0.158544	1.000000	1.750000	1.250000	0,079929	5	13
4.000000	2.200000	2.250000	0.149356	0.500000	2.000000	2.250000	0,100159	3	13
8.000000	1.200000	0.950000	0.267250	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	3	5
8.000000	1.200000	1.000000	0.267213	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	4	6

**Tableau 7 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8.000000	1.297100	0.950000	0.229109	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	3	5
8.000000	1.297100	1.000000	0.231033	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	4	5
8.000000	1.450000	0.950000	0.171876	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	2	4
8.000000	1.450000	1.000000	0.173602	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	3	4
8.000000	1.600000	0.950000	0.123058	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	1	3
8.000000	1.600000	1.000000	0.123185	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	2	3
8.000000	1.600000	1.100000	0.124890	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	2	3
8.000000	1.600000	1.150000	0.126848	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	2	3
8.000000	1.600000	1.250000	0.130570	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	3	4
8.000000	1.600000	1.500000	0.135875	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	4	5
8.000000	1.600000	1.750000	0.142075	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	5	6
8.000000	1.600000	2.000000	0.143865	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	6	7
8.000000	1.600000	2.250000	0.143574	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	6
8.000000	1.750000	0.950000	0.088341	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	0	3
8.000000	1.750000	1.000000	0.084606	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	0	4
8.000000	1.750000	1.250000	0.089454	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	4
8.000000	1.750000	1.500000	0.096487	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	5
8.000000	1.750000	1.750000	0.104874	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	6
8.000000	1.750000	2.000000	0.107668	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	7
8.000000	1.750000	2.250000	0.106879	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	5
8.000000	1.810000	1.570000	0.090628	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	5
8.000000	2.000000	0.950000	0.118321	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	1	4
8.000000	2.000000	1.000000	0.108327	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	6
8.000000	2.000000	1.100000	0.098328	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	1	6
8.000000	2.000000	1.150000	0.097026	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	7
8.000000	2.000000	1.250000	0.095314	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	6
8.000000	2.000000	1.500000	0.095375	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	7
8.000000	2.000000	1.750000	0.100289	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	8
8.000000	2.000000	2.000000	0.106437	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	5	9
8.000000	2.000000	2.250000	0.101218	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	0	4
8.000000	2.000000	2.500000	0.111863	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	4
8.000000	2.000000	2.750000	0.113460	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	2	5
8.000000	2.200000	0.950000	0.176210	8.000000	1.750000	0.950000	0,088341	2	4
8.000000	2.200000	1.000000	0.171147	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	2	7
8.000000	2.200000	1.250000	0.156999	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	3	8
8.000000	2.200000	1.500000	0.145598	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	4	9
8.000000	2.200000	1.750000	0.153496	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	5	9
8.000000	2.200000	2.000000	0.154521	8.000000	1.750000	1.000000	0,084606	6	10
8.000000	2.200000	2.250000	0.146419	8.000000	2.000000	2.250000	0,101218	1	5
12.000000	1.297100	0.950000	0.235946	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	6

**Tableau 7 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12.000000	1.297100	1.000000	0.236966	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	3	6
12.000000	1.600000	0.950000	0.138021	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	1	4
12.000000	1.600000	1.000000	0.129514	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	6
12.000000	1.600000	1.100000	0.131682	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	6
12.000000	1.600000	1.150000	0.133598	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	8
12.000000	1.600000	1.250000	0.136215	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	6
12.000000	1.600000	1.500000	0.137333	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	3	7
12.000000	1.600000	2.000000	0.147315	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	3	7
12.000000	1.600000	2.250000	0.148278	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	4	8
12.000000	1.750000	0.950000	0.092259	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	0	4
12.000000	1.750000	1.000000	0.089973	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	0	5
12.000000	1.750000	1.250000	0.093949	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	5
12.000000	1.750000	1.500000	0.093277	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	1	6
12.000000	1.750000	1.750000	0.108145	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	2	6
12.000000	1.750000	2.000000	0.111150	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	3	7
12.000000	1.750000	2.250000	0.111580	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	4	8
12.000000	2.000000	0.950000	0.105234	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	1	5
12.000000	2.000000	1.000000	0.099813	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	1	7
12.000000	2.000000	1.250000	0.088098	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	0	5
12.000000	2.000000	1.500000	0.081700	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	0	5
12.000000	2.000000	2.000000	0.104234	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	1	5
12.000000	2.000000	2.250000	0.098677	14.000000	2.000000	2.250000	0,098641	1	6
12.000000	2.200000	0.950000	0.162205	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	5
12.000000	2.200000	1.000000	0.156233	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	8
12.000000	2.200000	1.250000	0.145633	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	1	6
12.000000	2.200000	1.500000	0.137503	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	1	6
12.000000	2.200000	2.000000	0.148606	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	2	6
12.000000	2.200000	2.250000	0.141007	14.000000	2.000000	2.250000	0,098641	2	7
14.000000	1.297100	0.950000	0.239042	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	3	6
14.000000	1.297100	1.000000	0.240896	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	4	6
14.000000	1.600000	0.950000	0.146296	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	6
14.000000	1.600000	1.000000	0.134855	12.000000	1.750000	1.000000	0,089973	2	7
14.000000	1.750000	0.950000	0.096117	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	1	7
14.000000	1.750000	1.000000	0.104451	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	7
14.000000	1.750000	1.250000	0.097219	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	2	6
14.000000	1.750000	2.250000	0.115387	12.000000	2.000000	1.500000	0,081700	4	8
14.000000	2.000000	0.950000	0.101715	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	8
14.000000	2.000000	1.000000	0.096144	14.000000	2.000000	1.000000	0,096144	0	5
14.000000	2.000000	1.250000	0.089852	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	1	8
14.000000	2.000000	2.250000	0.098641	14.000000	2.000000	2.250000	0,098641	0	5

**Tableau 7 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=1$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14.000000	2.200000	0.950000	0.159373	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	3	8
14.000000	2.200000	1.000000	0.153465	14.000000	2.000000	1.000000	0,096144	1	6
14.000000	2.200000	1.250000	0.140553	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	2	9
16.000000	1.297100	0.950000	0.243069	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
16.000000	1.297100	1.000000	0.243979	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	0.750000	0.242819	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	0	2
17.490000	1.297100	0.950000	0.245835	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.000000	0.246014	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.100000	0.247809	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	1	2
17.490000	1.297100	1.150000	0.248352	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	2	3
17.490000	1.297100	1.250000	0.248980	17.490000	1.297100	0.750000	0,242819	2	3
17.490000	1.750000	0.750000	0.201046	17.490000	1.750000	0.750000	0,201046	0	1
17.490000	1.750000	0.950000	0.129646	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	2	8
17.490000	1.750000	1.000000	0.125653	12.000000	1.750000	0.950000	0,092259	3	10
17.490000	1.750000	1.100000	0.099594	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	0	4
17.490000	1.750000	1.150000	0.100737	17.490000	1.750000	1.100000	0,099594	1	4
17.490000	1.750000	1.250000	0.102941	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	3	9
17.490000	1.750000	1.500000	0.109990	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	4	9
17.490000	1.750000	1.750000	0.115155	12.000000	2.000000	1.250000	0,088098	5	10

**Tableau 8 - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	4	1,75	1	0,083449	4	15
0,5	1,6	1	0,111333	4	1,75	1	0,083449	2	12
0,5	1,6	1,25	0,122137	4	1,75	1	0,083449	4	15
0,5	1,6	1,5	0,129951	4	1,75	1	0,083449	4	15
0,5	1,6	2	0,14187	4	1,75	1	0,083449	4	15
0,5	1,6	2,25	0,143321	4	1,75	1	0,083449	4	15
0,5	1,75	0,95	0,129602	8	1,75	0,95	0,088341	1	12
0,5	1,75	1	0,0851	4	1,75	1	0,083449	2	16
0,5	1,75	1,25	0,080785	1	1,75	1,25	0,079929	1	13
0,5	1,75	2	0,105982	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
0,5	1,75	2,25	0,106917	8	1,75	0,95	0,088341	2	13
0,5	2	1,25	0,103074	12	2	1,25	0,088098	2	17
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
0,5	2	2	0,104344	12	2	1,25	0,088098	4	24
0,5	2	2,25	0,100159	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
0,5	2,2	1,5	0,171416	8	1,75	0,95	0,088341	6	21
0,5	2,2	1,5	0,153383	8	1,75	0,95	0,088341	5	22
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	9
0,5	2,2	2	0,147276	4	1,75	1	0,083449	5	17
0,5	2,2	2,25	0,148318	4	1,75	1	0,083449	5	17
1	1,2971	0,95	0,22176	4	1,75	1	0,083449	3	15
1	1,2971	1	0,224715	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,45	0,95	0,162582	4	1,75	1	0,083449	3	16
1	1,45	1	0,163956	4	1,75	1	0,083449	4	16
1	1,6	0,95	0,114134	4	1,75	1	0,083449	3	15
1	1,6	1	0,113207	4	1,75	1	0,083449	3	12
1	1,6	1,1	0,115432	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,6	1,15	0,118282	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,6	1,25	0,123067	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,6	1,5	0,131114	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,6	2	0,141782	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,6	2,25	0,142741	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	1,75	0,95	0,093819	8	1,75	0,95	0,088341	1	13
1	1,75	1	0,085627	4	1,75	1	0,083449	2	16
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	10
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	12



**Tableau 8 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	1,75	2	0,105236	8	1,75	0,95	0,088341	2	13
1	1,75	2,25	0,10646	8	1,75	0,95	0,088341	2	13
1	2	0,95	0,14515	8	1,75	0,95	0,088341	4	16
1	2	1	0,13154	4	1,75	1	0,083449	5	24
1	2	1,25	0,103812	12	2	1,25	0,088098	2	17
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
1	2	2	0,107125	12	2	1,25	0,088098	6	29
1	2	2,25	0,100755	1	1,75	1,25	0,079929	4	20
1	2,2	0,95	0,292603	4	1,75	1	0,083449	4	15
1	2,2	1	0,202057	4	1,75	1	0,083449	5	21
1	2,2	1,25	0,172771	8	1,75	0,95	0,088341	5	22
1	2,2	1,5	0,15247	8	1,75	0,95	0,088341	5	22
1	2,2	2	0,160278	4	1,75	1	0,083449	5	17
1	2,2	2,25	0,148792	4	1,75	1	0,083449	5	17
4	1,6	0,95	0,13933	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
4	1,6	1	0,116802	4	1,75	1	0,083449	3	16
4	1,6	1,25	0,125859	4	1,75	1	0,083449	5	20
4	1,6	1,5	0,130129	4	1,75	1	0,083449	5	20
4	1,6	2	0,140693	8	1,75	0,95	0,088341	4	18
4	1,6	2,25	0,14164	8	1,75	0,95	0,088341	4	18
4	1,75	0,95	0,128598	8	1,75	0,95	0,088341	2	12
4	1,75	1	0,083449	4	1,75	1	0,083449	0	11
4	1,75	1,25	0,083099	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,75	0,101899	4	1,75	1	0,083449	1	13
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	3	19
4	1,75	2,25	0,107027	8	1,75	0,95	0,088341	3	17
4	2	0,95	0,176538	8	1,75	0,95	0,088341	3	15
4	2	1	0,126052	4	1,75	1	0,083449	4	21
4	2	1,25	0,100062	12	2	1,25	0,088098	1	14
4	2	1,5	0,089667	12	2	1,5	0,0817	1	14
4	2	2	0,107238	12	2	1,25	0,088098	2	17
4	2	2,25	0,101262	12	2	1,5	0,0817	2	17
4	2,2	0,95	0,23422	4	1,75	1	0,083449	4	16
4	2,2	1	0,191951	4	1,75	1	0,083449	4	21
4	2,2	1,25	0,165578	8	1,75	0,95	0,088341	4	21
4	2,2	1,5	0,15247	4	1,75	1	0,083449	6	22
4	2,2	2	0,158544	8	1,75	0,95	0,088341	5	20
4	2,2	2,25	0,149356	8	1,75	0,95	0,088341	5	20
8	1,2	0,95	0,26725	8	1,75	0,95	0,088341	4	14

**Tableau 8 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,2	1	0,267213	4	1,75	1	0,083449	5	19
8	1,2971	0,95	0,229109	8	1,75	0,95	0,088341	4	15
8	1,2971	1	0,231033	8	1,75	0,95	0,088341	5	15
8	1,45	0,95	0,171876	4	1,75	1	0,083449	3	16
8	1,45	1	0,173602	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	0,95	0,123058	4	1,75	1	0,083449	3	16
8	1,6	1	0,123185	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	1,1	0,12489	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	1,15	0,126848	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	1,25	0,13057	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	1,5	0,135875	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	1,75	0,142075	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	2	0,143865	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,6	2,25	0,143574	4	1,75	1	0,083449	4	16
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	0,95	0,088341	0	10
8	1,75	1	0,084606	4	1,75	1	0,083449	1	14
8	1,75	1,25	0,089454	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	1,75	2	0,107668	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	1,81	1,57	0,090628	8	1,75	0,95	0,088341	1	10
8	2	0,95	0,118321	8	1,75	0,95	0,088341	3	14
8	2	1	0,108327	4	1,75	1	0,083449	4	21
8	2	1,1	0,098328	4	1,75	1	0,083449	2	16
8	2	1,15	0,097026	12	2	1,25	0,088098	1	15
8	2	1,25	0,095314	12	2	1,25	0,088098	1	14
8	2	1,5	0,095375	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	2	1,75	0,100289	0,5	2,2	1,75	0,08554	1	12
8	2	2	0,106437	12	2	1,25	0,088098	5	27
8	2	2,25	0,101218	12	2	1,5	0,0817	2	18
8	2	2,5	0,111863	4	1,75	1	0,083449	3	17
8	2	2,75	0,11346	1	1,75	1,25	0,079929	4	20
8	2,2	0,95	0,17621	8	1,75	0,95	0,088341	3	14
8	2,2	1	0,171147	4	1,75	1	0,083449	4	19
8	2,2	1,25	0,156999	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
8	2,2	1,5	0,145598	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
8	2,2	1,75	0,153496	4	1,75	1	0,083449	5	18
8	2,2	2	0,154521	4	1,75	1	0,083449	5	18
8	2,2	2,25	0,146419	4	1,75	1	0,083449	5	18

**Tableau 8 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
12	1,2971	0,95	0,235946	8	1,75	0,95	0,088341	3	15
12	1,2971	1	0,236966	8	1,75	0,95	0,088341	4	15
12	1,6	0,95	0,138021	8	1,75	0,95	0,088341	2	16
12	1,6	1	0,129514	4	1,75	1	0,083449	3	20
12	1,6	1,1	0,131682	4	1,75	1	0,083449	3	21
12	1,6	1,15	0,133598	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	1,6	1,25	0,136215	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	1,6	1,5	0,137333	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	1,6	2	0,147315	8	1,75	0,95	0,088341	3	16
12	1,6	2,25	0,148278	8	1,75	0,95	0,088341	3	16
12	1,75	0,95	0,092259	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
12	1,75	1	0,089973	4	1,75	1	0,083449	1	15
12	1,75	1,25	0,093949	8	1,75	0,95	0,088341	2	11
12	1,75	1,5	0,093277	8	1,75	0,95	0,088341	2	11
12	1,75	1,75	0,108145	8	1,75	0,95	0,088341	2	11
12	1,75	2	0,111115	8	1,75	0,95	0,088341	2	11
12	1,75	2,25	0,11158	8	1,75	0,95	0,088341	2	11
12	2	0,95	0,105234	8	1,75	0,95	0,088341	2	13
12	2	1	0,099813	4	1,75	1	0,083449	3	18
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,25	0,088098	0	11
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	11
12	2	2	0,104234	12	2	1,25	0,088098	1	13
12	2	2,25	0,098677	12	2	1,5	0,0817	1	13
12	2,2	0,95	0,162205	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
12	2,2	1	0,156233	4	1,75	1	0,083449	3	20
12	2,2	1,25	0,145633	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	2,2	1,5	0,137503	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	2,2	2	0,148606	8	1,75	0,95	0,088341	4	18
12	2,2	2,25	0,141007	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
14	1,2971	0,95	0,239042	8	1,75	0,95	0,088341	3	14
14	1,2971	1	0,240896	4	1,75	1	0,083449	4	18
14	1,6	0,95	0,146296	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
14	1,6	1	0,134855	4	1,75	1	0,083449	3	18
14	1,75	0,95	0,096117	8	1,75	0,95	0,088341	1	12
14	1,75	1	0,104451	4	1,75	1	0,083449	1	15
14	1,75	1,25	0,097219	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
14	1,75	2,25	0,115387	8	1,75	0,95	0,088341	2	13
14	2	0,95	0,101715	8	1,75	0,95	0,088341	3	16
14	2	1	0,096144	14	2	1	0,096144	0	11
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,25	0,088098	1	15

**Tableau 8 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=5$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2	2,25	0,098641	12	2	1,5	0,0817	1	14
14	2,2	0,95	0,159373	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
14	2,2	1	0,153465	4	1,75	1	0,083449	3	18
14	2,2	1,25	0,140553	8	1,75	0,95	0,088341	3	17
16	1,2971	0,95	0,243069	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
16	1,2971	1	0,243979	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,2971	0,75	0,242819	8	1,75	0,95	0,088341	3	14
17,49	1,2971	0,95	0,245835	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,2971	1	0,246014	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,2971	1,1	0,247809	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,2971	1,15	0,248352	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,2971	1,25	0,24898	8	1,75	0,95	0,088341	4	14
17,49	1,75	0,75	0,201046	8	1,75	0,95	0,088341	3	13
17,49	1,75	0,95	0,129646	8	1,75	0,95	0,088341	1	13
17,49	1,75	1	0,125653	4	1,75	1	0,083449	2	17
17,49	1,75	1,1	0,099594	4	1,75	1	0,083449	2	18
17,49	1,75	1,15	0,100737	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,25	0,102941	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,5	0,10999	8	1,75	0,95	0,088341	2	15
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	0,95	0,088341	2	15

**Tableau 9- valeurs pour tous les points du tableau avec mu=1, n=2, k=3 et pas=9**

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
0,5	1,6	0,95	0,138514	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
0,5	1,6	1	0,111333	0,5	1,75	1	0,0851	1	12
0,5	1,6	1,25	0,122137	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
0,5	1,6	1,5	0,129951	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
0,5	1,6	2	0,14187	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
0,5	1,6	2,25	0,143321	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
0,5	1,75	0,95	0,129602	8	1,75	0,95	0,088341	1	13
0,5	1,75	1	0,0851	4	1,75	1	0,083449	2	17
0,5	1,75	1,25	0,080785	1	1,75	1,25	0,079929	1	14
0,5	1,75	2	0,105982	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
0,5	1,75	2,25	0,106917	4	1,75	1	0,083449	3	20
0,5	2	1,25	0,103074	1	1,75	1,25	0,079929	2	15
0,5	2	1,5	0,087321	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
0,5	2	2	0,104344	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
0,5	2	2,25	0,100159	14	2	1	0,096144	2	18
0,5	2,2	1,5	0,171416	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
0,5	2,2	1,5	0,153383	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
0,5	2,2	1,75	0,08554	0,5	2,2	1,75	0,08554	0	11
0,5	2,2	2	0,147276	14	2	1	0,096144	2	18
0,5	2,2	2,25	0,148318	0,5	1,75	1	0,0851	4	17
1	1,2971	0,95	0,22176	0,5	1,75	1	0,0851	2	15
1	1,2971	1	0,224715	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,45	0,95	0,162582	0,5	1,75	1	0,0851	2	16
1	1,45	1	0,163956	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
1	1,6	0,95	0,114134	0,5	1,75	1	0,0851	2	15
1	1,6	1	0,113207	0,5	1,75	1	0,0851	2	12
1	1,6	1,1	0,115432	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,6	1,15	0,118282	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,6	1,25	0,123067	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,6	1,5	0,131114	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,6	2	0,141782	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,6	2,25	0,142741	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	1,75	0,95	0,093819	8	1,75	0,95	0,088341	1	14
1	1,75	1	0,085627	4	1,75	1	0,083449	3	18
1	1,75	1,25	0,079929	1	1,75	1,25	0,079929	0	11

**Tableau 9 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
1	1,75	1,5	0,085747	1	1,75	1,25	0,079929	1	14
1	1,75	2	0,105236	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
1	1,75	2,25	0,10646	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
1	2	0,95	0,14515	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
1	2	1	0,13154	4	1,75	1	0,083449	5	22
1	2	1,25	0,103812	1	1,75	1,25	0,079929	2	15
1	2	1,5	0,087889	1	1,75	1,25	0,079929	3	18
1	2	2	0,107125	1	1,75	1,25	0,079929	4	21
1	2	2,25	0,100755	14	2	1	0,096144	2	18
1	2,2	0,95	0,292603	0,5	1,75	1	0,0851	3	15
1	2,2	1	0,202057	4	1,75	1	0,083449	6	23
1	2,2	1,25	0,172771	1	1,75	1,25	0,079929	3	16
1	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	3	17
1	2,2	2	0,160278	14	2	1	0,096144	2	18
1	2,2	2,25	0,148792	0,5	1,75	1	0,0851	4	17
4	1,6	0,95	0,13933	8	1,75	0,95	0,088341	3	19
4	1,6	1	0,116802	0,5	1,75	1	0,0851	2	15
4	1,6	1,25	0,125859	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,6	1,5	0,130129	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
4	1,6	2	0,140693	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
4	1,6	2,25	0,14164	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
4	1,75	0,95	0,128598	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
4	1,75	1	0,083449	4	1,75	1	0,083449	0	12
4	1,75	1,25	0,083099	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	1,75	1,5	0,086634	1	1,75	1,25	0,079929	2	19
4	1,75	1,75	0,101899	1	1,75	1,25	0,079929	3	22
4	1,75	2	0,105388	1	1,75	1,25	0,079929	3	22
4	1,75	2,25	0,107027	4	1,75	1	0,083449	4	22
4	2	0,95	0,176538	8	1,75	0,95	0,088341	3	19
4	2	1	0,126052	4	1,75	1	0,083449	5	22
4	2	1,25	0,100062	12	2	1,25	0,088098	1	16
4	2	1,5	0,089667	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
4	2	2	0,107238	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
4	2	2,25	0,101262	14	2	1	0,096144	3	21
4	2,2	0,95	0,23422	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
4	2,2	1	0,191951	4	1,75	1	0,083449	5	22
4	2,2	1,25	0,165578	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
4	2,2	1,5	0,15247	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
4	2,2	2	0,158544	8	1,75	0,95	0,088341	4	22
4	2,2	2,25	0,149356	8	1,75	0,95	0,088341	5	21

**Tableau 9 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	1,2	0,95	0,26725	8	1,75	0,95	0,088341	4	17
8	1,2	1	0,267213	4	1,75	1	0,083449	6	22
8	1,2971	0,95	0,229109	8	1,75	0,95	0,088341	4	17
8	1,2971	1	0,231033	8	1,75	0,95	0,088341	5	17
8	1,45	0,95	0,171876	0,5	1,75	1	0,0851	2	16
8	1,45	1	0,173602	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	0,95	0,123058	0,5	1,75	1	0,0851	2	16
8	1,6	1	0,123185	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	1,1	0,12489	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	1,15	0,126848	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	1,25	0,13057	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	1,5	0,135875	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	1,75	0,142075	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	2	0,143865	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,6	2,25	0,143574	0,5	1,75	1	0,0851	3	16
8	1,75	0,95	0,088341	8	1,75	0,95	0,088341	0	11
8	1,75	1	0,084606	4	1,75	1	0,083449	1	15
8	1,75	1,25	0,089454	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	1,75	1,5	0,096487	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	1,75	1,75	0,104874	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	1,75	2	0,107668	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	1,75	2,25	0,106879	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	1,81	1,57	0,090628	8	1,75	0,95	0,088341	1	11
8	2	0,95	0,118321	12	1,75	0,95	0,092259	3	14
8	2	1	0,108327	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	2	1,1	0,098328	14	2	1	0,096144	1	15
8	2	1,15	0,097026	12	2	1,25	0,088098	2	19
8	2	1,25	0,095314	12	2	1,25	0,088098	2	18
8	2	1,5	0,095375	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
8	2	1,75	0,100289	0,5	2,2	1,75	0,08554	1	13
8	2	2	0,106437	1	1,75	1,25	0,079929	4	23
8	2	2,25	0,101218	14	2	1	0,096144	3	21
8	2	2,5	0,111863	14	2	1	0,096144	3	21
8	2	2,75	0,11346	14	2	1	0,096144	3	21
8	2,2	0,95	0,17621	8	1,75	0,95	0,088341	3	17
8	2,2	1	0,171147	4	1,75	1	0,083449	5	22
8	2,2	1,25	0,156999	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
8	2,2	1,5	0,145598	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
8	2,2	1,75	0,153496	8	1,75	0,95	0,088341	4	21
8	2,2	2	0,154521	8	1,75	0,95	0,088341	4	21

**Tableau 9 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
8	2,2	2,25	0,146419	8	1,75	0,95	0,088341	4	21
12	1,2971	0,95	0,235946	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
12	1,2971	1	0,236966	4	1,75	1	0,083449	6	23
12	1,6	0,95	0,138021	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	1,6	1	0,129514	4	1,75	1	0,083449	5	22
12	1,6	1,1	0,131682	4	1,75	1	0,083449	5	23
12	1,6	1,15	0,133598	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
12	1,6	1,25	0,136215	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
12	1,6	1,5	0,137333	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
12	1,6	2	0,147315	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
12	1,6	2,25	0,148278	8	1,75	0,95	0,088341	4	19
12	1,75	0,95	0,092259	8	1,75	0,95	0,088341	1	14
12	1,75	1	0,089973	4	1,75	1	0,083449	3	19
12	1,75	1,25	0,093949	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
12	1,75	1,5	0,093277	8	1,75	0,95	0,088341	2	16
12	1,75	1,75	0,108145	1	1,75	1,25	0,079929	3	20
12	1,75	2	0,11115	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
12	1,75	2,25	0,11158	8	1,75	0,95	0,088341	2	14
12	2	0,95	0,105234	12	1,75	0,95	0,092259	3	14
12	2	1	0,099813	14	2	1	0,096144	1	15
12	2	1,25	0,088098	12	2	1,25	0,088098	0	14
12	2	1,5	0,0817	12	2	1,5	0,0817	0	14
12	2	2	0,104234	12	2	1,5	0,0817	1	15
12	2	2,25	0,098677	12	2	1,5	0,0817	1	16
12	2,2	0,95	0,162205	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
12	2,2	1	0,156233	4	1,75	1	0,083449	5	22
12	2,2	1,25	0,145633	1	1,75	1,25	0,079929	2	16
12	2,2	1,5	0,137503	1	1,75	1,25	0,079929	3	21
12	2,2	2	0,148606	8	1,75	0,95	0,088341	4	22
12	2,2	2,25	0,141007	8	1,75	0,95	0,088341	4	22
14	1,2971	0,95	0,239042	8	1,75	0,95	0,088341	4	18
14	1,2971	1	0,240896	4	1,75	1	0,083449	6	22
14	1,6	0,95	0,146296	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
14	1,6	1	0,134855	4	1,75	1	0,083449	5	22
14	1,75	0,95	0,096117	8	1,75	0,95	0,088341	1	14
14	1,75	1	0,104451	4	1,75	1	0,083449	3	20
14	1,75	1,25	0,097219	1	1,75	1,25	0,079929	2	17
14	1,75	2,25	0,115387	8	1,75	0,95	0,088341	4	20
14	2	0,95	0,101715	12	1,75	0,95	0,092259	2	12
14	2	1	0,096144	14	2	1	0,096144	0	11



**Tableau 9 (suite) - valeurs pour tous les points du tableau avec  $\mu=1$ ,  $n=2$ ,  $k=3$  et  $\text{pas}=9$** 

mu initial	n initial	k initial	CG initial	mu final	n final	k final	CG final	nb itérations	nb pts nécessaires
14	2	1,25	0,089852	12	2	1,25	0,088098	1	15
14	2	2,25	0,098641	14	2	1	0,096144	1	14
14	2,2	0,95	0,159373	8	1,75	0,95	0,088341	3	18
14	2,2	1	0,153465	4	1,75	1	0,083449	5	22
14	2,2	1,25	0,140553	1	1,75	1,25	0,079929	2	15
16	1,2971	0,95	0,243069	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
16	1,2971	1	0,243979	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,2971	0,75	0,242819	8	1,75	0,95	0,088341	4	18
17,49	1,2971	0,95	0,245835	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,2971	1	0,246014	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,2971	1,1	0,247809	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,2971	1,15	0,248352	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,2971	1,25	0,24898	8	1,75	0,95	0,088341	5	18
17,49	1,75	0,75	0,201046	8	1,75	0,95	0,088341	4	17
17,49	1,75	0,95	0,129646	8	1,75	0,95	0,088341	2	17
17,49	1,75	1	0,125653	4	1,75	1	0,083449	4	21
17,49	1,75	1,1	0,099594	4	1,75	1	0,083449	4	22
17,49	1,75	1,15	0,100737	1	1,75	1,25	0,079929	1	15
17,49	1,75	1,25	0,102941	1	1,75	1,25	0,079929	1	14
17,49	1,75	1,5	0,10999	1	1,75	1,25	0,079929	2	18
17,49	1,75	1,75	0,115155	8	1,75	0,95	0,088341	3	19

---

## Troisième partie

# Estimation des agrégats de l'offre et de la demande : implications

# Introduction

Cette partie se consacre à une autre forme de calage des paramètres. Le modèle dynamique que nous mettons au point pour l'Ile-de-France utilise une description microscopique de l'offre et de la demande. Les données désagrégées sont accessibles au même niveau individuel. Ce sont ces données désagrégées accessibles en Ile-de-France que nous allons utiliser dans cette partie pour estimer directement (c'est-à-dire sans utiliser les résultats du simulateur) les paramètres essentiels de notre outil de simulation. Nous utiliserons dans ce cas les résultats du modèle de simulation pour effectuer un calage fin du modèle.

Cette approche possède deux avantages par rapport à celles envisagées dans la partie II. D'une part, une estimation au niveau désagrégé évite la perte d'information consécutive au processus d'agrégation. D'autre part, cette approche est plus générale car elle ne se base pas sur les résultats de simulation. Notons en outre que cette approche permet de valider de manière plus rigoureuse la pertinence des résultats du simulateur. En contrepartie, cette méthode directe est plus difficile à mettre en place puisqu'elle nécessite davantage de données et elle se prête moins facilement à une procédure automatisée.

Nous avons utilisé jusqu'à présent deux types de lois pour décrire la congestion sur les liens du réseau. Des lois statiques que nous avons adaptées dans un contexte dynamique et des modèles de file d'attente déterministes qui ne contiennent que deux paramètres : vitesse à vide, et capacité de l'arc. Après une procédure d'agrégation temporelle, les estimations effectuées dans le cadre de modèles statiques fournissent des valeurs par défaut pour les capacités des arcs. Ces estimations, qui sont généralement effectuées à partir des données de comptage, dépendent également du type de modèle de simulation utilisé. En effet, ces estimations sont construites pour des modèles statiques de sorte qu'elles ne sont qu'indirectement utilisables pour des modèles dynamiques ; notre expérience suggère néanmoins que les données statiques sont facilement utilisables, après une transformation homothétique, dans les modèles dynamiques.

Nous avons utilisé des données de comptage sur l'Ile-de-France pour estimer les paramètres des modèles dynamiques de congestion. Ce sujet constitue un large spectre de recherche, dont le niveau de technicité dépasse le cadre de la recherche proposée par QUATUOR. Nous nous sommes alors contentés d'utiliser des formes fonctionnelles standards qui possèdent un

petit nombre de paramètres à estimer. Ces lois de congestion dynamiques ont ensuite été directement importées dans l'outil de simulation dynamique.

La forme fonctionnelle de la fonction de coût généralisé et les paramètres de la fonction de demande ont été estimés à l'aide des données fournies par le projet MADDIF. Nous avons pris en compte, dans nos estimations, les contraintes relatives au lieu de travail et omis celles relatives au lieu de domicile. Les facteurs de pondération de cette fonction de coût généralisé possèdent une interprétation comportementale immédiate : valeur du temps, coût de deshorage pour les arrivées précoces et coût de deshorage pour les arrivées tardives. Nous estimons la moyenne et l'écart-type pour chacun de ces facteurs ce qui nous permet de simuler des valeurs pour chaque distribution et pour chaque individu. Nous estimons également les paramètres de demande tels que la distribution de la valeur des temps désirés d'arrivée à la destination (les usagers possèdent une plage idéale d'arrivée à la destination pendant laquelle ils ne sont affectés par aucune pénalité de retard ou d'avance). Enfin, nous avons estimé les paramètres d'hétérogénéité du modèle de choix du temps de départ. Ces paramètres sont ensuite directement utilisés dans notre outil de simulation dynamique qui se charge de créer une batterie de paramètres spécifiques à chaque individu.

# Chapitre 1

## Estimation des fonctions de congestion

## Introduction

Au cours des deux premières années, nous avons procédé à l'adaptation de l'outil de simulation au réseau francilien en adoptant une fonction de congestion de type goulot d'étranglement. Nous avons pu ainsi, déterminer les valeurs des paramètres comportementaux des usagers et une valeur approximative de la capacité à introduire dans la fonction. En effet, l'ajustement de la fonction de congestion dans le cas du modèle de goulot reposait uniquement sur la variation homothétique de la capacité. Nous disposions ainsi que d'un seul paramètre à modifier.

Afin d'améliorer les résultats des simulations du modèle dynamique, nous avons estimé des lois de congestion de formes fonctionnelles statiques des fonctions. L'objectif de ces estimations consiste à décrire soit chaque route séparément soit d'en déduire des lois par type de route. Pour ce faire, nous avons utilisé des données de comptage collectées par les stations de mesure (à double boucles magnétiques) du réseau SIRIUS. Elles nous ont été fournies par la DREIF et le SIER/Groupes Etudes. Ces stations fournissent, toutes les six minutes, des données relatives aux débits, aux taux d'occupation et aux vitesses moyennes temporelles. Les données dont nous disposons sont censées représenter un jour type du trafic en Ile-de-France. En dehors du fait qu'elles nous permettent d'estimer les lois de congestion, elles nous serviront également à comparer les résultats des simulations aux données du trafic observé.

La méthode adoptée dans ce contexte consiste à estimer économétriquement plusieurs lois de congestion tels le modèle de Greenshields (1935), le modèle de Drew (1968), le modèle de Greenberg (1959) et le modèle de stabilité locale de l'écoulement du trafic (SLE). La sélection du meilleur modèle est basée sur le critère de Schwartz permettant de comparer des modèles des spécifications différentes.

Ce chapitre se compose de huit sections. La première section est consacrée à la description des variables macroscopiques utilisées dans la description des flux sur une route donnée. La deuxième section présente la description des relations entre le débit, la densité et la vitesse. Dans la troisième section, nous décrivons le modèle de stabilité locale d'écoulement du trafic qui reste proche du modèle de congestion de type goulot d'étranglement. Dans la quatrième section, nous exposons les modèles que nous avons estimés. La cinquième section est consacrée à la présentation utilisée pour le traitement des données aberrantes. L'approche économétrique est exposée dans la sixième section et dans laquelle, nous décrivons la méthode d'estimation d'un modèle avec un ou plusieurs régimes ainsi que les critères de sélection du meilleur modèle. Pour expliquer la démarche générale, nous avons sélectionné un point de comptage de l'autoroute A1 pour lequel nous exposons les résultats des estimations dans la sixième section. La septième section est consacrée à une présentation agrégée des estimations des fonctions de congestion. Certaines remarques et conclusions sont abordées dans la dernière section.

## 1 Variables d'intérêt

Le flot du trafic des véhicules varie dans le temps et dans l'espace. Ces variations dépendent des caractéristiques des voies routières et elles sont exprimées en fonction du flux, de la vitesse et de la densité (ou l'occupation) du flux du trafic. Ces dernières variables sont reliées entre elles par des lois que nous exposerons au fur et à mesure dans ce document.

## 1.1 Flux

Le flux du trafic,  $q(T; x)$  mesure le nombre de véhicules qui passent en un point par unité de temps. Il est mesuré par le nombre de véhicules,  $N(T; x)$  qui passent en un point  $x$  au cours d'une période de temps  $T$  :

$$q(T; x) = \frac{N(T; x)}{T};$$

Le temps écoulé  $T$  correspond à la somme des temps inter-véhiculaires,  $h_i$ , tel que :

$$T = \sum_{i=1}^N h_i;$$

Le flux du trafic est égal à l'inverse du temps inter-véhiculaire moyen comme indiqué ci-dessous :

$$q = \frac{N}{T} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N h_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i} = \frac{1}{\bar{h}}$$

où  $\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^N h_i}{N}$  : Le flux du trafic est exprimé en véhicules par heure. Cependant les mesures et les relevés de la situation du trafic sont effectués au cours d'intervalles beaucoup plus faibles. Plus le flux du trafic est élevé et plus le temps inter-véhiculaire est petit (de l'ordre de 30 secondes à une minute). Le Highway Capacity Manual (1994) suggère d'utiliser au minimum un intervalle de 15 minutes.

## 1.2 Concentration

Habituellement, la concentration du trafic est synonyme de la densité du trafic (voir Gerlough et Huber, 1975). La concentration se mesure par le nombre de véhicules à un instant donné sur une distance donnée de la voie de circulation. En réalité, il est plus raisonnable d'utiliser la densité des véhicules ou le taux d'occupation pour déterminer la concentration. La densité mesure la concentration sur une portion de la route alors que le taux d'occupation mesure la concentration au cours du temps du même flux véhiculaire. La densité ne peut être mesurée que sur un segment de route. Cette variable est facilement observable par photographie aérienne ou par caméra vidéo. Dans le cas où uniquement les données relatives à un point sont disponibles, la densité est calculée à partir des valeurs du taux d'occupation, du débit et de la vitesse. Traditionnellement, la densité, notée  $k$ , est estimée à partir de la relation suivante :

$$k = \frac{q}{\bar{u}_s}; \quad (1)$$

où  $q$  représente le débit et  $\bar{u}_s$  représente la vitesse moyenne de circulation.

Le taux d'occupation constitue une autre approche pour mesurer la concentration véhiculaire. Cette variable est couramment utilisée dans le domaine de l'exploitation grâce aux



procédés des capteurs (boucles magnétiques enfouies dans la chaussée). Le taux d'occupation est une variable sans unité et elle est définie par la proportion du temps pendant laquelle le capteur est occupé. La concentration,  $k$ , est reliée au taux d'occupation, noté  $\zeta$ , par la relation suivante :

$$\zeta = (L + d)k \quad (2)$$

où :

$L$  désigne la longueur moyenne des véhicules (mètre), et  $d$  représente la longueur du capteur (souvent  $d = 1$  mètre).

Tout se passe comme si les capteurs étaient ponctuels et que les voitures étaient de longueur  $(L + d)$ . Lors des estimations économétriques nous utiliserons la variable de concentration  $k$ : Le passage du taux d'occupation à la densité de concentration doit tenir compte également du nombre de voies de sorte que :

$$k = \frac{\zeta}{L + d}n$$

où  $n$  représente le nombre de voies sur la route étudiée. Notons que l'unité de mesure de la densité  $k$  dans ce cas est "nombre de véhicules / mètre".

### 1.3 Vitesses

La détermination de la vitesse nécessite l'observation du temps et de l'espace. La vitesse instantanée,  $u_i$ , d'un véhicule,  $i$ , se définit comme le rapport entre la distance parcourue  $dx_i$  pendant un intervalle de temps  $dt$  :

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}$$

Par ailleurs il existe différentes approches pour calculer la vitesse moyenne. Deux définitions de la vitesse moyenne sont couramment utilisées : la vitesse moyenne temporelle et la vitesse moyenne spatiale (d'espace).

#### 1.3.1 Vitesse moyenne dans le temps

Supposons que  $N$  véhicules passent par un point pendant une période donnée. La vitesse moyenne dans le temps,  $\bar{u}_t$ , représente la moyenne arithmétique des vitesses des  $N$  véhicules telle que :

$$\bar{u}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i$$

### 1.3.2 Vitesse moyenne d'espace

Pour cette vitesse moyenne, deux définitions sont couramment utilisées dans la littérature. La première est attribuée à Wardrop (1952). La vitesse moyenne d'espace,  $u_s$ , est la moyenne harmonique des vitesses des  $N$  véhicules à un instant donné sur une section pré-définie de longueur  $D$ .

$$u_s = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i t_i} :$$

où la variable  $t_i$  représente le temps moyen nécessaire pour que le véhicule  $i$  traverse la section de longueur  $D$  :

$$t_i = \frac{D}{u_i} :$$

La vitesse moyenne d'espace peut être calculée comme une moyenne harmonique des vitesses des véhicules comme suit :

$$u_s = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i t_i} = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i \frac{D}{u_i}} ;$$

soit :

$$u_s = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{u_i}} :$$

Le seul inconvénient de cette seconde relation est qu'elle ne prend pas en compte la longueur de la route. Par ailleurs, si les vitesses des véhicules ne sont pas constantes dans l'espace, la vitesse moyenne dans le temps est supérieure à la vitesse moyenne d'espace. En particulier, lorsque les variations des vitesses individuelles sont faibles, il est possible d'établir une relation entre les deux types de mesure des vitesses moyennes (Wardrop, 1952) par la relation suivante :

$$u_t = u_s + \frac{\sigma_s^2}{u_s} :$$

La variable  $\sigma_s$  qui désigne l'écart-type de la distribution des vitesses spatiales est égale à  $\frac{\sigma_p}{k_i(u_i - u_s)^2 = K}$  (voir appendice 1).

Certaines études dans le domaine ont montré que les deux vitesses ne sont pas égales (voir Wardrop, 1952 et Gerlough et Huber, 1975) et que la différence est de l'ordre de 12% à 13% entre les deux vitesses moyennes. Dans le cas des routes périurbaines, cette dispersion est faible et par conséquent, nous utiliserons la vitesse temporelle comme donnée de mesure.

L'un des inconvénients majeur de cette seconde approche est qu'elle nécessite deux points de comptages sur chaque route. Par conséquent, il paraît plus raisonnable de s'intéresser aux mesures relatives aux flux de circulation qui utilisent un système de détection unique.

Ces détecteurs nous fournissent de l'information sur le taux d'occupation et sur le flux de circulation. La vitesse moyenne d'espace est déduite à partir de la relation fondamentale suivante :

$$u_s = \frac{q}{k}$$

Sachant que  $k = \lambda(L + d)$ , on obtient que :

$$u_s = \frac{q(L + d)}{\lambda}$$

Effectivement, cette relation permet à la longueur moyenne des véhicules de varier mais elle suppose que la vitesse moyenne reste constante. Dans le cas où la vitesse moyenne et la longueur moyenne varient, les relations entre la vitesse, le flux, et l'occupation deviennent plus complexes.

## 2 Modèles du flot de trafic

Dans cette section, nous développons les relations théoriques et empiriques entre les variables d'intérêts (débit, vitesse, et occupation) décrivant le flot de trafic sur une route donnée. Par ailleurs, avant d'entamer cette exploration, il nous paraît nécessaire de discuter de l'importance de la localisation des points de collecte des données.

### 2.1 Importance des points de comptage

Un grand nombre d'études ignore ce point préliminaire souvent nécessaire à toute analyse du trafic. Afin de montrer l'importance de la localisation des points de comptage, nous présentons un exemple simple (voir figure 1).

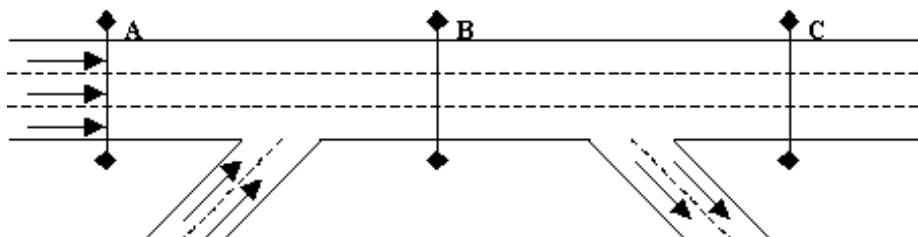


Figure 1 : importance de la localisation des stations de comptage

Dans cette figure, nous distinguons trois sections de route avec des caractéristiques différentes. Nous supposons que la même relation débit-vitesse régit le trafic sur les trois sections. Cette relation est présentée par les trois graphiques<sup>1</sup>.

La rampe d'entrée entre les deux points A et B ajoute un flux de trafic important. Si la localisation B atteint sa capacité alors un recul du trafic se forme qui influence le trafic au point A. Ces véhicules peuvent être considérés en attente. Les données sur la partie supérieure de la relation vitesse flux dans la situation A de la figure 2 représentent un

<sup>1</sup>Cette relation sera discutée dans la deuxième sous-section.

trafic sans congestion. Par ailleurs, la partie inférieure du même graphique représente le cas d'un trafic congestionné.

La situation B représente le cas où la route n'est jamais congestionnée. Le segment du milieu du tronçon représente le cas de déchargement de la file d'attente (Figure 1). Ce point représente le point d'accélération des véhicules. Si la rampe de sortie entre les points B et C absorbe une portion importante du trafic, le flux au point C n'atteindra pas le même niveau qu'au point B. Suivant ce raisonnement, la congestion n'apparaît jamais au point C. Cet exemple montre l'importance de la localisation des stations de mesure à considérer et la fonction de congestion à prendre en compte pour une route donnée.

## 2.2 Le modèle débit-vitesse

Les récents travaux relatifs à l'estimation des modèles débit-vitesse proposent une forme plus générale, en trois régimes, de la fonction de congestion comme indiqué dans la Figure 2. Les discussions de l'exemple précédent restent compatibles avec ce schéma. Cette approche conduit également à l'estimation de la capacité (flux maximal).

Un résumé des différents points de vue énoncés à ce sujet a été présenté dans Branston (1975) et plus récemment dans Hall et al. (1992).

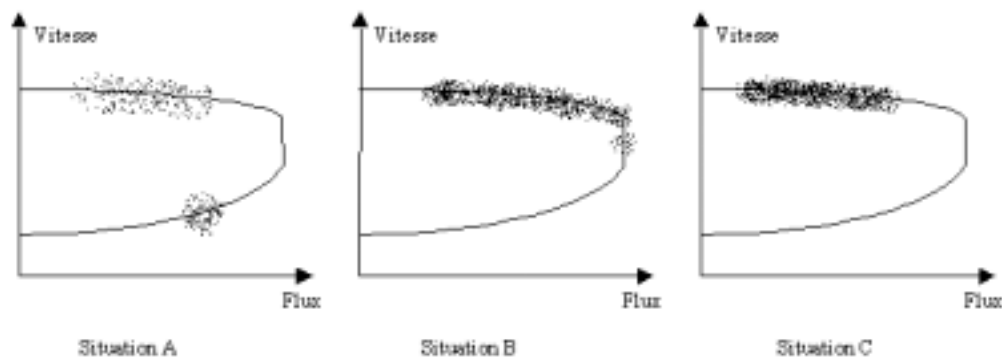


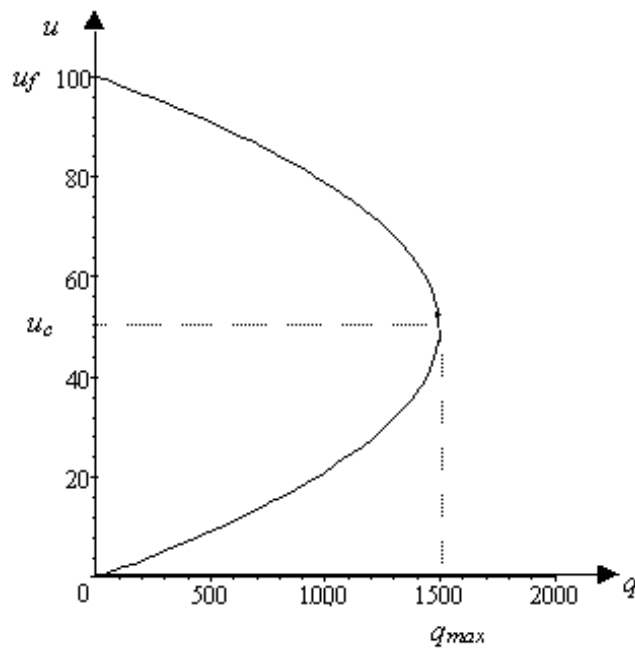
Figure 2 : relations flux-vitesse

La plupart des travaux sont essentiellement empiriques. Cependant certains auteurs ont tenté d'expliquer cette relation analytiquement. Historiquement, la première explication a été apportée par Greenshields (1935) qui a expliqué ce phénomène par une équation parabolique (voir Figure 3) entre le débit  $q$  et la vitesse  $u$  comme suit :

$$q = k_j u \left( 1 - \frac{u}{u_f} \right)$$

La variable  $u_f$  représente la vitesse à vide et la variable  $k_j$  la concentration d'embouteillage<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> $k_j$  : "jam density" dans la littérature anglophone.

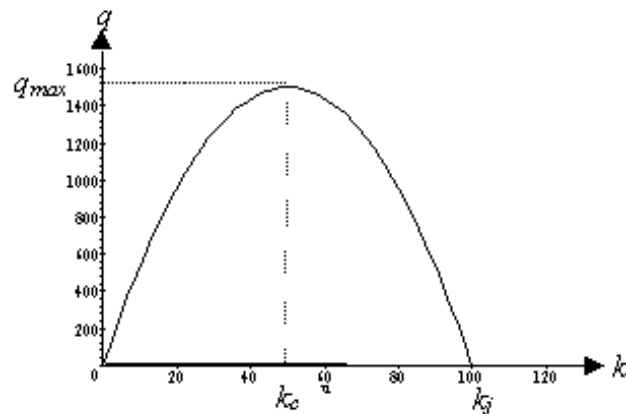
Figure 3 : relation vitesse ( $u$ ) - débit ( $q$ )

Cette relation suppose uniquement deux situations. Une situation de circulation fluide correspondant à la partie supérieure de la figure 3. Au delà de  $q_{max}$ , le flux diminue, la vitesse peut continuer à diminuer (la partie inférieure de la courbe). Ce phénomène se révèle plus clair si on observe la représentation de cette loi dans un repère de débit-densité (voir figure 4). Nous discuterons la relation débit-concentration dans la sous-section suivante. Un travail théorique comparable a été développé récemment par Heidman, 1996. Ce modèle se base sur la théorie des files d'attente ensuite a été validé par une étude empirique. La représentation débit-vitesse est la même que celle dans la figure 3.

### 2.3 Le modèle de débit-densité

Le phénomène d'écoulement du trafic décrit précédemment peut être également décrit dans un repère de débit-concentration. Nous pouvons également observer deux régimes (stationnaire et non stationnaire). Le premier régime représenté sur le graphique 4, pour lequel la concentration est inférieure à la concentration critique, décrit la situation de circulation fluide. Le second régime décrit la situation d'instabilité du trafic où la concentration continue à augmenter (au-delà de la concentration critique  $k_c$ ) alors que le débit commence à diminuer. Les véhicules commencent à se gêner les uns les autres et le régime de circulation est saturé<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Régime "d'hypercongestion" dans la terminologie de Vickrey et qualifié de "congestion" pour les spécialistes du transport.

Figure 4 : relation débit ( $q$ ) - concentration ( $k$ )

Différents travaux expérimentaux ont été consacrés à l'estimation de cette relation. Ces travaux ont tenté d'estimer la relation pouvant exister entre le débit,  $q$ ; et la densité  $k$  (ou encore le taux d'occupation  $\lambda$ ). Avec l'amélioration des systèmes de comptage comme les boucles magnétiques, il est devenu plus facile de comptabiliser les taux d'occupation sur les axes de circulation. A titre d'exemple de formulation générale, nous donnons quelques relations expérimentales décrites dans le tableau 1 ci-dessus (voir Cohen, 1993). Nous présentons également les valeurs des taux critiques,  $\lambda_c$ , de la capacité critique,  $q_c$ ; et les taux d'embouteillage,  $\lambda_j$ ; de chaque fonction.

Tableau 1 : Relations débit ( $q$ ) - taux d'occupation ( $\lambda$ ).

Modèle	Relation	Taux critique $\lambda_c$	Capacité $q_c$	Taux limite $\lambda_j$
Greenshields	$\frac{q}{\lambda} = a\lambda + b$	$\frac{b}{2a}$	$\frac{b^2}{4a^2}$	$\frac{b}{a}$
Drew	$\frac{q}{\lambda} = a\lambda^{1-2} + b$	$\frac{4b^2}{9a^2}$	$\frac{4b^3}{27a^2}$	$\frac{b^2}{a^2}$
Greenberg	$\frac{q}{\lambda} = a \ln(\lambda) + b$	$\exp\left(\lambda - 1 - \frac{b}{a}\right)$	$\lambda - a \exp\left(\lambda - 1 - \frac{b}{a}\right)$	$\exp\left(\lambda - \frac{b}{a}\right)$
Underwood	$\frac{q}{\lambda} = a \exp(\lambda - b\lambda)$	$\frac{1}{b}$	$\frac{a}{\exp(b)}$	1
May	$\frac{q}{\lambda} = a \exp(\lambda^2)$	$\frac{1}{2b}$	$\frac{a}{2 \exp(b)}$	1
Puissance généralisée	$\frac{q}{\lambda} = a + b\lambda^a$	$\frac{1+a}{(a+1)b}$	$\lambda_c(a + b\lambda_c^a)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a}+1}$
Exponentiel généralisé	$\frac{q}{\lambda} = a \exp(\lambda - b\lambda^a)$	$\frac{1}{1-ab}$	$a\lambda_c \exp(\lambda - b\lambda_c^a)$	1

## 2.4 Modèle de vitesse-densité

Le modèle de Greenshields, mentionné précédemment, peut être également transformé afin d'obtenir une relation entre la vitesse et la densité telle que :

$$u = u_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)^2$$

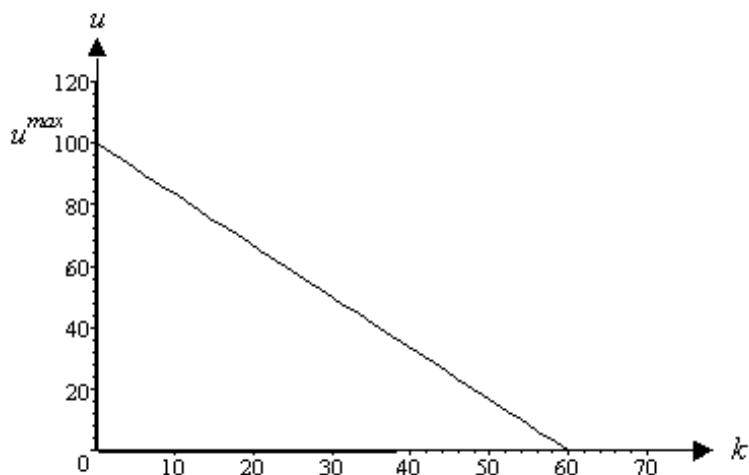


Figure 5 : relation vitesse (u) - concentration (k)

Greenshields avait démontré qu'une relation linéaire existe entre la vitesse et la densité. La figure 5 présente la relation entre la vitesse et la concentration selon le modèle de Greenshields. Cependant, cette linéarité parfaite entre la vitesse et la concentration est rarement observée comme nous le verrons plus loin dans la figure 18. Des travaux menés, en premier lieu par Greenberg (1959) ont montré qu'il peut exister des relations logarithmiques entre la vitesse et la densité, telles que :

$$u = c \ln(k_j = k):$$

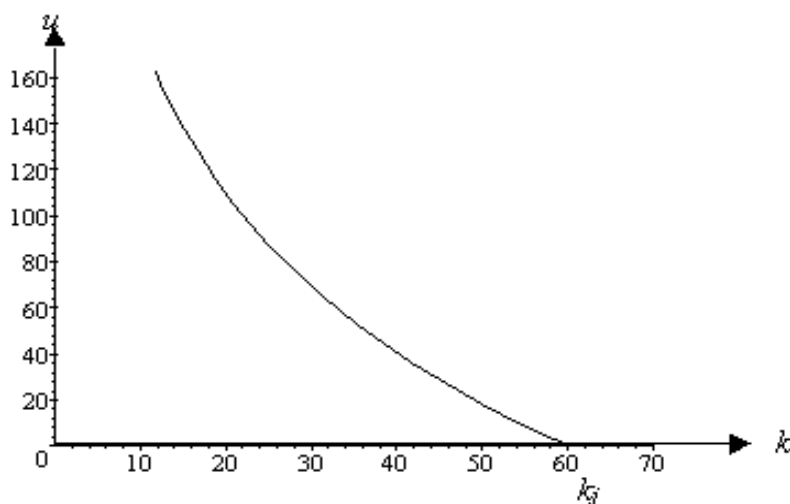


Figure 6 : modèle de Greenberg "relation vitesse (u) - concentration (k)"

La figure 6 présente la relation entre la vitesse et la concentration selon l'approche de Greenberg. L'inconvénient du modèle est qu'il n'ajuste pas bien le régime stationnaire, même s'il décrit assez bien le régime non stationnaire. En effet, lorsque la concentration devient très faible, la vitesse tend vers l'infini. Dans la réalité, on observe que la vitesse est limitée (voir figure 18).

Plus tard, des travaux menés par Drake et al. (1967) ont montré qu'il n'existe pas qu'une seule relation. Ils ont travaillé sur cinq autres relations empiriques définies en fonction du régime de circulation. Ces fonctions sont reportées dans le tableau 2 à titre d'exemple.

Tableau 2 : modèles multi-régimes

Modèle multirégime	Régime fluide	Régime de transition	Régime de congestion
Modèle d'Edie	$u = 54; 9 \exp\left(\frac{k}{163;9}\right)$ ( $k > 50$ )	i	$u = 26; 8 \ln\left(\frac{162;5}{k}\right)$ ( $k > 50$ )
Modèle avec deux régimes linéaires	$u = 60; 9$ ; $0; 51k$ ( $k > 65$ )	i	$u = 40$ ; $0; 265k$ ( $k > 65$ )
Modèle de Greenberg modifié	$u = 48$ ( $k > 35$ )	i	$u = 32 \ln\left(\frac{145;5}{k}\right)$ ( $k > 35$ )
Modèle avec trois régimes linéaires	$u = 50$ ; $0; 098k$ ( $k > 40$ )	$u = 81; 4$ ; $0; 913k$ ( $40 < k < 65$ )	$u = 40$ ; $0; 265k$ ( $k > 65$ )

Certaines observations relatives aux méthodes d'estimation doivent être discutées. D'une part, la différence de qualité d'ajustement entre un modèle linéaire et un modèle logarithmique est peu significative et d'autre part, la détermination des points de cassure du régime du flux n'est pas évidente. Il est par conséquent nécessaire, de tester différents modèles et de retenir celui dont la qualité d'ajustement est la meilleure.

### 3 Modèle de stabilité locale d'écoulement (SLE)

Dans cette section, nous présentons de façon macroscopique, le modèle de stabilité locale de l'écoulement. Nous utilisons le flux véhiculaire, noté  $q$ , au lieu du débit véhiculaire,  $q$ : A chaque instant la relation physique (ou la loi fondamentale) suivante doit être vérifiée :

$$q = uk; \quad (3)$$

où  $u$  représente la vitesse et  $k$  la densité de circulation.

Lors de son déplacement, une voiture occupe une distance  $L$  et une distance de sécurité  $I$ : La distance de sécurité dépend de la vitesse de circulation,  $u$ , et du temps de réaction,  $\tau$ , du conducteur. Dans la version la plus simple considérée ici, nous avons  $I = \tau u$ :

Lorsque la distance entre les voitures est donnée par la distance de sécurité  $I = \tau u$ , la place occupée par une voiture est  $L + I$ ; de sorte que la densité  $k$ , donnée par le nombre de voitures au kilomètre est égal à :

$$k = \frac{1}{L + I}$$



Dans ce cas :

$$1 = kL + k\delta u$$

La vitesse des véhicules  $u$  est égale à :

$$u = \frac{1 - kL}{k\delta}$$

Notons que si  $k = k_j$ , où  $k_j = \frac{1}{L}$ , la vitesse est nulle. En effet,  $k_j$  correspond au nombre maximum de véhicules à l'arrêt sur 1 kilomètre.

Pour une vitesse maximale notée  $u^{\max}$ ; la densité correspondante, désignée par la densité de régime fluide, est :

$$k = \frac{1}{L + \delta u^{\max}}$$

Pour  $k < k$ , on suppose que la vitesse est donnée par  $u^{\max}$ . Dans ce cas, la distance entre les véhicules est plus grande que la distance de sécurité: En résumé, nous supposons que :

$$u = \begin{cases} u^{\max} & \text{si } k < k \\ \frac{1}{L + \delta u} & \text{si } k \cdot k_j \end{cases}$$

La relation vitesse-densité de ce modèle est représentée à la figure 7.

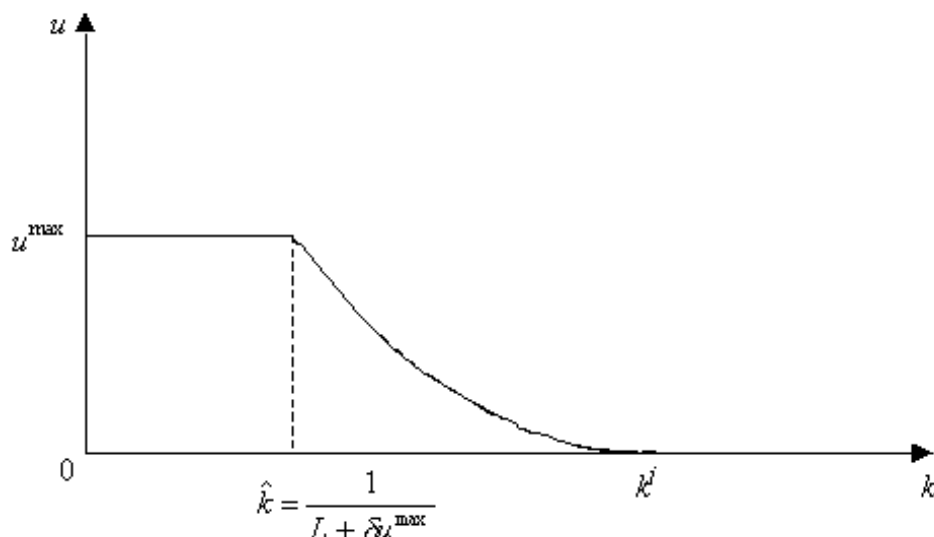


Figure 7 : relation vitesse ( $u$ ) - densité ( $k$ )

### 3.1 Relation flux-densité

A partir de la relation (3), il est possible de déduire la relation reliant le flux véhiculaire à la densité. Cette relation s'écrit sous la forme suivante :

$$c = \begin{cases} \frac{1}{2} u^{\max} k & \text{si } k < k_j \\ \frac{1}{\pm} \left( 1 - \frac{k}{k_j} \right) & \text{si } k > k_j \end{cases}$$

Dans ce cas, également, nous observons deux régimes (Figure 8) qui dépendent de la densité de circulation.

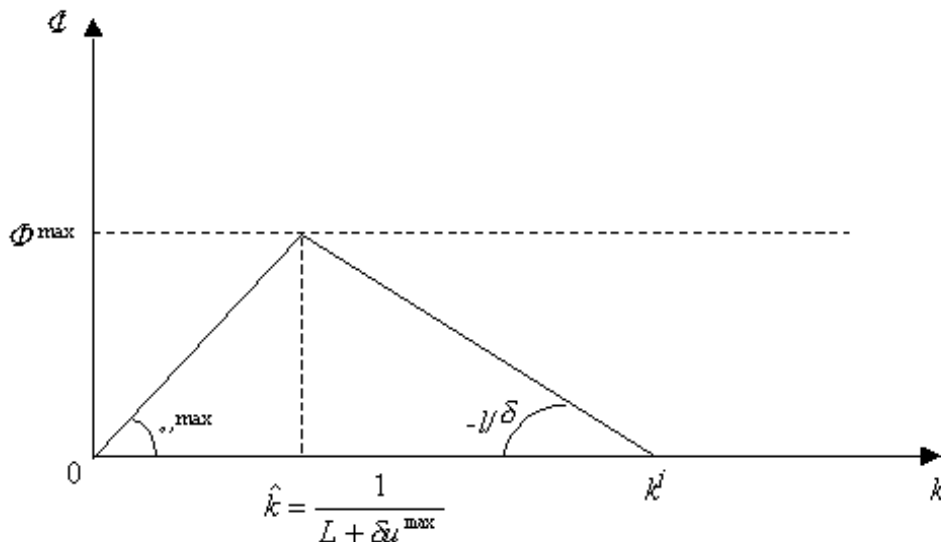


Figure 8 : relation flux (c)- densité (k).

Nous avons  $c^{\max} = \frac{1}{\pm} \frac{kL}{L + \pm u^{\max}} = u^{\max} k_j = \frac{u^{\max}}{L + \pm u^{\max}} \cdot \frac{1}{\pm}$ . Si  $\pm = 1; 5s$  alors  $k_j < \frac{1}{1;5} s^{-1} = 2400$  veh=h: Si  $L = 5m$ ,  $\pm = 1; 5s$  alors  $u^{\max} = 30m/s = 108km/h$ : Par conséquent :  $c^{\max} = \frac{30}{5+45} = 0; 6veh/s = 2160veh/h$ ; ce qui est raisonnable.

Nous allons nous intéresser uniquement au second régime du modèle c'est à dire la partie avec circulation congestionnée. Afin de comparer ce modèle aux différents modèles présentés dans le tableau 1, nous pouvons écrire le rapport  $\frac{c}{k}$  en fonction du taux  $\lambda$ : En remplaçant c par  $ku$  et k par  $\frac{\lambda}{L+d}$  (voir relation 2), on obtient la formulation suivante dans le régime avec congestion :

$$\frac{c}{k} = \frac{1}{\pm} \left( 1 - \frac{\lambda}{L + d} \right)$$

Notons que la spécification de ce modèle ne correspond à aucune des spécifications présentées dans le tableau 1. Lorsque d tend vers 0, nous obtenons :

$$\frac{c}{k} = \frac{1}{\pm} \left( 1 - \frac{\lambda}{L} \right)$$

Le taux de régime fluide, noté  $b$  correspond à  $k_j$  qui est donné par :

$$b = \frac{L + d}{L + \pm u^{\max}}$$

## 3.2 Extensions du modèle SLE

Comme il est présenté sur la figure 8, le flux est linéairement décroissant en fonction de la densité ; ce qui n'est pas nécessairement vrai pour certaines observations des données de comptage. Il est possible que le flux ne soit pas linéairement décroissant. Nous proposons deux extensions. La première correspond au modèle de Greenberg modifié et la deuxième concerne l'introduction d'une formulation de puissance généralisée.

### 3.2.1 Modèle de Greenberg modifié

Dans ce modèle, nous supposons également qu'il existe deux régimes : un régime de circulation fluide et un régime de congestion. Le second régime est non linéaire et il est spécifié par le modèle de Greenberg<sup>4</sup>. Le modèle s'écrit dans ce cas comme suit :

$$u = \min \left[ c \ln \frac{\mu k_j}{k} ; u^{\max} \right] ;$$

soit :

$$u = \begin{cases} u^{\max} & \text{si } k < k_c \\ c \ln \frac{\mu k_j}{k} & \text{si } k > k_c \end{cases} ;$$

Comme dans le cas du modèle original, le paramètre  $c$  représente la vitesse optimale permettant de maximiser le flux de circulation sur cette voie.

### 3.2.2 Modèle de puissance généralisée (SLEG)

Dans ce cas, nous introduisons un nouveau paramètre dans la formulation linéaire du modèle de stabilité locale de l'écoulement. Le modèle devient :

$$1 = \frac{k}{k_j} + k_{\pm} u^{\mu} ;$$

ou encore :

$$u = \frac{1}{k_{\pm}} \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{1}{1-\mu}} ;$$

Pour simplifier, nous écrivons ce modèle sous la forme suivante :

$$u = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{k}{k_j} \right)^{\frac{1}{\Phi}} ;$$

où  $\Phi = (\pm)^{1-\mu}$  et  $\textcircled{\Phi} = 1-\mu$  :

<sup>4</sup>Une analyse de comparaison du modèle SLE avec le modèle de Greenberg a été effectuée par Gazis et al. (1959).

## 4 Modèles à estimer

Comme il existe différents modèles pouvant être testés, nous avons choisi un nombre restreint devant être estimé. Les fonctions de congestion que nous allons estimer sont présentées dans la tableau 3 ci-dessous. Ces relations définissent la variation de la vitesse en fonction de la densité. Rappelons que la relation entre la densité et le taux d'occupation est de la forme suivante :  $k = \lambda(L + d)$ . Par conséquent les fonctions présentées dans le tableau 3 peuvent être facilement déduites des relations présentées dans le tableau 1.

Tableau 3 : fonctions de congestion sélectionnées.

Modèle	Formulation du modèle	Densité critique ( $k_c$ )	Flux critique ( $\phi_c$ )	densité d'embouteillage ( $k_j$ )
Greenshields	$u = \frac{\phi}{k} = u^{\max} \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$	$k_c = \frac{k_j}{2}$	$\phi_c = \frac{u^{\max} k_j}{4}$	$k_j$
Drew	$u = \frac{\phi}{k} = u^{\max} \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)^{1.25}$	$k_c = \frac{4}{9} k_j$	$\phi_c = \frac{4 u^{\max} k_j}{27}$	$k_j$
SLE	$u = \frac{\phi}{k} = \begin{cases} u_3^{\max} & \text{si } k < k \\ \frac{1}{\pm} \frac{1}{k} & \text{si } k \cdot k \cdot k_j \end{cases}$	$k_c = k$	$\phi_c = u^{\max} k$	$k_j = \frac{1}{L}$
Greenberg modifié	$u = \frac{\phi}{k} = \begin{cases} u_3^{\max} & \text{si } k < k \\ c \ln \frac{k_j}{k} & \text{si } k \cdot k \cdot k_j \end{cases}$	$k_c = \frac{k_j}{e}$	$\phi_c = u^{\max} \frac{k_j}{e}$	$k_j$

La densité d'embouteillage  $k_j$  est un paramètre à estimer. Dans les premiers modèles, nous n'avons pas à tester la rupture de régime puisqu'ils décrivent les deux régimes de trafic en une seule relation. Par ailleurs dans les deux derniers modèles, nous devons déterminer le point de changement de régime. Ce point correspond à la densité du régime fluide  $k$ :

## 5 Traitement des données

Dans cette section, nous exposons la méthode d'identification des données aberrantes dans l'ensemble des données collectées aux points de comptage. Trois méthodes sont souvent utilisées pour vérifier les données : vérification par "Poches", vérification par tests de cohérence et vérification par lissage.

### 5.1 Vérification par "poches"

La méthode de vérification par "poches" se base sur la loi de conservation des flux des véhicules. Pour un tronçon d'autoroute ( $x_1, x_2$ ), la différence entre le nombre d'entrées en  $x_1$  et le nombre de sorties en  $x_2$  durant l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  doit être très faible. Elle ne doit pas dépasser la variation de concentration multipliée par la longueur. Ceci se formalise comme suit :

$$q_1 - q_2 - \Phi \times (k_2 - k_1) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{L + l} :$$

où

$q_1$  et  $q_2$  représentent respectivement les flux entrants en  $t_1$  et  $t_2$ ,

$\Phi x = x_2 - x_1$  est la distance entre les deux capteurs.

$\lambda_2$  et  $\lambda_1$  représentent respectivement les taux d'occupation aux instants  $t_2$  et  $t_1$ ,

$L$  désigne la longueur moyenne des véhicules, et

$l$  désigne la longueur du capteur.

Pour les données dont nous disposons, il est possible d'effectuer cette méthode puisque nous connaissons la localisation d'une station de comptage par rapport aux autres stations de comptage. Cependant, elle nécessite un effort supplémentaire dans le traitement de données. Par ailleurs, cette méthode ne s'applique qu'aux données de débit en supposant que les données recueillies représentant les taux d'occupation ne contiennent pas de données aberrantes.

## 5.2 Vérification par des tests de cohérences

Cette méthode consiste à vérifier qu'à chaque instant la relation fondamentale entre les différents agrégats (débit, taux d'occupation et vitesse) est vérifiée. Elle peut être effectuée deux à deux : débit - taux d'occupation, débit - vitesse et vitesse - taux d'occupation. Plus généralement, cette méthode consiste à créer des zones de variation (ou des intervalles) d'un agrégat de mesure du trafic en fonction d'un autre.

## 5.3 Vérification par lissage exponentiel

La détection des valeurs aberrantes par lissage exponentiel se base sur les valeurs observées précédemment. Son avantage en simplicité et en temps de calcul permet d'appliquer cette approche au grand réseau pour la détection des incidents sur les voies de circulation.

### 5.3.1 Lissage exponentiel simple

Le lissage exponentiel simple ne peut être employé en présence d'une tendance. Elle peut être aisément transposée au cas des données de trafic même si on sait qu'il existe une saisonnalité d'ordre 2 correspondant au pic du matin et au pic du soir.

Le but du lissage exponentiel est d'effectuer à l'instant  $T$  une prévision pour l'instant  $T + 1$ . Notons  $x_T$  l'observation à l'instant  $T$  et  $\hat{x}_{T+1}$  la prévision de la variable à l'instant  $T + 1$ : La valeur de prévision à l'instant  $T + 1$  est une combinaison par moyenne pondérée entre la valeur observée,  $x_T$ , et la valeur de prévision,  $\hat{x}_T$ ; à l'instant  $T$ , comme suit :

$$\hat{x}_{T+1} = \alpha x_T + (1 - \alpha) \hat{x}_T; \quad (4)$$

où  $\alpha$  représente la constante de lissage comprise entre 0 et 1. Deux cas particuliers sont à discuter :

- si  $\alpha = 0$ , on obtient :  $\hat{x}_{T+1} = \hat{x}_T$ : Ce qui implique que la dernière observation n'intervient pas dans la prévision de la seconde valeur ;
- si  $\alpha = 1$ , on obtient que  $\hat{x}_{T+1} = x_T$ : Dans ce cas la prévision est complètement naïve vu qu'elle ne prend pas en compte l'historique de la variable étudiée.

Une valeur recommandée par Brown (1962) est de considérer  $\alpha = 0,3$ .

Choix de la prévision initiale

Le choix de la première prévision  $\hat{x}_1$  dépend de la taille de la série chronologique des données et de la valeur de la constante de lissage prise en compte. Trois solutions sont possibles :

- la valeur de la première prévision  $\hat{x}_1$  correspond à la valeur de la première observation.
- la valeur de la première prévision  $\hat{x}_1$  est égale à la moyenne de l'ensemble des données.
- la troisième solution est un compromis entre les deux précédentes ; autrement dit la valeur de la première prévision est une moyenne des premières observations de la série.

### 5.3.2 Intervalle de prévision

Soit  $e_T$  l'erreur en  $T+1$  à l'instant  $T$ ; telle que :

$$e_T = x_{T+1} - \hat{x}_T$$

La relation (4) peut s'écrire :

$$\hat{x}_{T+1} = \alpha(x_T - \hat{x}_T) + \hat{x}_T$$

La valeur de prévision à l'instant  $T$  pour l'instant  $T+1$  dépend de l'erreur commise à la période précédente,  $e_T$ , mais également de l'ensemble des erreurs commises aux instants  $t = T-1; T-2; \dots; 1$ :

$$\hat{x}_{T+1} = \alpha e_T + \hat{x}_T$$

ou encore :

$$\hat{x}_{T+1} = \alpha e_T + \alpha e_{T-1} + \alpha e_{T-2} + \dots + \alpha e_1 + \hat{x}_1 \quad (5)$$

L'intervalle de confiance, noté  $I$ , d'une prévision se calcule comme suit :

$$I = \hat{x}_{T+1} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha} V(e_{T+1})}$$

avec  $z_{\alpha/2}$  telle que la probabilité  $\Pr\{-z_{\alpha/2} < N(0;1) < z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$ ;

Le paramètre  $\alpha$  représente le niveau de tolérance. Nous avons considéré un niveau de confiance de 95%, soit un niveau de tolérance  $\alpha = 5\%$ ; d'où  $z_{\alpha/2} = 1,96$ ;

Pour déterminer si une donnée est aberrante, il suffit de calculer l'intervalle de confiance correspondant à la période  $T+1$ : Si la valeur observée,  $x_{T+1}$ ; à l'instant  $T+1$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance alors elle est rejetée et remplacée par la valeur estimée,  $\hat{x}_{T+1}$  (résultat du lissage exponentiel).

L'algorithme pour cette opération est simple :

Etape 1 : calculer  $\alpha$  et  $\hat{x}_1$ ;

Etape 2 : pour  $t = 2$  à  $T$  faire :

$$\hat{x}_{t+1} = \alpha x_t + (1 - \alpha) \hat{x}_t$$

$$I = \hat{x}_{t+1} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha} V(e_{t+1})}$$

si  $x_{t+1} \notin I$ ; on accepte  $x_{t+1}$  sinon  $x_{t+1} = \hat{x}_{t+1}$

...n pour.

## 5.4 Exemple d'application du lissage exponentiel

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats d'application de la méthode du lissage exponentiel aux données brutes. Les données sont collectées toutes les six minutes et elles se composent des variables suivantes : débit ( $q$ ), le taux d'occupation ( $\rho$ ) et la vitesse temporelle ( $u_t$ ): Nous disposons des informations enregistrées sur 1216 stations localisées sur les principaux axes de circulation. Chaque station de mesure correspond à 240 observations. Ces données sont censées représenter un jour type du trafic en Ile-de-France. Elles représentent l'évolution du trafic au cours de la journée du jeudi 05=10=2000.

Afin de montrer la méthode de traitement des données, nous prenons comme exemple un point de comptage sur l'autoroute A1, avec 4 voies (station a1W40000). Le tableau 4 présente une analyse statistique simple des données de comptage de la station A1W40000 où 240 observations ont été enregistrées.

Tableau 4 : station (A1W40000) sur l'autoroute A1

Variable	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
$q$ (nombre de véhicules / 6 minutes)	333,10	134,58	53,98	568,16
$u$ (km/h)	76,52	37,96	7	110
$\rho$ (%)	14,71	16,30	1,25	54,15
$k$ (nombre de véhicules / kilomètre)	94,8	108,9	5,4	411,8
Longueur moyenne (mètres)	5,82	1,10	4,26	9,08

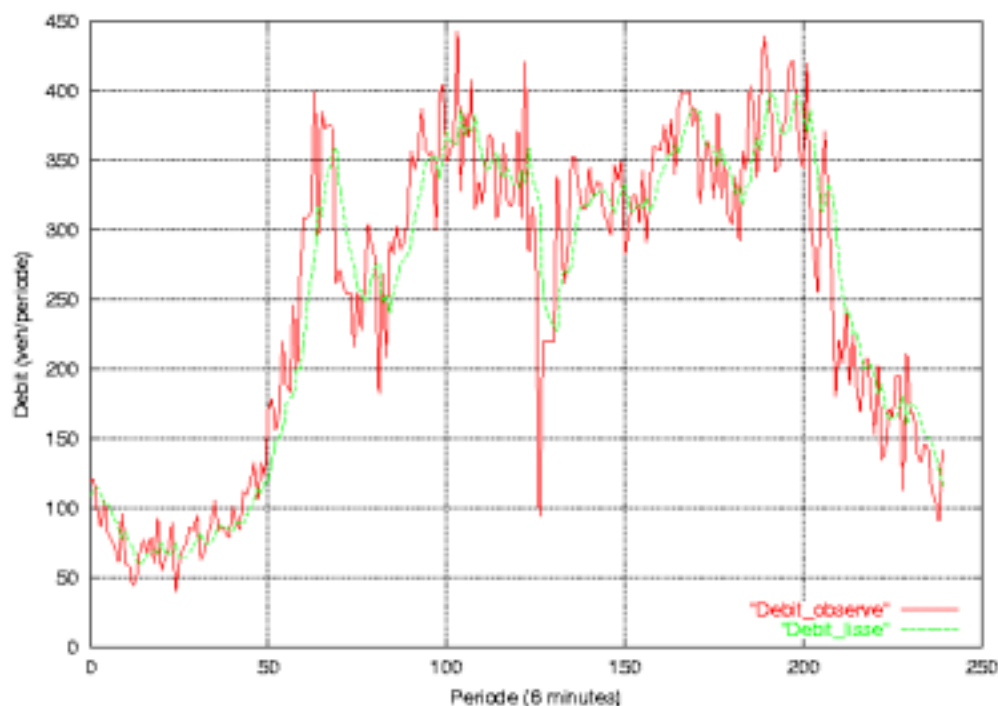


Figure 9 : valeurs observées et lissées du débit au cours de la journée

La figure 9 représente la variation du débit observé et de son lissage au cours de la journée. Les valeurs observées représentent des variations assez fortes en comparaison aux valeurs lissées. Nous pouvons observer qu'à la période 125, le débit observé chute significativement passant d'environ de 300 veh=6 min à 100 veh= min : Nous pouvons considérer que cette donnée est aberrante comme il est confirmé dans la figure 10.

La figure 10 représente l'évolution de trois courbes. la courbe la plus haute correspond à la variation de la borne supérieure de l'intervalle d'acceptation et la courbe la plus basse correspond à la variation de la borne inférieure de l'intervalle d'acceptation. Quand à la troisième courbe (du milieu), elle représente les valeurs ajustées. Ces dernières se composent des données observées si elles appartiennent à l'intervalle d'acceptation. Dans le cas contraire, elles sont remplacées par les valeurs du lissage. Comme nous pouvons le voir, la donnée correspondant à la période 125 a été modifiée.



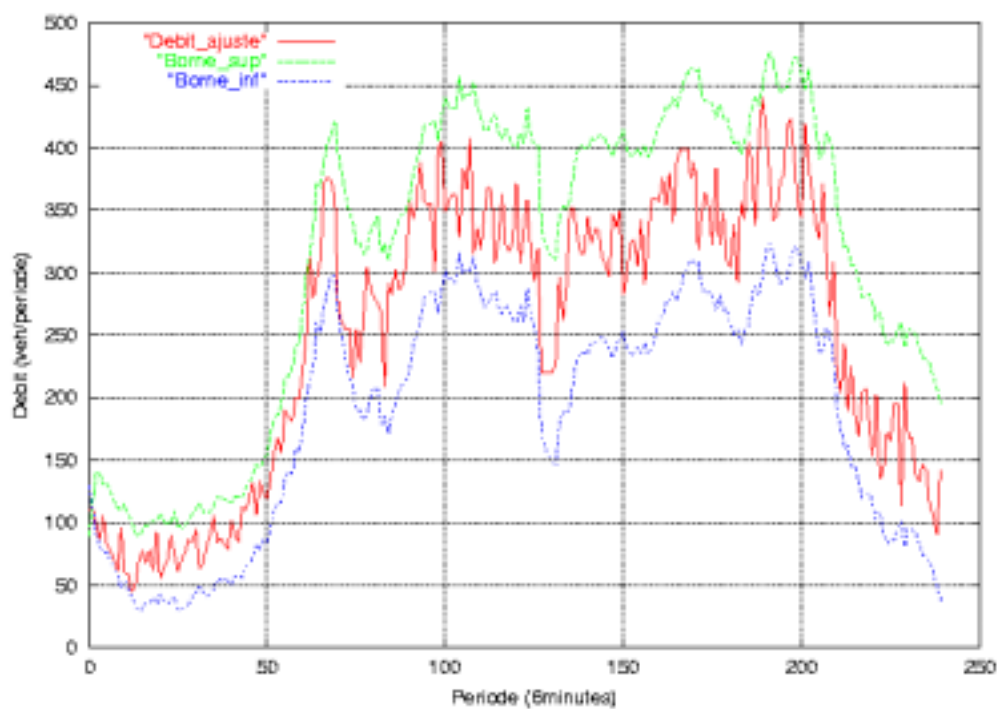


Figure 10 : intervalle d'acceptation des données observées du débit

De la même façon, nous présentons les figures relatives à la variation du taux d'occupation (Figure 11) et la variation de son intervalle d'acceptation (Figure 12). Les figures (13 et 14) représentent ces variations pour la vitesse.

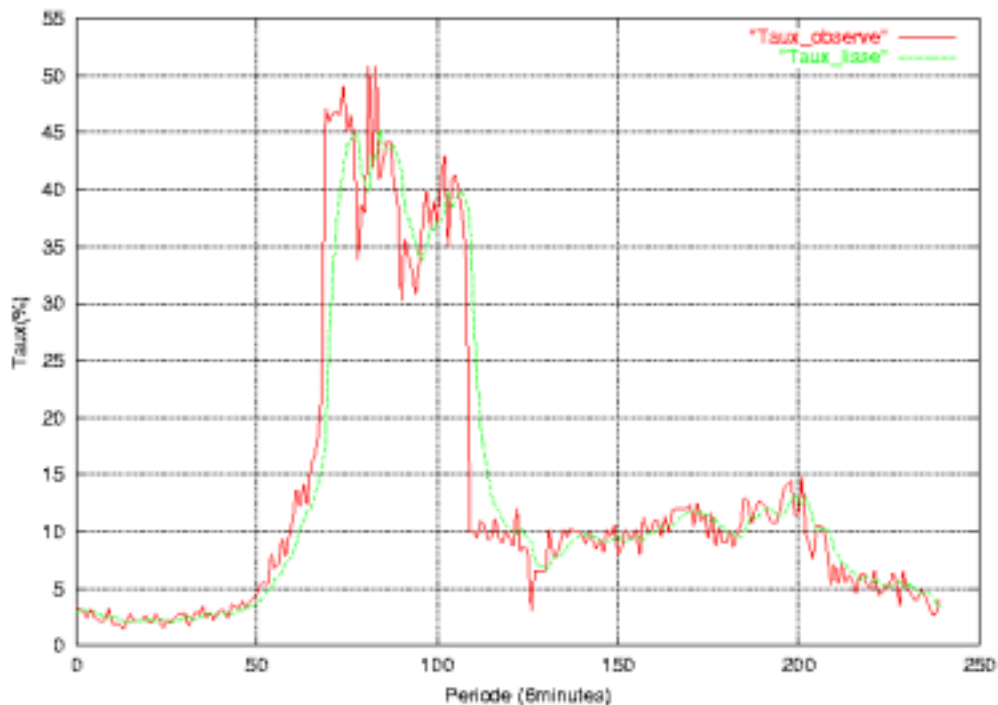


Figure 11 : valeurs observées et lissées du taux d'occupation au cours de la journée

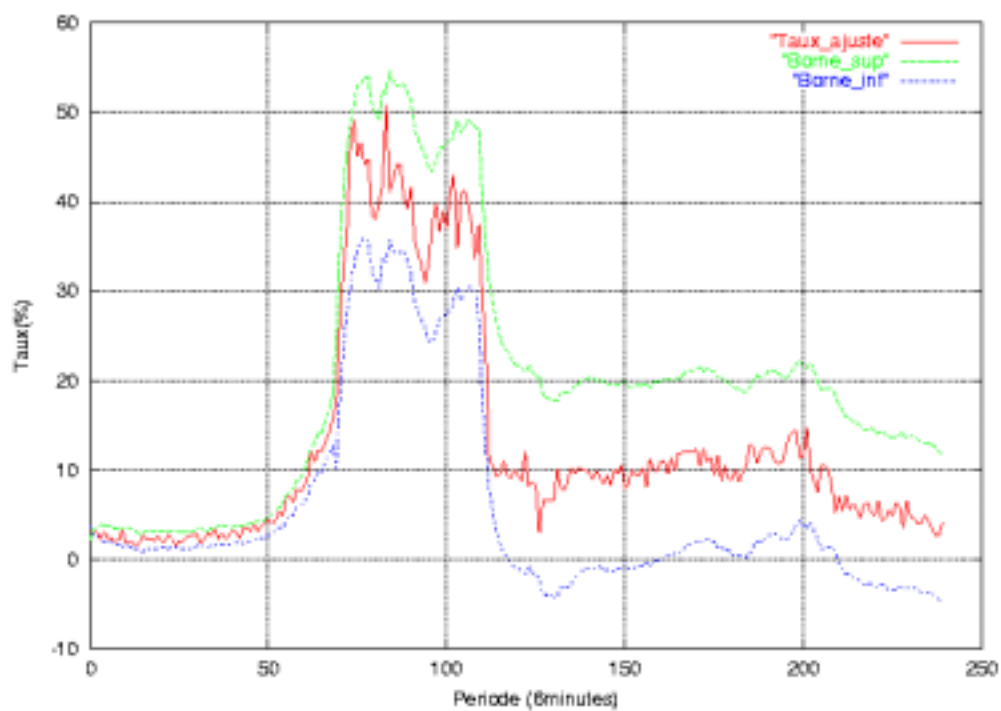


Figure 12 : intervalle d'acceptation des données observées du taux d'occupation

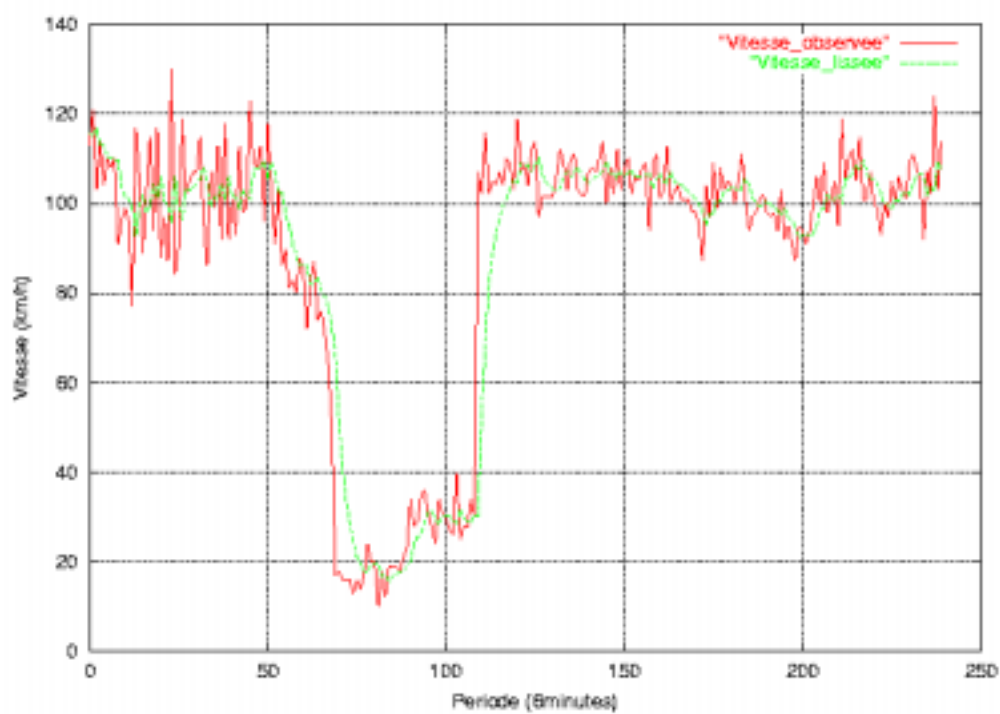


Figure 13 : valeurs observées et lissées de la vitesse au cours de la journée

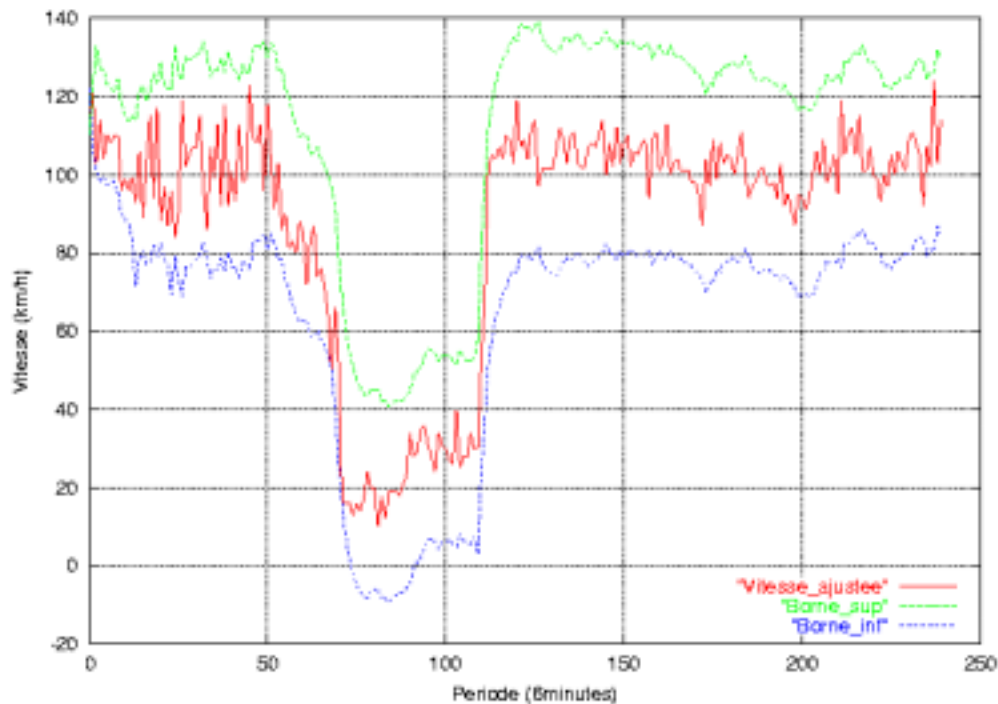


Figure 14 : intervalle d'acceptation des données observées de la vitesse

## 6 Méthode d'estimation économétrique

Dans cette section, nous présentons l'approche utilisée pour l'estimation des fonctions de congestion. Comme il a été décrit précédemment, le flux de trafic peut être représenté par deux régimes dans les modèles traditionnels. Par conséquent, il est nécessaire de déterminer s'il existe un seul ou deux régimes. Nous présentons dans un premier temps la méthode économétrique de rupture de régime et dans un second temps nous présentons les résultats.

### 6.1 Théorie

Dans cette approche, nous estimons des modèles linéaires simples. Les modèles décrits plus haut dans le tableau 2 peuvent être également écrits sous forme linéaire. Le modèle linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i \quad \text{ou} \quad i = 1; \dots; N ,$$

où :

N représente le nombre d'observations,

$y_i$  : variable expliquée,

$x_{1i}$  et  $x_{2i}$  : variables explicatives,

$\beta_1, \beta_2$  : paramètres du modèle à estimer, et

$\epsilon_i$  : une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, notée  $N(0; 1)$ ;

Il est possible d'écrire ce modèle sous forme matricielle comme suit :

$$Y = X\beta + \epsilon$$

Le vecteur  $Y$  représente la matrice des données brutes de la variable expliquée. La matrice  $X$  représente la matrice des variables explicatives. Le vecteur  $\beta$  représente les paramètres du modèle linéaire à estimer et  $\epsilon$  le vecteur des erreurs.

L'objectif du modèle est de réduire la somme des erreurs au carré entre les valeurs observées et les valeurs estimées. Les valeurs des estimations sont présentées sous forme matricielle et notées  $b$  :

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

### 6.1.1 Test d'homoscédasticité

Le test d'homoscédasticité des résidus consiste à analyser la variance en fonction de la variable expliquée. Autrement dit, l'acceptation de l'homoscédasticité des perturbations reflète une stabilité de la variance des résidus de l'estimation autour d'une moyenne nulle. Le rejet d'homoscédasticité s'explique soit par une non linéarité du modèle soit par l'existence d'un point de rupture. Dans ce deuxième cas, le(s) point(s) de rupture peut (vent) être décelé(s) à partir de l'observation de la variation des résidus de l'estimation.

Il existe plusieurs types de test mais nous nous limitons dans ce document au test de Goldfeld et Quandt (1972). Trois étapes pour effectuer ce test :

- Ordonner les observations suivant les valeurs croissantes de la variable expliquée.
- Choisir un entier  $m$  proche de  $N/3$  où  $N$  est le nombre d'observations.
- Effectuer séparément deux régressions sur les  $m$  premières observations et les  $m$  dernières observations. Les sommes des carrés des résidus de la première régression et de la deuxième régression sont notées respectivement  $SCR_1$  et  $SCR_2$ :

On calcule par la suite la valeur observée de Fisher, notée  $F_{obs}$ , telle que :

$$F_{obs} = \frac{SCR_2}{SCR_1} \sim F [m_1 - p; m_2 - p]$$

où  $p$  représente le nombre de paramètres à estimer. La valeur théorique de Fisher, notée  $A_{\alpha}$ , est donnée par une table statistique, telle que :

$$P(F(m_1 - p; m_2 - p) > A_{\alpha}) = \alpha$$

Le paramètre  $\alpha$  représente la région critique de refus de l'hypothèse d'homoscédasticité. Autrement dit, si  $F_{obs} > A_{\alpha}$  alors on refuse l'hypothèse d'homoscédasticité.

Dans notre cas, nous disposerons dans le meilleur des cas de 240 observations. Par conséquent  $m = 240/3 = 80$ . La valeur du paramètre  $p = 2$  (une constante et un coefficient pour la variable expliquée). Pour  $\alpha = 5\%$  on obtient  $A_{\alpha} \approx 1,40$ .

Exemple Afin de montrer la démarche à suivre, nous présentons un exemple que nous essayerons de détailler au fur et à mesure. Les données utilisées dans cette illustration concernent une portion de l'autoroute A1. Nous disposons de 240 observations. Les variables observées sont : la période, la vitesse et la taux d'occupation.

La première tâche consiste à estimer un modèle linéaire simple de type :

$$u = a + b\zeta$$

où  $\zeta$  :

$u$  : vitesse de circulation observée,

$\zeta$  : taux d'occupation observé, et

$a$  et  $b$  les paramètres à estimer.

L'estimation de ce modèle, par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), nous donne les résultats suivants :

$$u = 109,24 \zeta - 2,23$$

$$(0,97) \quad (0,044)$$

Les valeurs entre parenthèses indiquent les écarts types des valeurs estimées.

Si nous effectuons le test d'homoscédasticité, nous obtenons les résultats suivants :

$$F_{\text{obs}} = \frac{SCR_2}{SCR_1} = \frac{6866,08}{1053,66} = 6,51 \text{ à } 1; 40:$$

Par conséquent, on rejette l'hypothèse d'homoscédasticité. Dans ce cas, soit le modèle est non linéaire soit il existe une rupture de structure.

### 6.1.2 Test de rupture de régime

Le test de rupture de régime ou encore le test de changement de structure consiste à déterminer si pour un ensemble de données, il existe un ou plusieurs modèles explicatifs. Ce raisonnement reste vrai pour des données temporelles ou des données individuelles. Pour simplifier, nous supposons l'existence d'une seule rupture ce qui correspond à l'existence de deux régimes. Par conséquent nous supposons deux groupes composés respectivement de  $N_1$  et  $N_2$  observations ( $N = N_1 + N_2$  nombre total d'observations).

Les données du premier groupe sont expliquées par le modèle suivant :

$$y_i = a_1 x_i + b_1 + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1; \dots; N_1:$$

Les données du deuxième groupe sont expliquées par le modèle suivant :

$$y_i = a_2 x_i + b_2 + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = N_1 + 1; \dots; N:$$

Pour simplifier, nous pouvons également écrire ce modèle sous forme matricielle :

$$X_1 = \begin{matrix} 2 & 3 \\ x_1 & \\ 6 & 7 \\ \vdots & \vdots \\ 6 & 7 \\ 0 & 7 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ \vdots & \\ 0 & \end{matrix} \quad , \quad X_2 = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & \\ 6 & 7 \\ \vdots & \vdots \\ 6 & 7 \\ 0 & 7 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ \vdots & \\ x_N & \end{matrix} \quad \text{et } X = X_1 + X_2:$$

On définit également des indicatrices pour les deux groupes comme suit :

$$E1_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1 \cdot i \cdot N_1 \\ 0 & \text{si } N_1 + 1 \cdot i \cdot N \end{cases}$$

et

$$E2_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 1 \cdot i \cdot N_1 \\ 1 & \text{si } N_1 + 1 \cdot i \cdot N \end{cases}$$

Par conséquent,  $E1 + E2 = E$  et :

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_1 E1 + b_2 E2 + \epsilon$$

Le test de changement de structure consiste à tester l'hypothèse nulle  $H_0$  correspond aux contraintes  $a_1 = a_2$  et  $b_1 = b_2$ : Le refus de  $H_0$  qui correspond donc à la prise en considération d'un changement de structure.

### 6.1.3 Choix du modèle alternatif

Il est possible qu'au vu des estimations plusieurs modèles soient acceptables. Pour déterminer le "bon" modèle, il faut déterminer certains critères. Le premier critère concerne le coefficient de détermination ( $R^2$ ): Seulement ce critère n'est pas suffisant car lorsque le nombre de régresseurs (constante et variables explicatives) augmente, la valeur du  $R^2$  augmente. Cette situation de variation du nombre de régresseurs correspond aux estimations que nous allons effectuer où nous serons amenés à supprimer les constantes des modèles et à effectuer des estimations par partie (comme dans le cas des modèles à deux régimes). Dans ce cas, le nombre de régresseurs n'est plus le même et par conséquent, il faut utiliser un autre critère de sélection puisque le critère  $R^2$  n'est pas suffisant.

Le critère le plus simple parmi les critères convergents et le plus simple à utiliser est le critère de Schwarz, noté CS, tel que :

$$CS = \ln \hat{\sigma}^2 + (m + 1) \frac{\ln N}{N}; \quad \text{où } \hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{N};$$

où :

$m$  : le nombre de paramètres à estimer,

$N$  : le nombre de données, et

SCR : la somme des carrés des résidus.

En résumé le meilleur modèle est celui dont le critère de Schwarz est le plus petit.

## 6.2 Application économétrique

Les graphiques 15, 16 et 17 représentent les données de comptage sous forme de lois fondamentales. Le graphique 15 décrit la variation de la vitesse en fonction du débit. Nous observons qu'il existe deux régimes. La partie supérieure du graphique 15 présente le régime avant saturation du trafic où le trafic est stable. La partie inférieure du graphique correspond au second régime où le trafic est instable. La vitesse reste presque constante, environ 110 km/h, jusqu'à atteindre le débit critique qui est d'environ 500 veh (par six minutes) soit 5000 veh/h

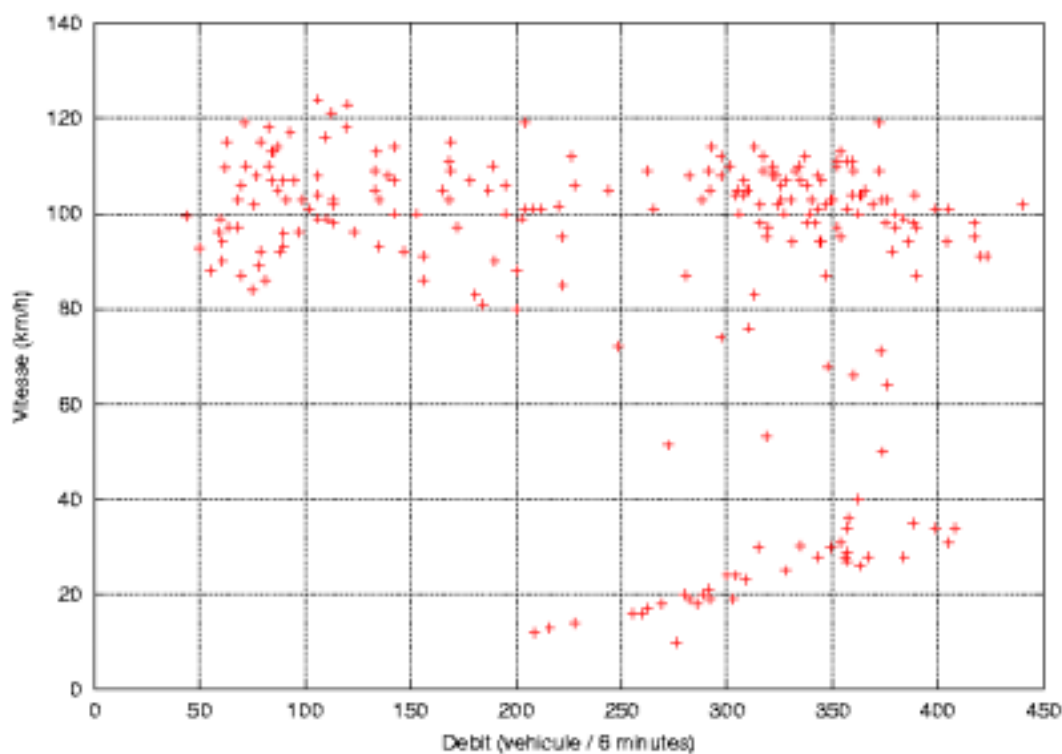


Figure 15 : relation vitesse (u) - débit (q)

La figure 16 présente l'évolution de la vitesse en fonction de la densité. Lorsque la vitesse est maximale (110 km/h), le débit reste inférieur à 500 veh:(par six minutes), soit 5000 veh/h: Le graphique 16 présente les données brutes (la densité est en pourcentage). La vitesse est presque nulle lorsque la densité devient supérieure à 400 veh=km: Par conséquent la densité d'embouteillage est supérieure à 400 veh=km: Notons que la relation entre la vitesse et la densité est décroissante de façon non linéaire. Nous observons également que pour une densité inférieure à 50 veh=km, la vitesse est presque constante.

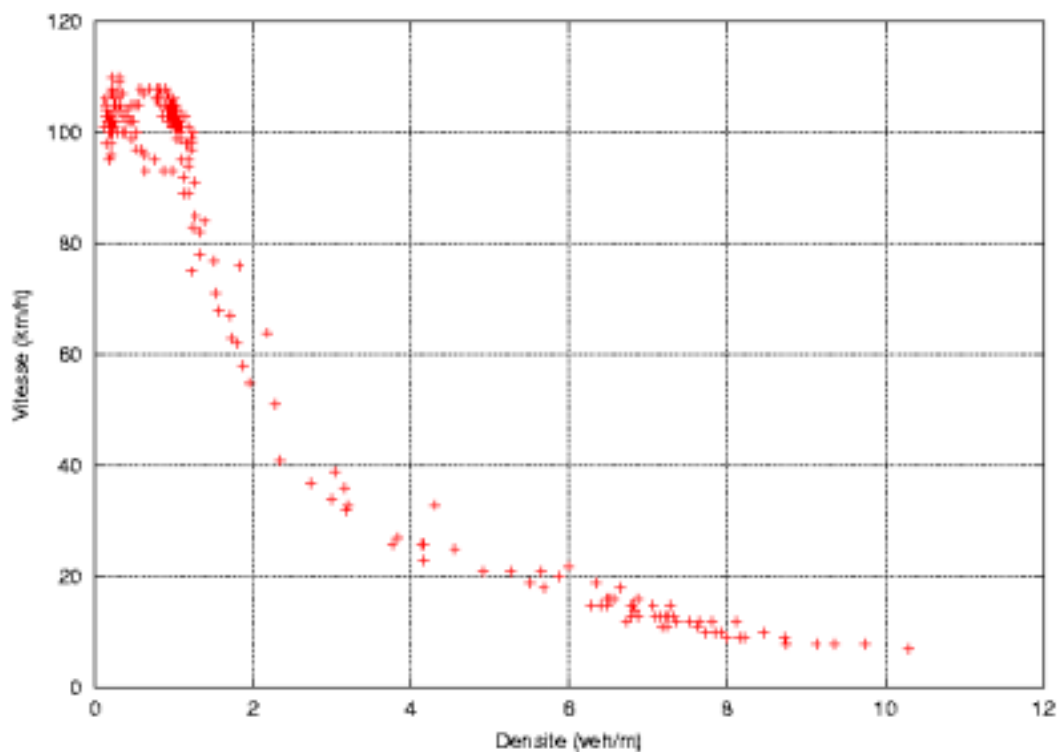


Figure 16 : relation vitesse (u) - densité (k)

La figure 17 présente la relation entre le débit et la densité. Cette relation est croissante pour une densité inférieure à 50% soit 500 veh/km est décroissante ailleurs.

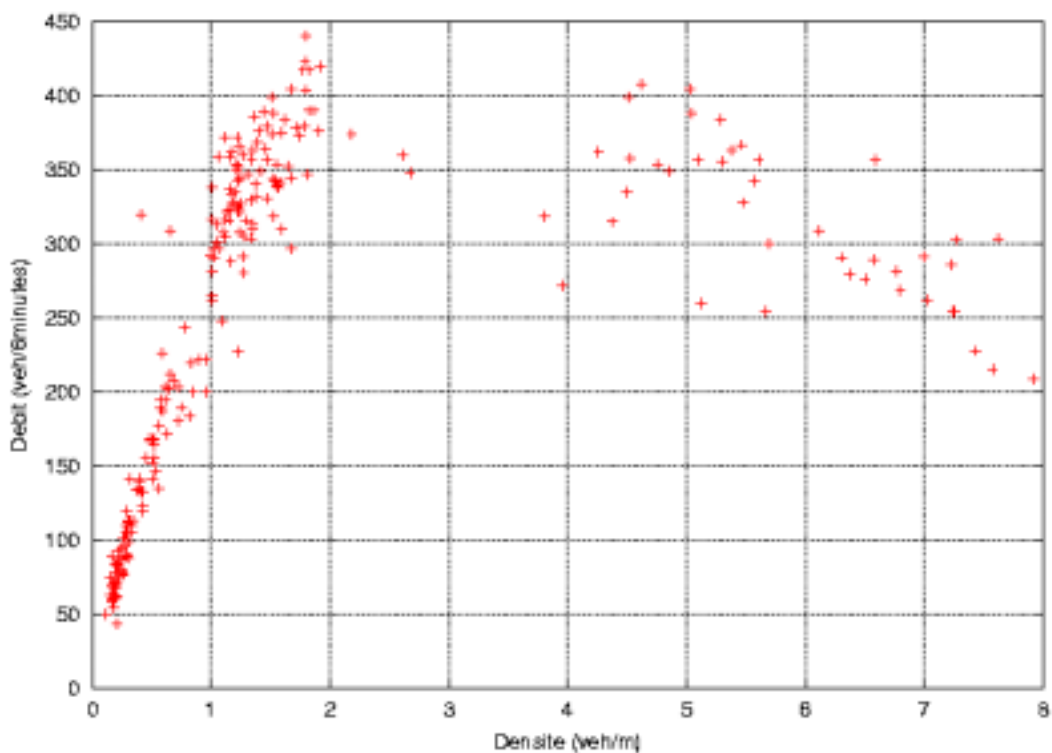


Figure 17 : relation débit (q)- densité (k)



L'objectif de ces estimations est, premièrement, de déterminer le modèle le plus approprié pouvant relier ces trois variables et deuxièmement, d'en déduire les valeurs de la vitesse maximale,  $u^{\max}$ , la densité critique,  $k_c$ ; et la densité d'embouteillage,  $k_j$ :

Les modèles retenus pour ces valeurs sont les suivants : modèle de Greenshields, modèle de Drew, modèle Greenberg modifié et le modèle SLE. Les deux premiers modèles décrivent les deux régimes en une seule équation. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser l'approche de rupture de régime. Par ailleurs les deux derniers modèles décrivent les deux régimes du trafic en deux relations.

### 6.2.1 Modèle de Greenshields

A titre de rappel, le modèle de Greenshields s'écrit sous la forme suivante :

$$u = u^{\max} \left( 1 - \frac{k}{k_j} \right);$$

est linéaire et peut s'écrire de la manière suivante :

$$u = a + bk + \epsilon;$$

où  $\epsilon$  représente une erreur de mesure et :

$$\begin{aligned} a &= u^{\max} > 0 \\ b &= -\frac{u^{\max}}{k_j} < 0 \end{aligned}$$

L'application économétrique nous donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} u &= 108;05 - 1;33 k, & R^2 &= 0;909 \\ &(0;982) & (0;068) &, & CS &= 4;957 \end{aligned}$$

Les valeurs entre parenthèses présentent la valeur des écarts-types des estimations. Le coefficient de détermination  $R^2$  est très élevé. L'ensemble des paramètres sont significatifs au seuil de 5%:

A partir de ces données, nous obtenons que la densité d'embouteillage par voie est de l'ordre de  $k_j = 81;23 \text{ veh/km}$ :

Pour une voie de l'autoroute, la densité critique  $k_c = 40;61 \text{ veh/km}$  et le débit critique  $\phi = \frac{u^{\max} k_c}{4} = 2194 \text{ veh/h}$ . Nous obtenons les résultats suivants :

- Vitesse maximale  $u^{\max} = 108 \text{ km/h}$ ;
- Densité critique par voie  $k_c = 40;61 \text{ veh/km}$ ;
- Débit par voie est de l'ordre de  $2194 \text{ veh/h}$ ; et

Par conséquent, le modèle calibré pour une voie s'écrit sous la forme suivante :

$$u = 108 - 1 \frac{k}{81;23};$$

La figure 18 présente la différence entre les valeurs observées et les valeurs estimées de la vitesse en fonction de la densité.

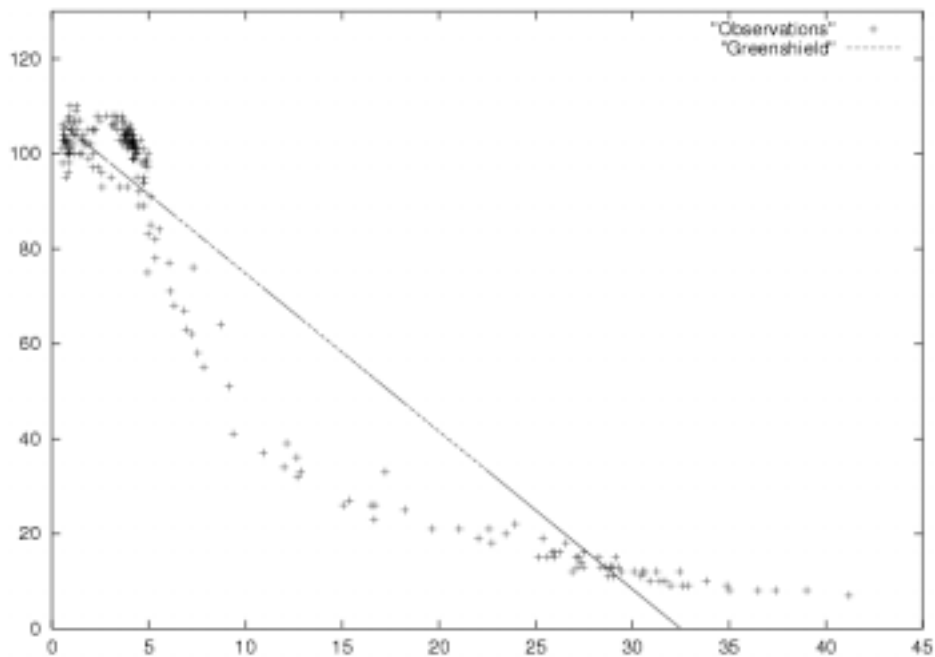


Figure 18 : valeurs observées et estimées (Modèle Greenshields)

Pour savoir si on peut accepter ou rejeter le modèle, nous pouvons effectuer le test d'homoscédasticité. Donc, on estime le même modèle pour le premier 1/3 des données et le dernier 1/3 des données. Puis on calcule les sommes des résidus, SCR1 et SCR2: On obtient l'indicateur suivant :

$$F_{\text{obs}} = \frac{SCR_2}{SCR_1} = \frac{4277; 59131}{2673; 49456} = 1; 6 < 1; 40:$$

Par conséquent, on accepte l'hypothèse d'homoscédasticité et la spécification du modèle.

### 6.2.2 Modèle Drew

Le modèle de Drew s'écrit sous la forme suivante :

$$u = u^{\max} \left( 1 - \frac{\mu}{k} \right)^{k-1} ;$$

et s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$u = a + bR + \epsilon;$$

où  $R = k^{1-2}$  et :

$$\begin{cases} a = u^{\max} > 0 \\ b = -\frac{u^{\max}}{k} < 0 \end{cases}$$

L'estimation économétrique nous donne les résultats suivants :

$$u = 136,42 \text{ ; } 22,73 \text{ } \hat{R} \text{ , } R^2 = 0,913 \\ (1,39) \quad (0,45) \quad \text{CS} = 4,907$$

Le coefficient de détermination  $R^2 = 0,913$  est meilleur que le précédent. L'ensemble des paramètres sont significatifs à moins de 5%: La valeur du critère de Schwartz est plus faible et par conséquent le modèle de Drew est préférable au modèle de Greenshields.

La vitesse maximale  $u^{\max} = 136,42 \text{ km/h}$  est plus élevée que dans le modèle de Greenshields: La densité d'embouteillage  $k_j = 90,04 \text{ veh/km}$  par voie. Pour une voie de l'autoroute, la densité critique  $\hat{k} = \frac{4}{9}k_j = 40,02 \text{ veh/km}$  et le débit critique  $\hat{q} = \frac{4u^{\max}k_j}{27} = 1820 \text{ veh/h}$ . Le modèle calibré pour une voie s'écrit sous la forme suivante :

$$q = 136,42 \left( 1 - \frac{k}{90,04} \right)^{1,2} :$$

La figure 19 présente la différence entre les valeurs observées et les valeurs estimées de la vitesse en fonction de la densité pour les quatre voies de la route.

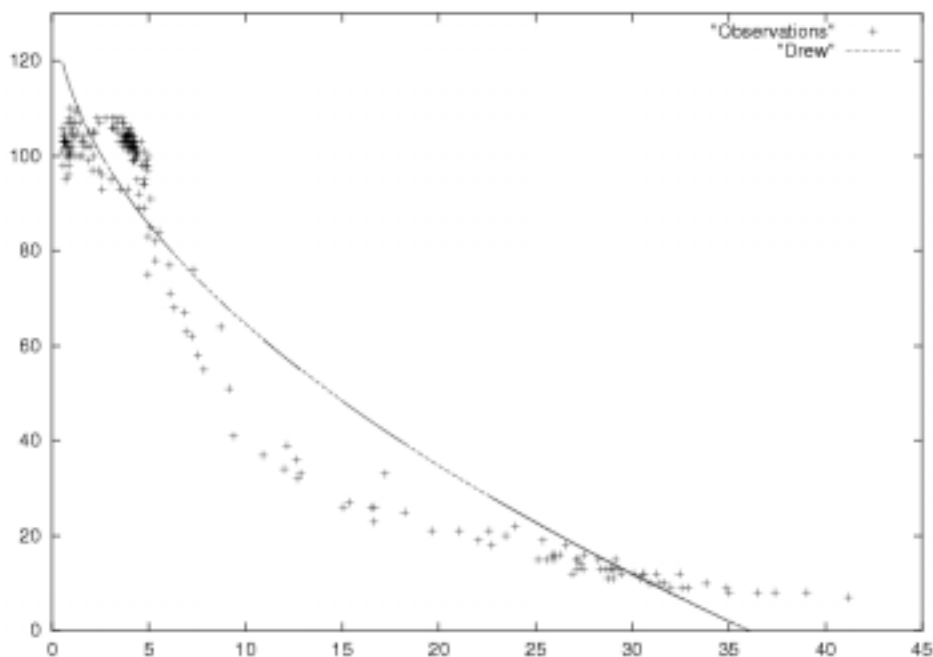


Figure 19 : valeurs observées et estimées (modèle Drew)

Nous calculons ci-dessous, le test d'homoscédasticité en calculant les sommes des résidus, SCR1 et SCR2: On obtient l'indicateur suivant :

$$F_{\text{obs}} = \frac{\text{SCR}_2}{\text{SCR}_1} = \frac{4176,25406}{586314,834} = 0,0071 < 1,40:$$

Par conséquent, on accepte l'hypothèse d'homoscédasticité et la spécification du modèle de Drew au lieu du modèle de Greenshields.

### 6.2.3 Modèle SLE

Comme nous l'avons expliqué précédemment. Dans ce modèle, il existe deux régimes. Le premier régime correspond au régime de circulation fluide et le second au régime de circulation congestionnée. Pour détecter ces deux régimes, nous allons estimer la relation entre le flux et la densité, présentée par la relation suivante :

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} u^{\max} h & \text{si } k \cdot k_c \\ \frac{1}{\tau} \frac{1}{k} & \text{si } k > k_c \end{cases}$$

L'objectif de cette estimation consiste à déterminer (1) la vitesse maximale,  $u^{\max}$ , (2) la densité de circulation critique,  $k_c$ , (3) la longueur de circulation moyenne,  $L$ ; (3) la valeur du temps de réaction,  $\tau$ , et en déduire la densité limite de circulation  $k_c$ :

Dans cette situation, nous avons utilisé la méthode d'estimation économétrique avec deux régimes.

Etape 0 : poser  $k_c = k_0$

Etape 1 : estimer la vitesse maximale  $u^{\max}$  à partir de la relation,  $q = u^{\max}k$ , du premier régime.

Etape 2 : pour maintenir la continuité de la fonction entre les deux régimes, nous devons imposer que le point de coordonnées  $(k_c; \phi)$  doit appartenir aux deux régimes. Par conséquent, en ce point la relation entre la densité et le flux s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi = u^{\max} k_c = \frac{1}{\tau} \frac{L}{k_c} k_c \Rightarrow \frac{1}{\tau} = \phi + \frac{L}{\tau} k_c \quad (6)$$

La relation du second régime s'écrit :

$$q = \frac{1}{\tau} \frac{L}{k} = \phi + \frac{L}{\tau} k_c - \frac{L}{\tau} k_c$$

ou encore :

$$q - \phi = \frac{L}{\tau} (k_c - k) \quad (7)$$

Grâce à une régression linéaire, nous pourrions déterminer le rapport  $\frac{L}{\tau}$ :

Etape 3 : une fois  $L/\tau$  déterminé, nous pourrions calculer le temps de réaction moyen des conducteurs  $\tau$  à partir de la relation (6) et par la suite la longueur moyenne des voitures  $L$  (ou  $L = \frac{1}{k_c}$ ) à partir de la relation (7).

Etape 4 : calculer le critère de Schwartz:

Etape 5 : effectuer cette opération pour toutes les valeurs de  $k_c$  et retenir la régression dont le critère de Schwartz est le plus faible.

Résultats économétriques L'estimation économétrique nous donne un critère CS = 3:056 qui est meilleur que les deux précédents. Après estimation, on obtient les résultats suivants :

- Vitesse maximale ( $u^{\max}$ ) : 103 km/h
- Densité critique par voie de circulation ( $k_c$ ) : 10; 78 veh/km.

- Débit critique pour la route ( $\phi$ ) : 1114 veh=km
- Temps de réaction ( $\pm$ ) : 2;19 secondes
- Densité de saturation ( $k_j$ ) : 533;98 veh=km: Cette estimation reste très élevée. En effet, une densité de saturation égale à 534 veh=km correspond à une occupation moyenne de 1;90 m ce qui est très faible. Un tel résultat, nous oblige à rejeter cette estimation.

Le modèle<sup>5</sup> calibré peut s'écrire :

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 103 & \text{si } k < 10;78 \\ 456;62 \cdot \frac{1}{k} & \text{si } 10;78 \cdot k \cdot 533;98 \end{cases}$$

Le graphique 20 montre l'évolution de la vitesse observée et estimée en fonction de la densité pour l'ensemble des quatre voies de la route.

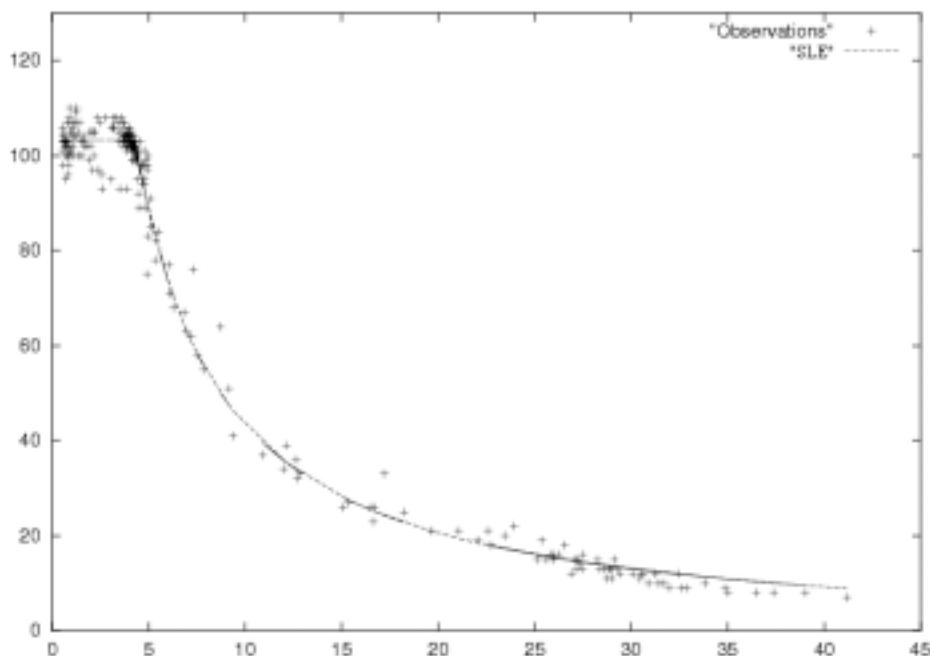


Figure 20 : valeurs observées et estimées (Modèle SLE)

#### 6.2.4 Modèle de Greenberg

Le modèle de Greenberg s'écrit sous la forme suivante :

$$u = u_{opt} \ln \frac{\mu \cdot k_j}{k}$$

Puisque dans ce modèle, lorsque la densité tend vers zéro, la vitesse tend vers l'infini, nous avons préféré supprimer cette situation en supposant qu'il existe deux régimes comme dans le cas du modèle de SLE.

<sup>5</sup>Même si le modèle est rejeté, nous donnons à titre illustratif sa formulation.

Le modèle s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$u = a \ln k + b \ln k_j + \epsilon;$$

En introduisant les deux régimes, on obtient :

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} u^{\max} & \text{si } k < k_c \\ a \ln k + b \ln k_j & \text{si } k_c < k < k_j \end{cases}$$

Résultats économétriques Le critère CS = 4,03 est plus élevé que dans le cas du modèle SLE et le  $R^2 = 0,99$ . Après estimation, on obtient les résultats suivants :

- Vitesse maximale ( $u^{\max}$ ) : 103 km/h
- Densité critique par voie de circulation ( $k_c$ ) : 8,97 veh/km.
- Débit critique pour la route ( $\phi$ ) : 930 veh=km
- Densité de saturation ( $k_j$ ) : 92,25 veh=km

Les critères économétriques étant satisfaits, l'estimation est acceptable. De plus, le critère de CS est plus faible que dans les autres estimations ; le modèle est considéré comme le meilleur.

Le modèle peut s'écrire en terme de vitesse comme suit :

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} 103 & \text{si } k < 8,97 \\ 45 \ln \frac{92,25}{k} & \text{si } 8,97 < k < 92,25 \end{cases}$$

La valeur de 45 correspond à la vitesse optimale ( $u_{\text{opt}} = 45 \text{ km/h}$ ) pour avoir un flux optimal sur la route. Le graphique 21 montre l'évolution de la vitesse observée et estimée en fonction de la densité pour l'ensemble des quatre voies de la route.

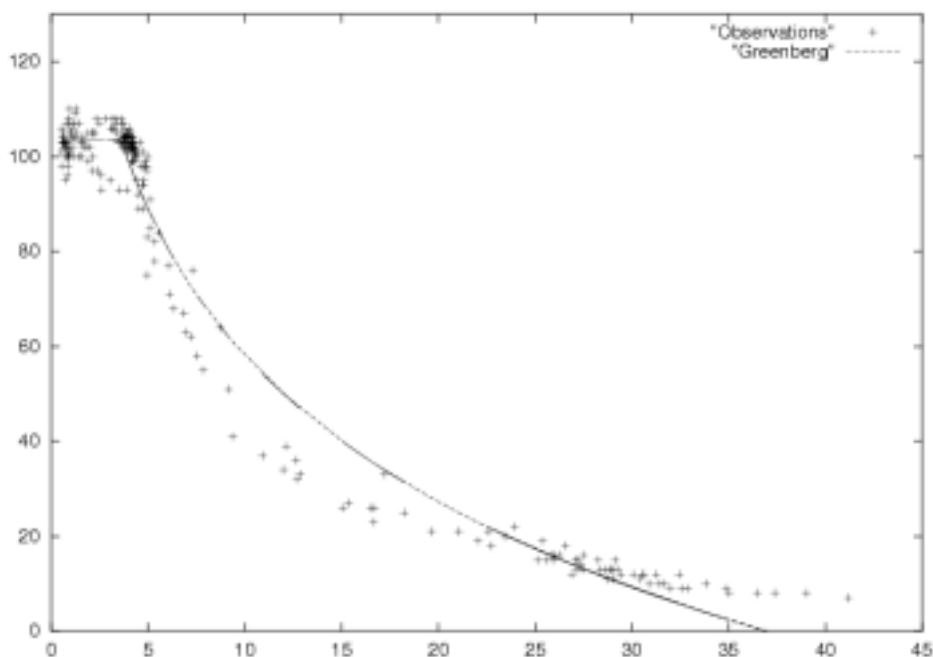


Figure 21 : valeurs observées et estimées (Modèle Greenberg)

### 6.2.5 Modèle SLEG

Le modèle de SLEG s'écrit sous la forme suivante :

$$u = \frac{1}{\pm} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k_j} \right)^{\alpha} :$$

Ce modèle ne peut être écrit sous forme linéaire afin d'estimer les paramètres. Par conséquent, nous avons utilisé la méthode des estimations non linéaires (voir Antoniadis et al., 1992) et plus précisément, l'algorithme de Levenberg-Marquardt (voir Marquardt, 1963). Nous n'avons pas utilisé cette approche pour l'ensemble des estimations. Nous présentons les résultats de cette méthode uniquement à titre illustratif.

Nous obtenons ainsi,  $\frac{1}{\pm} = 374,808$ ,  $\frac{1}{k_j} = 0,0153$  et  $\alpha = 0,85$ . Par conséquent,  $\pm = 2,67$  secondes et  $k_j = 387 \text{ veh/km}$  qui est inférieure à celle dans le cas du modèle de Greenberg. Cette dernière valeur est plus faible que dans le cas linéaire (LES) mais elle reste toujours élevée. Par conséquent, le modèle est rejeté. La figure 22 présente la différence entre les observations et les estimations de ce modèle de la variation de la vitesse en fonction de la densité.

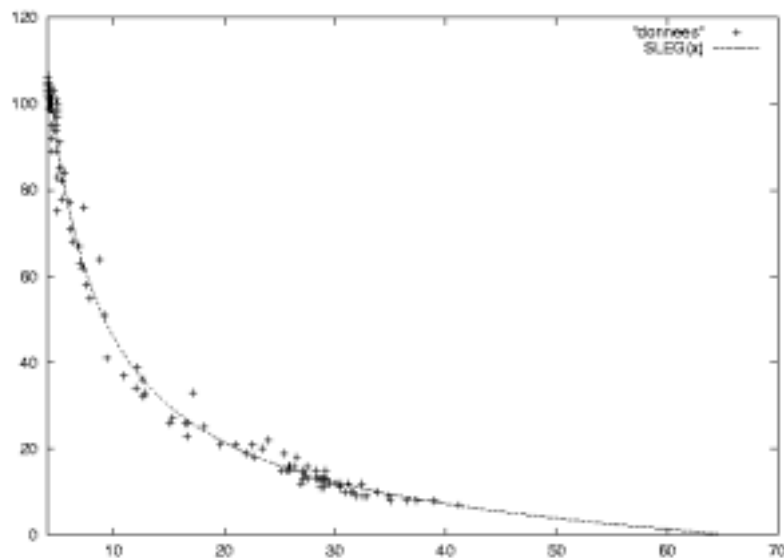


Figure 22 : valeurs observées et estimées (Modèle SLEG)

## 7 Résultats des estimations

Le réseau SIRIUS se compose de 1632 stations de comptage. Les données que nous avons reçues et que nous avons utilisées dans cette étude représentent 1216 stations de comptage. Pour ces données, nous avons estimé les paramètres des différentes fonctions de congestion suggérées dans le tableau 3. Pour 554 stations de comptage aucun des modèles proposés n'a été accepté ; soit parce que les paramètres ne sont pas significatifs ; soit parce que les valeurs des estimations sont irréalistes ou encore les données sont inexploitable comme le montre la figure 23. Dans ce cas, il s'avère nécessaire d'explorer d'autres fonctions de congestion ou d'analyser de plus près les données de ces points de comptage.

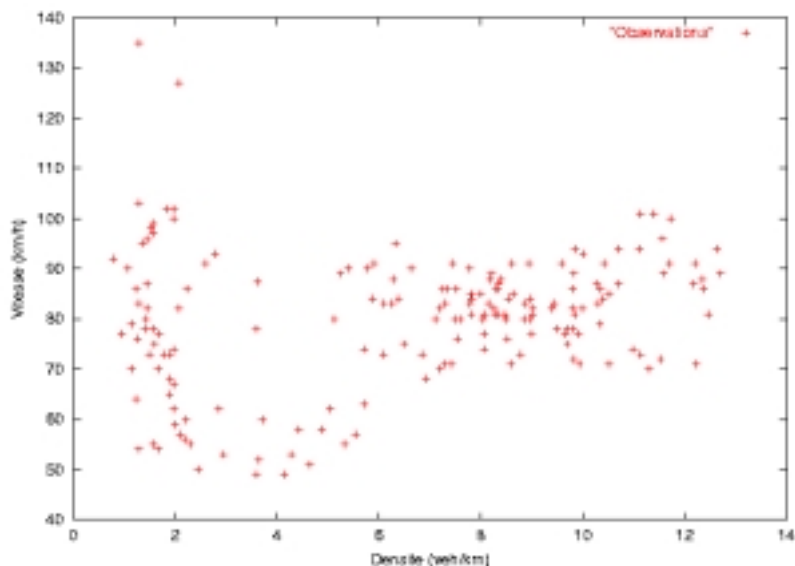


Fig 23 : relation vitesse (u)- densité (k)

Dans certains cas, les tronçons analysés ne sont jamais ou peu utilisés et par conséquent, l'estimation de la fonction de congestion est peu précise. En effet, il peut exister une multitude de fonctions pouvant décrire le premier régime. La figure 24 présente cette situation. Ce graphique décrit la variation de la vitesse (u) en fonction de la densité (k). Comme, nous l'observons le deuxième régime est peu dépassé ; autrement dit le nombre d'observations dans le second régime est insuffisant pour estimer les deux régimes. Les estimations des quatre modèles révèlent des coefficients de détermination très faibles. Dans plusieurs situations, même si le coefficient de détermination est très élevé, il ressort que les valeurs des paramètres sont inacceptables.

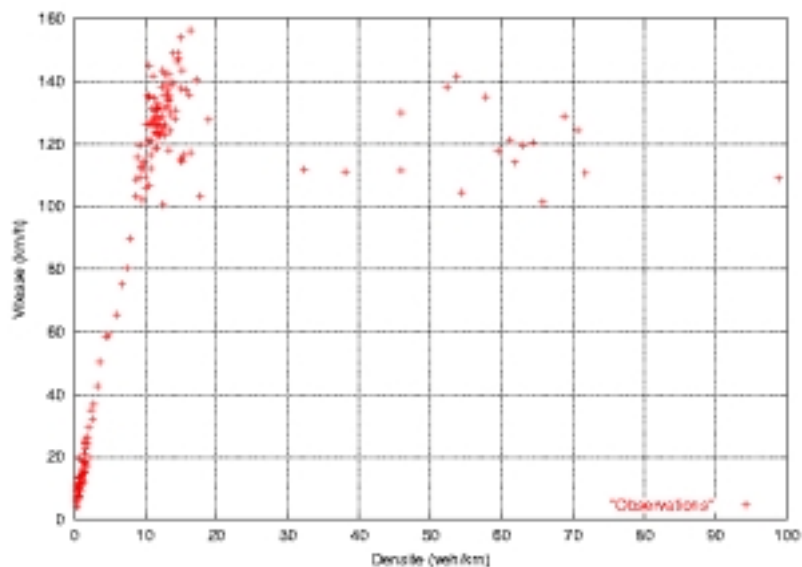


Fig 24 : relation vitesse (u)- densité (k)

Pour mieux distinguer les tronçons ou les voies, nous présentons les résultats des estimations les plus importants ; autrement dit, la vitesse maximale ( $u^{\max}$ ), la densité de changement de régime ( $k$ ); la densité critique ( $k_c$ ), le débit critique ( $q$ ), la densité d'embouteillage ( $k_j$ ) et éventuellement le temps de réaction ( $\pm$ ) pour le modèle SLE ainsi que la vitesse optimale ( $u_{\text{opt}}$ ) pour le modèle de Greenberg.



Après le traitement des données et la sélection des paramètres les plus réalistes économétriquement et théoriquement, nous avons pu estimer 662 fonctions de congestion.

Afin d'identifier le modèle le plus accepté lors des estimations, nous avons réparti les modèles estimés en fonction du type de route. Nous entendons par type de route, le nombre de voies de circulation.

Tableau 5 : répartition des modèles en fonction des routes  
(selon le nombre de voies par route)

Modèle	1 voie	2 voies	3 voies	4 voies	5 voies	Total
Greenshields	2	11	12	6	0	31
Drew	9	7	3	1	0	20
SLE	17	49	13	2	0	81
Greenberg	82	222	178	37	11	530
Total	110	289	206	46	11	662

Le tableau 5 présente la répartition des modèles en fonction des routes selon leur nombre de voies. Les tronçons, dont nous avons estimés les fonctions, se répartissent comme suit : 110 tronçons avec 1 voie de circulation, 289 tronçons avec 2 voies, 206 tronçons avec 3 voies, 46 tronçons avec 4 voies et 11 tronçons avec 5 voies. Par ailleurs, si nous observons le nombre de fois où chaque modèle a été retenu comme le meilleur selon le critère de Schwartz, nous remarquons que c'est le modèle de Greenberg qui l'emporte (530 fois), puis le modèle SLE.

La figure 25 présente la distribution de la vitesse maximale en fonction du nombre de voies par tronçon. Les détails des valeurs sont présentés dans le tableau 6. Pour construire ce graphique, nous avons groupé les vitesses par classe d'intervalle de longueur 20 km/h. Comme le montre cette figure, les valeurs estimées sont concentrées pour l'ensemble de types de route autour de la moyenne qui est de 94 km/h. Cependant, on observe également une grande dispersion autour de cette moyenne, ce qui montre la grande hétérogénéité du réseau routier francilien. Ceci est d'autant plus vrai pour les routes à une voie. Une part de 30% des routes à une voie de l'échantillon appartient à la classe d'intervalle [80; 100] km/h et les 70% restants sont dispersés de façon égale entre les autres classes de vitesse. La moyenne de la vitesse maximale estimée est de 90,85 km/h. Nous observons également que les routes avec deux voies de circulation ont une vitesse de circulation légèrement plus élevée ; elle est de l'ordre de 92,50 km/h. Les routes avec 5 voies de circulation sont à 80% concentrées dans l'intervalle [80; 90] km/h.

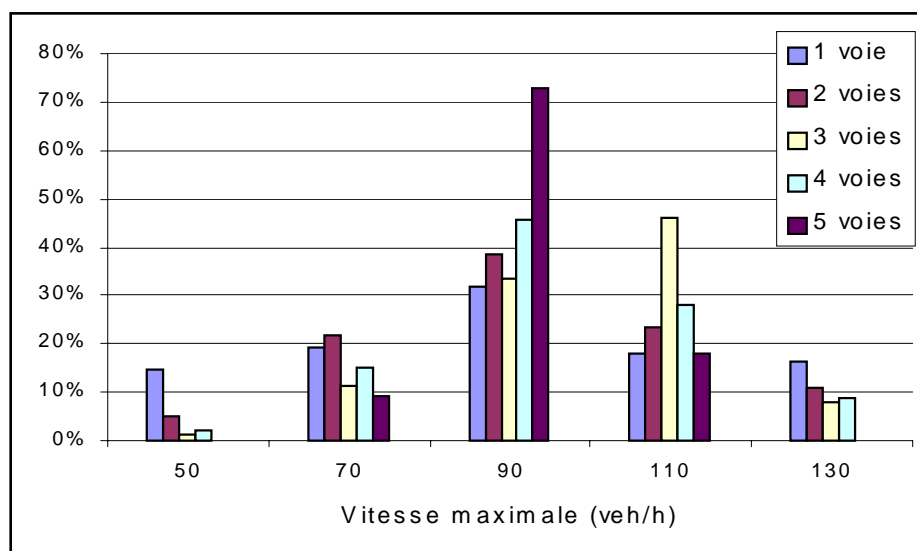


Figure 25 : distribution de la vitesse maximale

Nous avons, également, effectué un groupement par classe pour les valeurs estimées de densité critique,  $k$ , du débit critique,  $\phi$  et de la densité d'embouteillage,  $k_j$  : Les résultats sont présentés, dans l'ordre, dans les ...gures 24, 25 et 26.

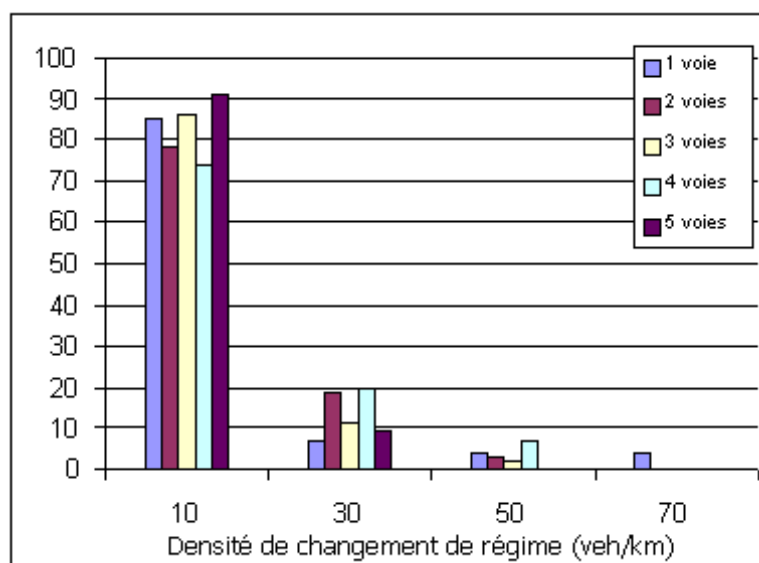


Figure 26 : distribution de la densité de changement de régime

Contrairement aux résultats d'estimation de la vitesse maximale, les valeurs estimées de la densité critique sont concentrées dans deux classes,  $[0; 20]$  et  $[20; 40]$  veh=km et plus précisément sur la première classe avec un ordre de pourcentage de 90% (voir ...gure 26). Le graphique 27, ci-dessous, présente la variation de la densité critique pour chaque type de route. Le regroupement par classe atténue la variabilité des paramètres estimés. Cependant, elles sont très élevées à l'état brut : 23% pour la vitesse maximale, 75% pour la densité critique, 43% pour le débit critique et 40% pour la densité d'embouteillage.

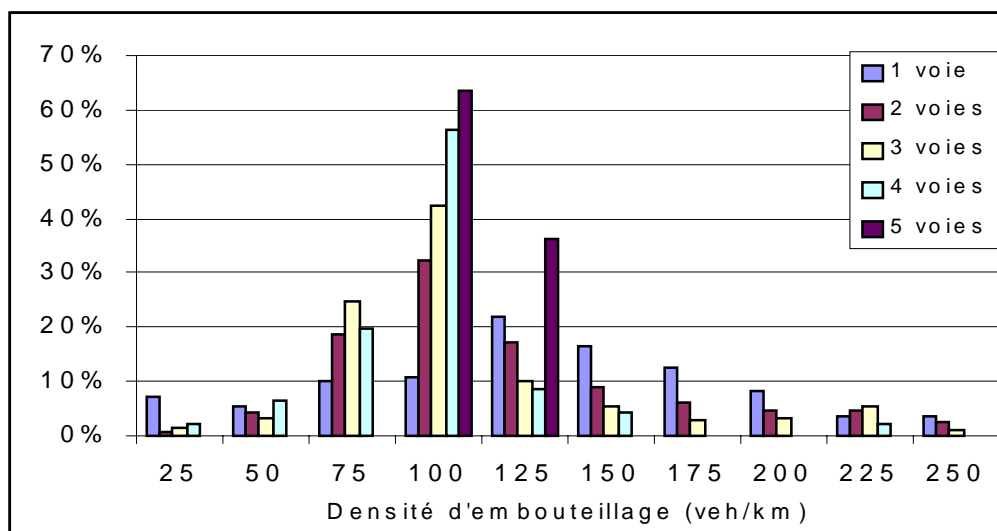


Figure 27 : distribution de la densité d'embouteillage

Tableau 6-a : variabilité des paramètres estimés

		Vitesse maximale (km=h)	Densité critique (veh=km=voie)	Débit critique (veh=h=voie)	Densité d'embouteillage (veh=h=voie)
Modèle 1	1 voie	84 (2; 5)	55 (0; 4)	2313 (86; 6)	110 (0; 8)
	2 voies	103 (10; 7)	41 (5; 2)	2070 (166; 6)	81 (10; 3)
	3 voies	112 (10; 7)	38 (4; 6)	2132 (145; 8)	77 (9; 1)
	4 voies	120 (14; 8)	36 (7; 7)	2136 (333; 2)	72 (15; 4)
Modèle 2	1 voie	100 (23; 4)	53 (21; 3)	1652 (481; 6)	119 (47; 9)
	2 voies	123 (33; 3)	35 (11; 4)	1384 (534; 4)	78 (25; 7)
	3 voies	139 (3; 7)	42 (3; 1)	1940 (159; 8)	95 (7; 0)
	4 voies	131 (DI <sup>6</sup> )	49 (DI)	2159 (DI)	111 (DI)

Modèle 1 : modèle de Greenshields, Modèle 2 : modèle de Drew

Tableau 6-b : variabilité des paramètres estimés

		Vitesse maximale (km=h)	Densité de changement de régime (veh=km=voie)	Débit de changement de régime (veh=h=voie)	Densité d'embouteillage (veh=h=voie)	Autres paramètres
Modèle 3	1 voie	86 (33; 2)	10 (6; 2)	805 (564; 2)	141 (86; 2)	1; 8 (0; 9)
	2 voies	85 (23; 4)	20 (7; 2)	1599 (373; 6)	178 (43; 2)	3; 0 (1; 0)
	3 voies	96 (20; 9)	14 (4; 9)	1302 (360; 4)	185 (64; 8)	3; 2 (3; 6)
	4 voies	96 (3; 4)	11 (0; 5)	1031 (14; 1)	172 (79; 9)	2; 3 (0; 0)
Modèle 4	1 voie	91 (25; 9)	9 (6; 8)	688 (451; 8)	130 (51; 7)	32 (15; 1)
	2 voies	93 (20; 5)	13 (6; 2)	1092 (464; 6)	111 (38; 7)	43 (12; 4)
	3 voies	97 (16; 8)	14 (10; 9)	1259 (331; 5)	107 (37; 2)	49 (11; 6)
	4 voies	90 (14)	15 (5; 3)	1295 (351; 9)	95 (22; 4)	51 (18; 9)
	5 voies	92 (9; 5)	16 (2; 7)	1491 (195; 3)	109 (10; 7)	48 (4; 8)

Modèle 3 : modèle SLE, Modèle 4 : modèle de Greenberg modifié

Les résultats agrégés présentés dans les figures précédentes sont décrits de façon désagrégée dans le tableau 6-a et le tableau 6-b qui donne la répartition des modèles estimés en fonction du type de route. Dans le cas des trois premiers modèles aucune estimation n'a été retenue pour les routes à cinq voies. Ce tableau présente également, la moyenne des paramètres estimés et leur écart-type (valeur entre parenthèses). Ainsi, nous pouvons observer que les écarts-types sont très élevés ce qui montre la grande hétérogénéité des routes même si elles sont du même type.

## 8 Conclusions

Au cours de l'adaptation et du calage de METROPOLIS, nous avons adopté essentiellement des approches agrégées. La troisième année du projet QUATUOR est consacrée au calage désagrégé des paramètres comportementaux et des paramètres des fonctions de congestion. Ce chapitre se concentre uniquement sur le calage des lois de congestion.

<sup>6</sup>DI : Données Insuffisantes.

Au cours des travaux précédents, nous avons utilisé une fonction de congestion de type goulot d'étranglement d'une part, et d'autre part nous avons considéré que les capacités varient de façon homothétique. Cette approche nous a permis de tester des intervalles de variation des paramètres comportementaux dynamiques. Pour valider le calage agrégé, nous avons considéré des indicateurs agrégés comme la moyenne et la distribution des temps de trajet d'une grande zone (Paris ou Banlieue) vers une grande zone (Paris ou Banlieue). Nous avons également comparé les flux de déplacement pour ces mêmes zones. Cependant, pour le calage désagrégé de l'outil de simulation, il est nécessaire de comparer la variation des flux simulés aux variations réelles observées sur le réseau. Par conséquent, la description des lois régissant les flux sur la majorité des axes de circulation joue un rôle majeur ; ceci nous a conduit à estimer les fonctions de congestion.

Les fonctions de congestion ont été estimées pour 662 tronçons à partir des données de comptage. Les résultats ne nous ont pas permis de dégager les caractéristiques par type de route. L'étape suivante consistera à introduire ces lois de congestion dans l'outil de simulation afin de comparer les résultats de simulation aux données de comptage dont nous disposons.

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les différentes variables macroscopiques, nécessaires à la description et à la compréhension de la variation des flux sur les routes périurbaines. Nous avons par la suite, exposé les relations pouvant exister entre ces différentes variables. Nous avons également exposé d'une part l'approche de traitement des données aberrantes et d'autre part l'approche économétrique permettant l'estimation des fonctions de congestion et le choix du meilleur modèle. Afin d'expliquer la méthodologie utilisée, nous avons pris comme exemple un point de comptage de l'autoroute A1. Pour cette section, nous avons estimé quatre lois de congestion. Suivant le critère de Schwartz c'est le modèle de Greenberg modifié qui a été retenu. Nous avons effectué la même démarche pour l'ensemble des données des 1298 stations de comptage. En conclusion, il ressort que le modèle de type Greenberg est plus adapté. L'adaptation de ces lois à l'outil de simulation ne peuvent qu'améliorer la qualité des résultats de simulation qui rappelons-le présentent actuellement, après l'introduction des données de l'enquête MADDIF, une divergence de 9% par rapport aux données observées.

## Annexe

Soit  $f_i = \frac{k_i}{k}$  où  $\sum_{i=1}^P f_i = 1$ , la variable  $k_i$  représente la concentration individuelle. Elle est égale à  $1/s_i$  où  $s_i$  représente l'espacement moyen ou encore la distance qu'occupe une voiture.

Nous avons :

$$u_t = \frac{1}{q} \sum u_i q_i$$

où  $q_i$  représente une forme de débit individuel et  $q$  le débit total. On peut écrire cette expression comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{u}_t &= \frac{1}{q} \sum u_i^2 k_i \\ &= \frac{k}{q} \sum f_i u_i^2\end{aligned}$$

Cette relation se simplifie, en prenant compte la définition de la concentration (1) :

$$\bar{u}_t = \frac{1}{\bar{u}_s} \sum f_i u_i^2$$

En développant cette relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\bar{u}_t &= \frac{1}{\bar{u}_s} \sum f_i \left[ \bar{u}_s + (u_i - \bar{u}_s)^2 \right] \\ &= \bar{u}_s + \frac{1}{\bar{u}_s} \sum f_i (u_i - \bar{u}_s)^2 + \frac{2}{\bar{u}_s} \sum f_i \bar{u}_s (u_i - \bar{u}_s)\end{aligned}$$

Puisque  $\bar{u}_s = \frac{1}{k} \sum f_i u_i$ ; on obtient :  $\sum f_i \bar{u}_s (u_i - \bar{u}_s) = 0$ ; Puisque :  $\frac{1}{k} \sum k_i (u_i - \bar{u}_s)^2$ ; on obtient finalement :

$$\bar{u}_t = \bar{u}_s + \frac{\frac{1}{k} \sum k_i (u_i - \bar{u}_s)^2}{\bar{u}_s}$$

## Références

- [1] Antoniadis, A., J. Berruyer et R. Carmona. (1992). *Regression non linéaire et applications*, Paris, Economica.
- [2] Branston, D. (1975). Link capacity Functions : A Review. *Transportation Research*, Vol. 10, pp. 223-236.
- [3] Brown, R. G. (1962). *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*, New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [4] Cohen S. (1993). *Ingénierie du trafic routier : éléments de théorie du trafic et applications*. Presses de l'ENPC, Nouvelle édition. Paris.
- [5] Drake, J. S., J. L. Schofer et A. D. May (1967). A Statistical Analysis of Speed Density Hypothesis. *Highway Research Record*, 154, pp. 53-87.
- [6] Drew, D. R. (1968). *Traffic Flow Theory and Control*. New York : McGraw-Hill.
- [7] Duncan, N. C. (1979). A Further Look at Speed/Flow/Concentration. *Traffic Engineering and Control*, pp. 482-483.
- [8] Gazis, D. C., R. Herman et R. B. Potts (1959). Car Following Theory of Steady State Traffic Flow. *Operations Research* 7(4), pp.499-505.
- [9] Gerlough, D. L. et M. J. Huber (1975). *Traffic Flow Theory : a Monograph*. Rapport 165, Transportation Research Board, Washington DC : National Research Council.
- [10] Greenberg, H. (1959). An Analysis of Traffic Capacity. *Operation Research*, Vol 7, pp. 78-85.
- [11] Greenshields, B. D. (1935). A Study of Traffic Capacity. *Highway Research Board Proceedings* 14, pp. 448-477
- [12] Goldfeld, S. M. et R. E. Quandt. (1972), *Nonlinear Methods in Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.
- [13] Hall, F. L, V. F. Hurdle et J. H. Banks (1992). Synthesis of Recent Work on the Nature of Speed-Flow and Flow-Occupancy (Or Density) Relationships on Freeways. *Transportation Research Record* 1365, TRB, National research C Council, Washington, DC, pp. 12-18.
- [14] HCM, 1994, Special Report 209 : Highway Capacity Manual, Transportation Research Board. Washington D.C.
- [15] Leurent, F. (1991), Notes sur l'utilisation des modèles statiques d'affectation du trafic routier urbain, Mémoire de DEA Transport ENPC-Paris XII.
- [16] Marquart, D. W. (1963). An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters, *J. Soc. Inc. App. Math*, 2 :431-441.
- [17] Underwood, R. T. (1961). Speed, Volume and Density relationships : Quality and Theory of Traffic Flow. *Yale Bureau of Highway Traffic*, pp. 141-188.
- [18] Wardrop, J. G. et G. Charlesworth (1954). A Method of Estimating Speed and Flow of Traffic from a Moving Vehicle, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Partie II, Vol.3, pp. 158-171.

## Chapitre 2

# Estimation des paramètres de demande



## Introduction

La mise en œuvre d'un simulateur dynamique des déplacements requiert l'évaluation des paramètres comportementaux spécifiques à la région étudiée. En particulier, les estimations des paramètres dynamiques (coûts des délais et valeur du temps) et de la distribution des heures préférées d'arrivée sont nécessaires.

Dans le cadre du projet QUATUOR, nous avons projeté de mettre en œuvre une enquête comportementale spécifique à la composante horaire. Le projet, actuellement réalisé, a été mis en œuvre grâce au soutien de la plupart des opérateurs de transport franciliens (Predit 99MT30). Nous présentons dans cette partie, l'utilisation de la base de données dans le cadre du projet QUATUOR.

Nous présentons dans un premier temps les caractéristiques de l'enquête en précisant les étapes et la logique de réalisation, la population ciblée et les données recueillies. Nous en profitons pour donner des caractéristiques dynamiques des déplacements. Dans un deuxième temps, nous présentons les données d'arbitrage qui nous ont permis d'estimer les paramètres dynamiques. Après avoir présenté une batterie d'estimation, nous retenons trois sous-ensembles d'utilisateurs de la voiture pour lesquels nous indiquons les estimations. Enfin, nous déterminons le paramètre d'hétérogénéité des usagers dans leurs choix de l'heure de départ nécessaire à l'outil de simulation. Nous concluons par un ensemble de remarques et suggestions.

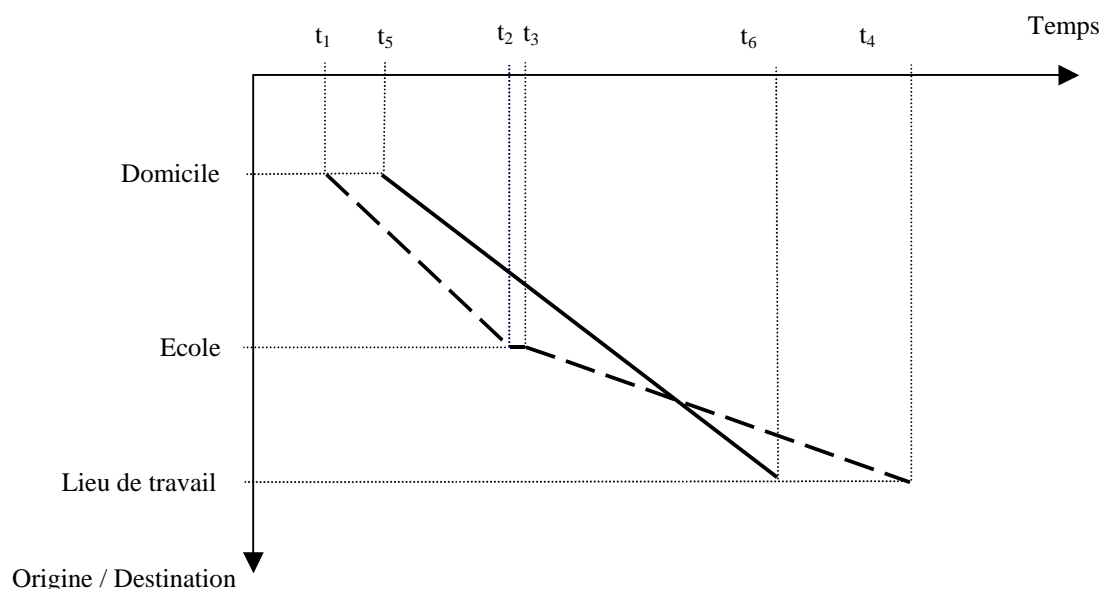
## 1. Caractéristiques de l'enquête

### 1.1. Généralités

Afin de déterminer les composantes horaires qui interviennent dans les comportements de déplacement des franciliens et par conséquent avant de mettre au point un questionnaire, nous nous sommes partiellement basés sur les enquêtes effectuées à l'étranger, sur le bon sens, mais également sur des groupes de discussion ("*Focus Group*") que nous avons animés. Les groupes de discussion sont utilisés en Marketing pour les études de marché. On recense quelques utilisations dans le cadre des analyses de la mobilité et des déplacements (voir par exemple Pagano, 1995, Sarwar, 1997). Cependant, à notre connaissance, le thème relatif à la dynamique et aux composantes horaires des déplacements n'a jamais été étudié à travers des groupes de discussion. Notons que leur mise en œuvre est conseillée dans la préparation des questionnaires surtout lorsque le thème abordé est nouveau. Les quatre groupes que nous avons animés comptaient de 6 à 8 personnes, du personnel universitaire, des enseignants chercheurs et des étudiants utilisant différents modes de transports et de lieux de résidence divers.

A travers la réalisation de ces groupes de discussion, nous avons pu identifier des variables à caractère dynamique qui interviennent dans les choix de déplacement. Par conséquent, cette tâche nous a permis d'introduire dans le questionnaire des éléments qui ressortent dans l'analyse (voir plus loin). En particulier, les groupes de discussion nous ont permis de nous rendre compte des difficultés qu'engendre le chaînage des activités dans l'analyse de la composante horaire. Par conséquent, nous avons pris soin d'identifier soigneusement les

déplacements à considérer dans cette étude. En effet, la difficulté de sélection d'un individu et de son déplacement réside principalement dans le choix de la destination. Comment définir la pertinence d'une destination ou d'un arrêt ? Pour comprendre la problématique, considérons un individu quittant son domicile en  $t_1$  et arrivant à son lieu de travail en  $t_4$  (figure 1, tracé discontinu). En cours de route, il dépose en  $t_2$  ses enfants à l'école et repart en  $t_3$  vers son lieu de travail ( $t_3=t_2+5$ minutes). Quant il se rend directement à son lieu de travail, il part plus tard en  $t_5$ , prend un autre itinéraire et arrive en  $t_6$  (tracé continu).



**Figure 1 : Exemple d'arrêt en cours de déplacement**

Une étude basée sur des arbitrages entre des couples d'heures de départ et d'heures d'arrivée doit être effectuée sur des déplacements directs<sup>1</sup>. En effet, si nous nous intéressons au déplacement entre le domicile et le lieu de travail en incluant l'arrêt à l'école et que nous proposons à l'individu une heure de départ plus tardive, il risque de se placer dans le cas de son déplacement direct (annulation de l'arrêt à l'école). Nous commettrions une grave erreur en comparant deux déplacements n'ayant pas le même motif.

Cet exemple se généralise à toutes les chaînes de déplacements et nous devons prendre en compte qu'une modification de l'heure de départ ou d'arrivée entraîne des changements dans cette chaîne. Par conséquent, dans le cadre de l'enquête mise en œuvre et pour cet exemple, nous concentrons notre analyse sur le déplacement entre le domicile et l'école pour motif d'accompagnement.

Cependant, nous devons imposer des règles strictes afin de ne pas sélectionner des destinations qui correspondraient à des déplacements "sans importance". Il est primordial de distinguer un arrêt d'une minute en cours de route, par exemple chez un libraire pour acheter un journal, d'un arrêt qui nécessite un détour de 15 minutes pour aller, par exemple, au pressing qui n'ouvre qu'à 9h. Par conséquent, nous avons imposé trois règles sur la nature des arrêts. Si l'interviewé répond avoir effectué un arrêt au cours du déplacement, nous

<sup>1</sup> Par exemple entre le domicile quitté à  $t_5$  et le lieu de travail atteint à  $t_6$ .

considérons cet arrêt comme la nouvelle destination de ce déplacement dans le cas où l'un des trois critères suivants serait satisfait :

- L'arrêt influence l'heure de départ de plus de 10 minutes.
- L'arrêt dure plus de 10 minutes.
- L'arrêt nécessite un détour augmentant le temps de trajet de plus de 10 minutes.

L'analyse de la composante horaire des déplacements nécessite suffisamment de flexibilité dans les options de choix. Ces options de choix dépendent de l'ampleur des plages horaires des heures de départ et d'arrivée mais également des possibilités de variations du temps de trajet. Ce dernier devant être suffisamment élevé pour pouvoir être modifié. En effet, considérons un individu partant à 8h et arrivant avec 5 minutes d'avance à 8h10<sup>2</sup>. Quelle serait la cohérence d'un arbitrage entre cette situation et le choix d'arriver à l'heure mais en mettant 12 minutes<sup>3</sup> ? Dans ce cas, l'écart entre les deux temps de trajet est trop faible (2 minutes) et par conséquent difficilement perceptible par les individus. De plus, il faudrait que les usagers connaissent parfaitement leurs horaires à la minute près. Nous refusons d'imposer ces hypothèses. Nous suggérons que les temps de trajet de plus de 15 minutes accordent suffisamment de flexibilité pour proposer des arbitrages cohérents (voir de Palma et Fontan, 2000-b). Nous décidons de borner notre analyse aux déplacements dont les temps de trajet sont supérieurs à 15 minutes.

Une fois que nous avons déterminé le type de déplacement à étudier, le questionnaire a pu être mis au point. Après de nombreux prétests en face à face et téléphoniques, le questionnaire final comporte six sections. La première concerne une description des déplacements de la matinée avec une sélection du déplacement retenu pour la suite du questionnaire. La deuxième section collecte les caractéristiques de ce déplacement, d'une part les caractéristiques horaires avec des scénarios d'arbitrages entre des heures de départ et d'arrivée (voir la section 1.3.) et d'autre part les caractéristiques des modes utilisés. La troisième section renseigne sur l'utilisation éventuelle d'information sur les conditions de circulation et sur la connaissance du réseau emprunté (routier ou ferré). Au cours de la quatrième section, nous plaçons l'individu dans trois situations hypothétiques : modification de l'heure de départ, utilisation d'un mode de remplacement et information reçue avant le départ sur une augmentation du temps de trajet. Les caractéristiques individuelles et familiales sont récoltées dans une cinquième section. Nous terminons par une expérience de loterie sur les temps de trajet qui devrait permettre de déterminer le niveau d'aversion au risque des individus face aux variations du temps de trajet.

L'administration du questionnaire a été effectuée par téléphone et assistée par ordinateur (CATI effectué par la SOFRES). L'assistance informatique présente de nombreux avantages dans le contexte spécifique à l'étude de la composante horaire. Par exemple, elle permet de générer des variables aléatoires utilisées dans les questions, ce qui améliore la qualité des calculs statistiques et des estimations économétriques (voir de Palma et Fontan, 2000-b). Par ailleurs, les calculs complexes nécessaires au traitement de la composante horaire sont rendus possibles. L'assistance informatique permet également de personnaliser facilement les questions, c'est à dire d'interroger les individus en fonction des réponses qu'ils ont apportées précédemment. Notons enfin que l'encodage des questionnaires informatisés est automatique ce qui représente un gain de temps et permet d'éviter les erreurs de saisie.

---

<sup>2</sup> Le retard est calculé par rapport à l'heure préférée d'arrivée (voir la partie 3).

<sup>3</sup> Ce calcul repose sur une formulation linéaire des coûts (voir la partie 3). Le coût d'arriver en avance ( $\beta/\alpha$ ) est fixé arbitrairement à 0,4.

Les interviews téléphoniques se sont déroulées durant les mois de mai et juin 2000, entre 17h et 20h du lundi au vendredi et ont porté sur les déplacements réalisés le matin même. Des questionnaires ont également été soumis le samedi matin et adaptés aux déplacements effectués le vendredi matin. Au total, 4230 personnes ont été interrogées. Notons que les interviewés ont été choisis de manière à ce que la distribution de la population francilienne entre les départements de résidence soit respectée. En effet, les caractéristiques des déplacements (distance, modes utilisés, motif, etc.) diffèrent en fonction de la localisation géographique de l'origine : grande couronne, petite couronne ou Paris mais également entre les départements. Suite à la recherche de cible décrite précédemment, notre échantillon inclue une majorité de déplacements liés au travail (67%), les motifs liés aux achats composent 9 % de l'échantillon et les motifs liés à l'école et aux études comptent 8% des interviewés. La part modale des transports en commun est de 45% (55% pour les véhicules particuliers). Ces chiffres sont dans les ordres de grandeurs de l'EGT pour les déplacements relatifs au matin.

La part des individus effectuant exclusivement **un seul départ du domicile** dans la matinée est largement majoritaire avec 97% de l'échantillon. Ce résultat montre que l'analyse des déplacements dont l'origine est le domicile est aisée en raison de l'unicité individuelle. Un déplacement sur 8 seulement est contraint par un arrêt, ce qui de nouveau justifie les choix effectués sur le contexte étudié. De plus, pour ce sous échantillon, 2 individus sur 3 ont révélés un arrêt de moins de 10 minutes.

A la section suivante, nous proposons une analyse des caractéristiques horaires générales (principalement les contraintes à l'origine ou à la destination), des rapports entre les horaires et les modes de transport utilisés ainsi que des variables clés servant à l'étude des choix des heures de départ.

## 1.2. Quelques spécificités horaires des déplacements des franciliens

L'enquête MADDIF a permis de récolter une quantité importante d'informations sur la composante horaire des déplacements des franciliens. Dans cette partie, nous donnons, dans un premier temps, des éléments d'information sur les contraintes horaires liées aux caractéristiques individuelles ou contextuelles (motif du déplacement, modes utilisés, etc.). Dans un deuxième temps, nous analysons les préférences des individus en terme d'heure d'arrivée.

### *CARACTERISTIQUES GENERALES*

On distinguera les contraintes au domicile (liées à l'interviewé et à son ménage) et les contraintes à l'arrivée (liées au motif du déplacement). Seulement **13%** des individus interrogés déclarent subir des contraintes à leur domicile qui les empêchent de modifier leur heure de départ. Ce résultat nous indique qu'une importante majorité des franciliens dispose à l'origine du déplacement d'une flexibilité non nulle de leurs heures de départ. Notons que les contraintes au domicile concernent d'avantage les femmes (69% des individus contraints). La plupart doivent s'occuper d'enfants comme l'indique le tableau 1.

**Tableau 1 : Nature des contraintes au domicile pour chaque sexe**

Contraintes	Hommes	Femmes
Vous deviez vous occuper d'enfants	65%	75%
Vous deviez attendre quelqu'un	17%	16%
Autres	18%	9%
<i>Total</i>	<i>100 %</i>	<i>100 %</i>

Cependant, lorsqu'elles existent, les contraintes au domicile s'avèrent très rigides puisque **81%** des individus contraints n'avaient pas la possibilité d'annuler la(les) contrainte(s) le jour même. Dans ce contexte, en s'arrangeant au mieux avec leurs contraintes, les interrogés disposent des amplitudes de départ suivantes :

**Tableau 2 : Amplitudes horaires au domicile pour les individus contraints**

Amplitudes horaires au départ (min)	Part des individus ayant une contrainte au domicile (%)
]0 – 15]	29,5
]15 – 30]	31,7
]30 – 45]	9,5
]45 – 60]	10,9
]60 – 90]	7,9
Plus de 90	10,5

Ces résultats confirment que pour la plupart des individus qui révèlent des contraintes au domicile, ces dernières vont entraîner des rigidités dans les choix des heures de départ en limitant fortement les ensembles de choix.

Notons que les individus contraints partent en moyenne sensiblement plus tard que les autres (8h36 contre 8h14) et qu'en toute cohérence ils effectuent davantage de déplacements pour des motifs de services passagers (les motifs travail et achat restent toutefois les principaux à l'image de l'échantillon total).

En ce qui concerne les contraintes à la destination, plus de la moitié de l'échantillon (55%) est composée d'individus qui déclarent avoir une **heure officielle d'arrivée**. Cette composante correspond aux heures de travail, aux rendez-vous chez le médecin, à l'heure d'une réunion, etc. Les heures officielles d'arrivée concernent en majorité les déplacements pour motifs médicaux, études, service passager et travail. Le tableau 3 montre, en effet, que la part des individus qui présentent une heure officielle d'arrivée varie nettement entre les deux groupes de motifs : "obligés" et "non obligés".

**Tableau 3 : Parts des individus qui ont une heure officielle d'arrivée pour chaque motif**

	Motifs	Part de ceux qui ont une heure officielle d'arrivée (%)
Motifs Obligés	Rendez-vous médical	92
	Ecole – Etudes	75
	Chercher/déposer quelqu'un	69
	Travail, RDV professionnel	62
Motifs Non obligés	Loisir	43
	Personnel / administratif	35
	Visite à quelqu'un	30
	Achats, courses	6

Les motifs dits « obligés » regroupent les déplacements qui seront les plus sensibles aux délais à l'arrivée. Ces motifs reportent bien évidemment plus souvent l'existence d'une heure officielle d'arrivée. Notons que le motif "chercher/déposer quelqu'un" constitue un seul et même ensemble communément appelé "service passager". On constate que les individus qui ont une heure officielle à la destination :

- arrivent 34 minutes plus tôt que les autres (ceux qui n'ont pas d'heure officielle).
- arrivent 8 minutes plus tôt que leurs heures officielles.

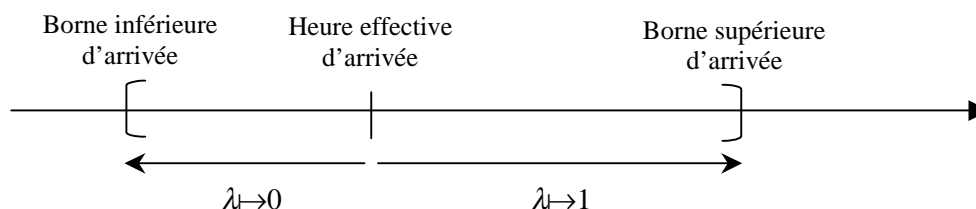
Par conséquent, on peut en déduire que l'existence d'une heure officielle d'arrivée contraint globalement les individus à se déplacer plus tôt.

Parmi ceux qui ne déclarent pas avoir d'heure officielle d'arrivée, certains disposent d'une plage horaire officielle d'arrivée (3%) pour des motifs principalement liés au travail. Cette plage horaire moyenne vaut **37 minutes**, ce qui correspond déjà à une flexibilité importante.

La flexibilité à l'arrivée peut également être évaluée à partir d'une plage horaire d'arrivée que nous qualifions de "plage de tolérance". En effet, chaque individu présente un intervalle d'heures d'arrivées tolérables en fonction des caractéristiques qui lui sont propres et de celles de son déplacement. Par exemple, une personne ayant un rendez-vous professionnel important ne pourra pas concevoir d'y arriver avec une heure de retard ou une personne allant faire des courses ne peut s'imaginer arriver une heure avant l'ouverture. Par conséquent, nous avons demandé à chaque interviewé de révéler ses bornes d'heures d'arrivées tolérables. Une très forte majorité des individus (92%) révèle l'existence de telles bornes. L'intervalle des heures d'arrivées tolérables (définis comme la différence entre les bornes supérieures et inférieures) moyen s'élève à **73 minutes** et l'intervalle médian à **50 minutes**. Par conséquent, les usagers présentent dans l'ensemble une flexibilité importante à l'arrivée. Il est intéressant d'observer la position de l'heure effective d'arrivée dans l'intervalle des heures d'arrivées tolérables. On propose le rapport suivant :

$$\lambda = \frac{\text{Heure effective d'arrivée} - \text{Borne inférieure d'arrivée}}{\text{Borne supérieure d'arrivée} - \text{Borne inférieure d'arrivée}}$$

Si  $\lambda$  est proche de 0 alors l'utilisateur a plus de marge pour arriver après l'heure effective, si  $\lambda$  est proche de 1 alors l'utilisateur a plus de marge pour arriver avant l'heure effective, comme l'indique le schéma suivant :



La moyenne et la médiane de ce rapport valent **0,44**, soit une tendance à une marge plus importante après l'heure effective d'arrivée. On peut également interpréter ce coefficient comme une marge de sécurité avant d'atteindre la borne supérieure, c'est-à-dire de subir un retard très important ("intolérable"). Le tableau 4 présente la valeur de  $\lambda$  pour chaque motif.

**Tableau 4 : Paramètre de position de l'heure d'arrivée par rapport aux bornes d'arrivées tolérables**

Motifs	Valeur moyenne de $\lambda$
Visite à quelqu'un	0,46
Travail, RDV professionnel	0,45
Chercher/déposer quelqu'un	0,44
Loisir	0,44
Personnel / administratif	0,44
Achats, courses	0,44
Ecole - Etudes	0,43
Rendez-vous médical	0,40

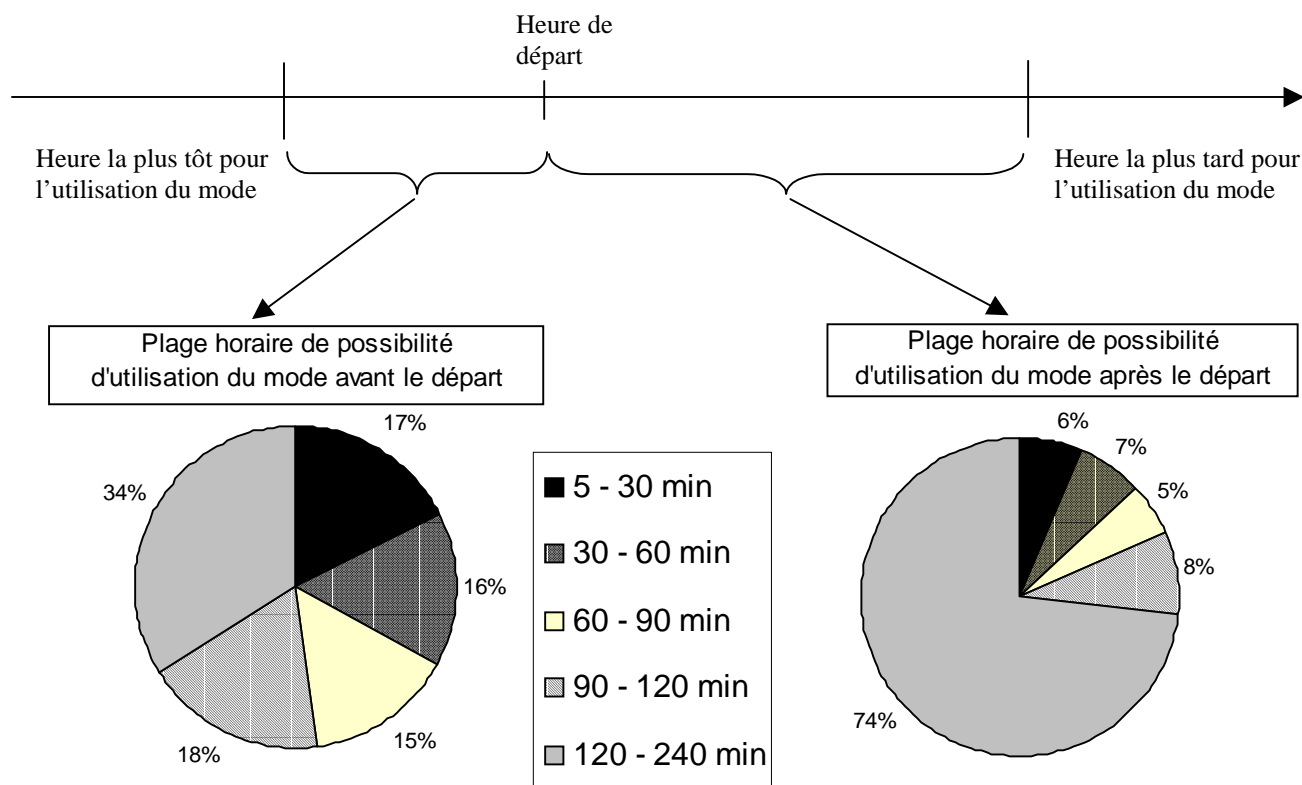
Tous les motifs présentent une tendance à une plus grande marge de sécurité après l'heure effective d'arrivée, le motif qui présente le plus cette caractéristique est celui pour rendez-vous médical. Par conséquent, les individus qui se déplacent pour un rendez-vous médical ont davantage tendance à prendre leurs précautions pour ne pas arriver à une heure qu'ils jugent intolérablement tardive.

### **LES MODES DE TRANSPORT**

Le mode de transport utilisé peut également représenter une contrainte en terme d'heure de déplacement. Pour évaluer ce type de contrainte, nous qualifions de "plage horaire de possibilité d'utilisation d'un mode", l'intervalle de temps durant lequel l'individu peut, en fonction de ses contraintes, utiliser le mode<sup>4</sup>. L'échantillon compte 10% d'individus qui présentent une telle plage horaire. Nous l'avons décomposée en deux plages, l'une située

<sup>4</sup> Il s'agit du mode dit principal, c'est à dire celui de la chaîne modale dont le temps de trajet est le plus long. Notons que la contrainte d'utilisation porte sur les heures de départ.

avant l'heure effective de départ et l'autre située après l'heure effective de départ. La figure 2 représente schématiquement ces deux plages horaires ainsi que les parts de leurs amplitudes. Par exemple, 17% des individus n'utiliseraient pas le même mode s'ils devaient partir entre 5 et 30 minutes plus tôt. De même, 6% des individus n'utiliseraient pas le même mode s'ils devaient partir entre 5 et 30 minutes plus tard.



**Figure 2 : Plage horaire de possibilité d'utilisation du mode avant et après l'heure de départ**

On constate que les 4 premières tranches ont des effectifs 2 à 3 fois plus importants pour les départs avancés que pour les départs retardés (5-30, 30-60, 60-90 et 90-120). Par rapport à la cinquième tranche, on peut dire que **l'avancée de plus de 2 heures** du départ n'est possible que pour 1 individu sur 3 (en raison de contraintes imposées par le mode utilisé) alors que **le recul** du départ de **plus de 2 heures** est possible pour 3 individus sur 4. Nous concluons en affirmant que l'utilisation des modes est contrainte en particulier par les départs avancés.

Nous avons cherché si ces figures se différençaient entre les transports en commun (TC) et la voiture particulière (VP), nous n'avons pas reporté ces graphiques qui ne font apparaître aucune différence majeure. En ce qui concerne la désagrégation par motif, on retiendra que les individus qui se déplacent pour des motifs liés au travail annoncent manquer de flexibilité en terme d'heure de départ en raison de contraintes propres au mode de transport utilisé.



La notion de "plage horaire de possibilité d'utilisation d'un mode" défini précédemment n'est pas introduite dans les études de choix modal qui n'incluent pas non plus les décisions relatives aux heures de départ. Dans la suite, nous montrons que le changement de mode de transport principal entraîne également un changement d'heure de départ.

Si nous nous intéressons aux modes de transport alternatifs de ceux effectivement utilisés, on notera que **39%** des individus n'aurait pas pu emprunter un autre mode. Parmi ceux-ci, plus de 2 sur 3 ont répondu que le mode utilisé est le seul qui existe (à leur connaissance) pour aller à leur destination. Pour les autres, les raisons avancées sont principalement liées aux contraintes horaires<sup>5</sup> (tableau 5).

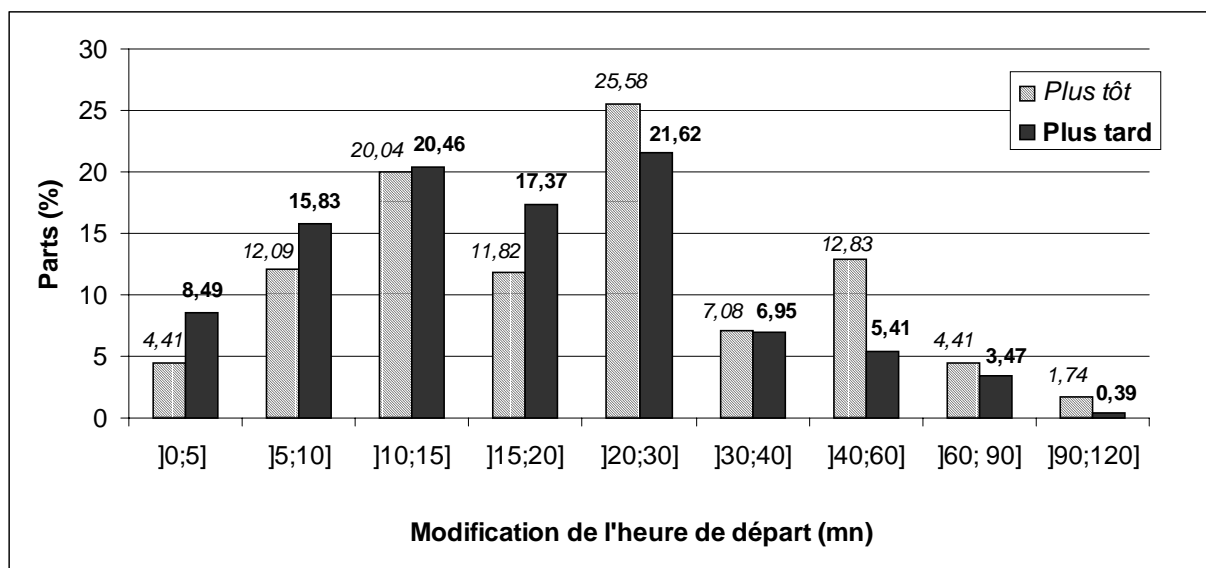
**Tableau 5 : Réponses apportées sur l'absence de mode alternatif**

Le mode principal que vous avez utilisé est le seul ...	OUI	NON
... qui vous permette de respecter vos contraintes horaires	<b>73%</b>	27%
... qui vous permette d'effectuer les activités de la journée	<b>63%</b>	37%
... qui vous offre le plus de flexibilité pour vous adapter aux imprévus	<b>81%</b>	19%

Par conséquent, **les contraintes horaires** permettent d'expliquer l'absence de choix d'un autre mode. Ce résultat suggère qu'une étude sur le choix modal, et en particulier sur les captifs d'un mode, ne doit pas négliger la composante horaire.

Dans le cas où les individus devraient utiliser leur mode de remplacement, **71%** d'entre eux devraient également changer leur heure de départ. Notons qu'ils sont aussi bien usagers des transports en commun (56%) qu'usager de la voiture particulière (44%). Parmi ceux qui savent à quelle heure partir avec le mode alternatif, 83% partiraient plus tôt. L'ampleur de ces changements est représentée sur la figure 3.

<sup>5</sup> Plusieurs de ces raisons peuvent être cumulées, par exemple le mode utilisé peut être le seul qui permettent de respecter les contraintes horaires de l'individu (raison 1) ainsi que de lui permettre une plus grande flexibilité (raison 3).



**Figure 3 : Parts des modifications des heures de départ suite au changement du mode de transport principal**

On peut constater que le changement de mode entraîne d'importantes modifications de l'heure de départ ; un départ sur quatre serait avancé de plus de 30 minutes et un départ sur six serait retardé de plus de 30 minutes. Les médianes des départs avancés et retardés sont de **20 minutes**, les moyennes valent respectivement 22 et 24 minutes.

Il n'existe pas de différence importante entre les modifications des heures de départ effectuées par les usagers des TC et VP séparément<sup>6</sup>. Notons seulement que les départs avancés de plus de 30 minutes sont plus fréquents pour les changements vers un mode TC que vers un mode VP (31% contre 22%) alors que les départs retardés de plus de 30 minutes sont plus fréquents pour les changements vers un mode VP que vers un mode TC (18% contre 14%). La voiture particulière semble par conséquent moins contraignante d'un point de vue des horaires de départ puisqu'elle permettrait aux usagers des transports en commun de partir plus tard alors que les transports en commun semblent contraignants pour les usagers de la voiture particulière qui devraient partir nettement plus tôt s'ils utilisaient les transports en commun.

Ces résultats montrent que les changements de mode de transport sont intimement liés aux changements des heures de départ. Par conséquent, si le changement de l'heure de départ représente une pénalité au départ ou à l'arrivée, celui-ci ne doit pas être négligé dans les analyses du choix de mode de transport.

Afin de calculer les pénalités à l'arrivée, il est nécessaire de pouvoir comparer l'heure d'arrivée effective avec une heure préférée par l'individu. C'est-à-dire une heure par rapport à laquelle l'individu supportera une pénalité s'il arrive en avance ou en retard. Nous discutons dans la suite, des différentes interprétations apportées à cette heure de référence.

<sup>6</sup> Données disponibles auprès des auteurs.

### LES NOTIONS D'HEURES DE REFERENCES

Différentes définitions ont été proposées pour l'heure de référence qui permet de calculer les délais à l'arrivée. La première application recensée (Cosslett, 1977) utilise "l'heure d'arrivée au travail **la plus tard possible sans pénalité**". Cependant, le terme de pénalité n'est pas clairement défini. Abkowitz (1980) et Small (1982) ont utilisé les heures **officielles** de début du travail pour des déplacements du domicile vers le lieu de travail. L'inconvénient majeur de cette définition est qu'elle ne s'applique qu'au déplacement lié au travail et pour des individus ayant des horaires fixés. Cette variable ne peut donc être utilisée dans une étude relative à tous les motifs de déplacement. De plus, elle ne permet pas de prendre en compte les réelles préférences des individus comme le temps nécessaire pour se préparer ou prendre un café à la destination. Dans Mannering (1989) et Noland et Small (1995) c'est l'heure **habituelle** d'arrivée qui est utilisée. Dans divers cas, l'heure habituelle d'arrivée n'est pas un bon indicateur des préférences. Par exemple, les usagers des transports en commun ne peuvent pas choisir précisément leur heure d'arrivée, par conséquent leur heure d'arrivée habituelle ne correspond pas à l'heure à laquelle ils souhaiteraient réellement arriver.

Wang (1996) a introduit la notion d'heures **planifiées** qui sont considérées comme des heures attendues dans un planning prédéfini d'activités. L'heure d'arrivée planifiée avant le départ pose un problème dans le cas des usagers des transports en commun, au même titre que l'heure habituelle, cette heure ne correspond pas forcément à l'heure préférée par l'individu. Les autres études (Hendrickson et Plank 1984, Mahamassani et Chang, 1986, Abu-Eisheh et Mannering 1988, Cascetta et al., 1992, de Palma et Rochat 1996, de Palma et al., 1997), définissent le délai à l'arrivée comme la différence entre l'heure d'arrivée effective au travail et l'heure d'arrivée **préférée** ou **désirée**.

Ces deux notions sont parfois confondues dans la littérature. Les individus qui effectuent un déplacement ont généralement en tête un temps de trajet espéré qu'ils soustraient à leur heure d'arrivée désirée pour déterminer l'heure à laquelle il devrait partir tout en considérant une certaine marge de sécurité. L'amplitude de cette marge dépend de la variabilité du temps de trajet et du niveau du coût des arrivées précoces et tardives. Dans ce contexte, l'heure **désirée** est le résultat d'un choix et ne correspond pas nécessairement à l'heure préférée. Sous certaines contraintes, les individus peuvent changer leur heure d'arrivée désirée dans le processus de choix d'heure de départ (Ben-Akiva, 1999).

Même si la distinction précédente entre les termes "désirée" et "préférée" est sensible, nous avons préféré lever toute ambiguïté et avons retenu la notion d'heure **préférée** d'arrivée. De plus, nous nous devons de la définir très clairement. En effet, l'heure préférée peut ne pas appartenir à l'ensemble des possibles<sup>7</sup>. Considérons l'exemple d'un actif qui se déplace de son domicile vers son lieu de travail et qui présente les contraintes suivantes :

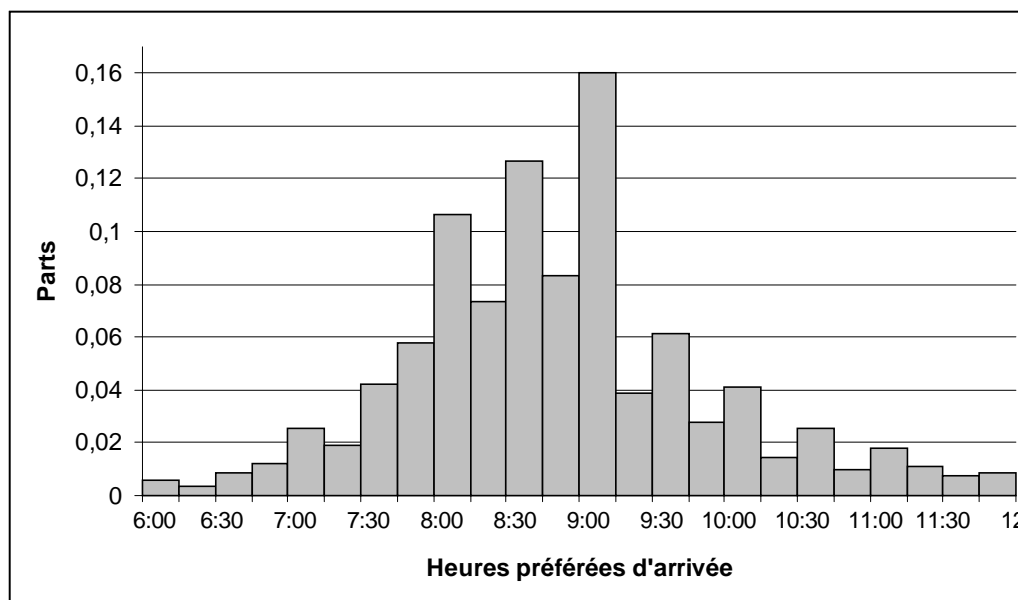
- Impossibilité d'arriver avant 8h (heure d'ouverture du bâtiment)
- Impossibilité d'arriver après 9h (heure du début d'une réunion)

A la question : *A quelle heure préférez-vous arriver* l'interviewé pourrait répondre 10h car il ne tient pas compte de ses contraintes à la destination. Ainsi, si l'on utilise le terme d'heure préférée, il est nécessaire de placer l'interviewé dans le contexte contraint. Par conséquent, après avoir demandé l'heure d'arrivée la plus précoce et l'heure d'arrivée la plus tardive

<sup>7</sup> Intervalle des heures entre lesquelles l'individu peut réellement arriver.

possible, nous demandons l'heure préférée d'arrivée tout en s'assurant qu'elle appartient à l'intervalle précédent. Cette notion d'heure préférée d'arrivée comprise dans l'intervalle des possibles pour l'heure d'arrivée a été introduite par Emmerink et Van Beek (1997).

La figure 4 présente les heures préférées pour l'ensemble des motifs.



**Figure 4 : Distribution des heures préférées d'arrivée par intervalle de 15 minutes**

On constate que les heures pleines et les demi-heures (7h, 7h30, 8h, etc.) ont une fréquence plus élevée. Deux explications peuvent être apportées. Soit les individus ont réellement tendance à préférer arriver à ces heures, soit ils arrondissent leurs réponses à l'heure ou à la demi-heure la plus proche. Notons que nous avons constaté que près d'un tiers des interviewés ont corrigé leurs réponses sur leurs heures d'arrivée, avec pour la plupart, une précision de moins de 5 minutes ce qui prouve une considération des interviewés à reporter en général des heures précises. Nous présentons à la section 2 diverses estimations des distributions.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les heures préférées d'arrivée permettent de calculer les délais encourus aux heures effectives d'arrivée : « délai = heure préférée d'arrivée - heure effective d'arrivée ». Le tableau 6 indique les délais moyens en minutes en fonction des motifs de déplacement et du type de mode utilisé. On constate que les écoliers et les étudiants présentent les délais les plus faibles et arrivent plus souvent en avance que les autres types d'utilisateurs (29,1%).

**Tableau 6 : Délais à l'arrivée par motif et par type de mode**

	Part des arrivées...			Délais en minutes Moyennes (écarts-types)	
	à l'heure	en avance	en retard	Avance	Retard
Domicile – Travail	29,1%	23,4%	47,5%	21,9 (29,6)	21,0 (20,7)
Ecole – Etudes	28,0%	29,1%	42,9%	16,5 (25,0)	16,4 (20,7)
Achat	30,6%	14,8%	54,6%	20,9 (19,3)	47,0 (37,3)
Autres	32,6%	21,4%	46,0%	23,2 (24,4)	20,5 (22,1)
<b>Tout motif – tout mode</b>	<b>29,4%</b>	<b>23,4%</b>	<b>47,2%</b>	<b>21,4 (28,4)</b>	<b>22,0 (23,0)</b>
VP	52,7%	21,5%	25,8%	20,4 (26,1)	23,0 (32,0)
TC	5,7%	49,1%	45,2%	23,5 (32,0)	21,0 (22,2)

Les usagers de la voiture particulière arrivent plus souvent en retard qu'en avance alors que les usagers des transports en commun arrivent plus souvent en avance qu'en retard. Il s'avère que près d'un usager de la voiture particulière sur deux annonce arriver à l'heure, alors que les usagers des transports en commun ne sont que 5 % à arriver à l'heure. Ce résultat peut provenir du fait que les usagers des transports en commun sont davantage sensibles aux heures d'arrivée en raison de la présence des horaires. En désagrégeant par sexe les motifs, on constate que pour les déplacements liés au travail, les femmes arrivent davantage après leurs heures préférées d'arrivée, cette tendance s'inverse pour les déplacements liés à l'école et aux études.

Parmi les individus qui ont déclaré ne pas avoir d'heure préférée d'arrivée, 20% présentent une plage horaire d'arrivées préférées (soit 392 interviewés). Pour les motifs liés au travail, les plages horaires d'arrivées préférées sont en majorité de 30 minutes (tableau 7).

**Tableau 7 : Répartition des tailles des plages horaires d'arrivées préférées**

Taille de la plage horaire (mn)	Parts (%)
5	4,7
10	6,7
15 - 20	22,8
30	42,9
45 - 60	20,5
75 - 90	2,4
<i>Total</i>	<i>100</i>

Qu'en est-il de l'évaluation monétaire de ces délais ? Il existe de nombreuses données et méthodes pour l'évaluation monétaire du temps passé dans le véhicule (voir par exemple de Palma et Fontan 2000-a) mais jusqu'à aujourd'hui aucune information n'était disponible pour estimer les coûts monétaires des délais. La présente enquête comportait une section relative à des arbitrages sur les heures de départ et d'arrivées qui permettent l'estimations de ces coûts. Nous présentons cette partie du questionnaire dans la suite.

### 1.3. La section d'arbitrages

Le temps étant continu par nature, chaque usager est face à une infinité de choix d'heures de départ appartenant à l'ensemble des heures de départ acceptables. Conformément au modèle de Vickrey, le processus de choix de l'heure de départ le plus simple est binaire. Par conséquent, nous avons proposé à chaque interviewé des paires d'heures de départ associées à des paires de temps de trajet (c'est à dire des paires d'heures d'arrivées).

Les deux options sont définies de la façon suivante :

**Option 1.** Le même déplacement, tel qu'il est observé, caractérisé par l'heure de départ reportée,  $t_d^R$ , le temps de trajet reporté,  $tt^R$ , et l'heure d'arrivée reportée,  $t_a^R$  (l'indice  $R$  correspond aux caractéristiques reportées).

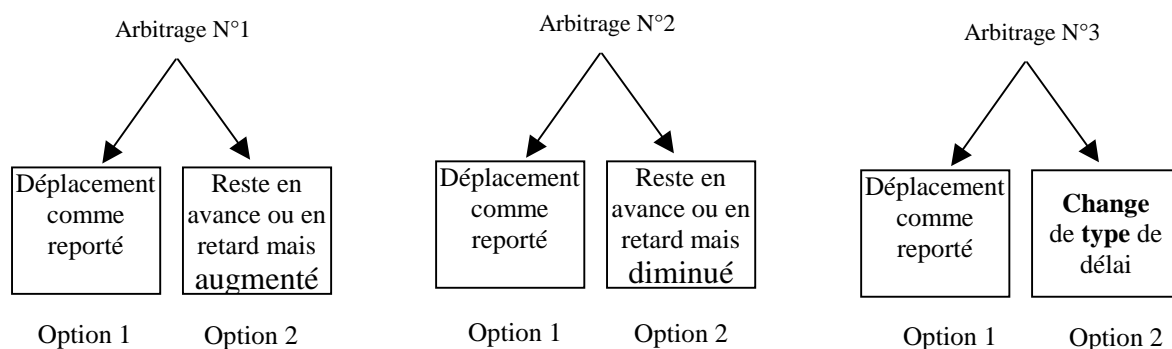
**Option 2.** Un déplacement hypothétique (simulé), caractérisé par l'heure de départ,  $t_d^S$ , le temps de trajet,  $tt^S$ , et l'heure d'arrivée  $t_a^S$  (l'indice  $S$  correspond aux caractéristiques simulées).

Nous proposons jusqu'à trois arbitrages à chaque interviewé (si ses contraintes horaires permettent l'existence d'heures de départ et d'arrivée alternatives). Les trois options simulées sont respectivement caractérisées par les délais suivants :

- Un délai de la même nature que le déplacement reporté (avance ou retard) mais **accentué**,
- Un délai de la même nature que le déplacement reporté (avance ou retard) mais **diminué**,
- Un délai de nature **opposé** au déplacement reporté.

Si l'arrivée du déplacement reporté est à l'heure, alors un scénario d'arrivée en avance et un scénario d'arrivée en retard sont proposés.

La Figure 5 représente les arbitrages :

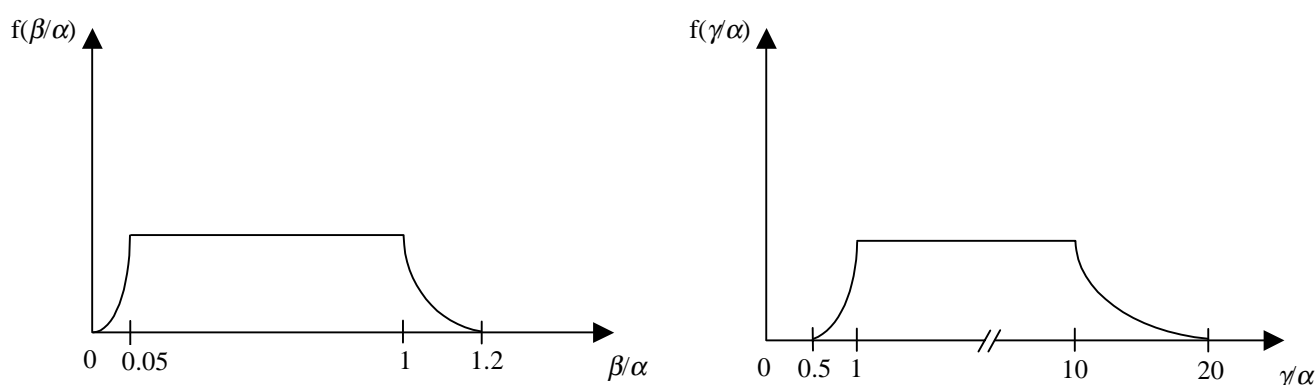


**Figure 5 : Arbitrages binaires**

Le calcul de l'option 2 est basé sur l'équivalence d'utilité entre l'option reportée et simulée. La procédure pour générer l'option 2 comprend les 4 étapes suivantes (la figure 7 représente ces 4 étapes).

### ETAPE 1. Tirages aléatoires des paramètres dynamiques

Les distributions des paramètres dynamiques reposent sur des lois uniformes dont les moyennes sont en accord avec les résultats fournis dans la littérature (voir par exemple Small, 1982) ( $\frac{\beta}{\alpha} = 0.5$  et  $\frac{\gamma}{\alpha} = 2.5$ ). Les bornes de l'intervalle de distribution uniforme ont été choisies pour que les tirages puissent correspondre à tous les types de motifs de déplacement. Les queues des distributions ont été modifiées dans le but de prendre en compte des comportements qui pourraient être irrationnels ( $\beta/\alpha > 1$ ,  $\gamma/\alpha < 1$  voir Arnott *et al.*, 1993). Nous fixons à 1% la probabilité de tirer les cas suivants :  $1 < \beta/\alpha < 1.2$  et  $0.5 < \gamma/\alpha < 1$ . Les deux distributions sont représentées sur la figure 6.



**Figure 6: Distributions des coûts unitaires de délai**

Les tirages aléatoires des paramètres dynamiques sont utilisés pour calculer le niveau des coûts des délais de la situation reportée,  $\hat{C}^R$  :

$$\hat{C}^R = C(t_d^R) = tt^R + \frac{\hat{\beta}}{\alpha} \max[t^* - t_d^R - tt^R, 0] + \frac{\hat{\gamma}}{\alpha} \max[t_d^R + tt^R - t^*, 0]$$

avec  $\frac{\hat{\beta}}{\alpha}$  et  $\frac{\hat{\gamma}}{\alpha}$  les valeurs des paramètres dynamiques tirées aléatoirement. Les variables  $tt^R$  et  $t_d^R$  sont observées (plus précisément reportées par l'interviewé), donc  $C^R$  peut être calculé.

### ETAPE 2. Calculs de l'intervalle des heures d'arrivée possibles pour l'option 2 qui respectent les points suivants :

2.1 Les valeurs des paramètres dynamiques sont égaux entre les cas reportés et simulés.

2.2 Les coûts des délais sont égaux entre l'option reportée et simulée.

2.3 Les trois contraintes suivantes sur les heures de départ, les temps de trajet et les heures d'arrivée doivent être respectées :

- Sur les heures de départ acceptables : nous respectons les contraintes horaires au domicile reportées par l'interviewé.
- Sur les variations des temps de trajet : les temps de trajet de l'option 2 ne peuvent pas être divisés ou multipliés par 2, ceci assure une option simulée réaliste.
- Sur l'exclusion des heures d'arrivée simulées (option 2) trop proches de l'heure d'arrivée reportée (option 1) (5 minutes avant et après) afin de garantir un minimum de différence entre les deux options.

A l'issue de cette étape, on dispose d'un intervalle d'heures d'arrivée alternatives (c'est à dire d'un ensemble d'heures d'arrivée possibles pour l'option simulée). Si cet intervalle n'existe pas (par exemple en raison d'une tolérance très faible de l'individu sur ses heures de départ) d'autres tirages des paramètres dynamiques sont effectués<sup>8</sup>.

#### ETAPE 3. Les heures d'arrivée simulées $t_a^S$

L'heure d'arrivée simulée est tirée aléatoirement dans l'intervalle calculé à l'étape 2. Notons que chaque heure d'arrivée dans cet intervalle peut être choisie avec équiprobabilité.

#### ETAPE 4. Les temps de trajets simulés $tt^S$

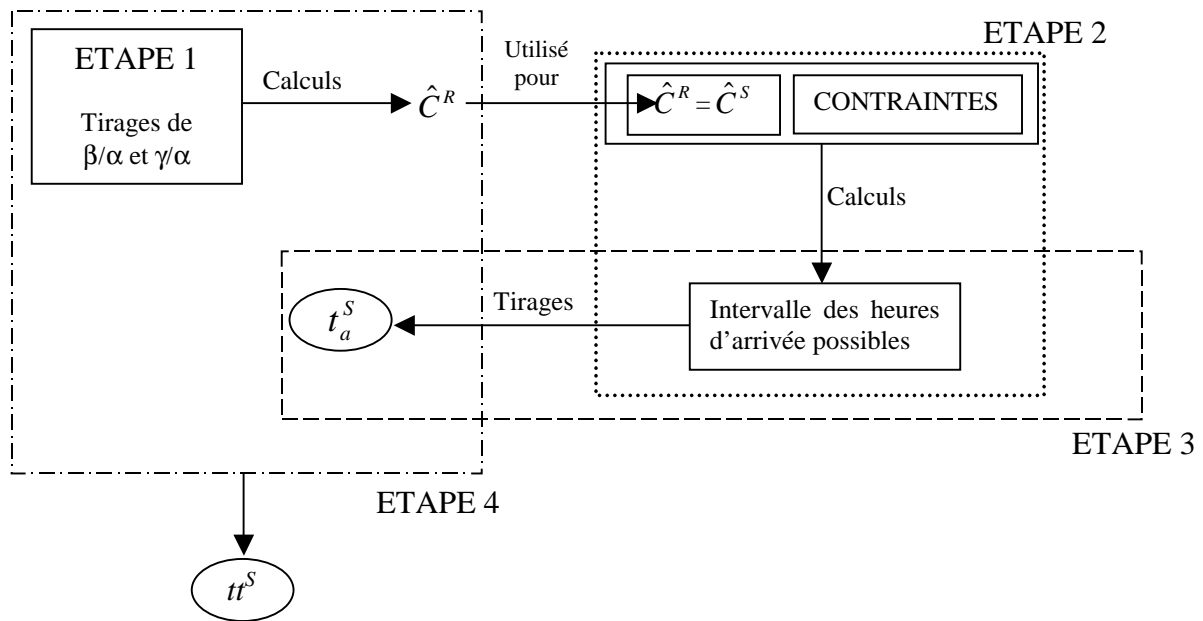
Nous utilisons les valeurs des tirages aléatoires des paramètres dynamiques et  $t_a^S$  afin de calculer les temps de trajet simulés,  $tt^S$ , à partir du principe d'équivalence (défini à l'ETAPE 2.2), nous obtenons :

$$tt^R + \frac{\hat{\beta}}{\alpha} \max[t^* - t_d^R - tt^R, 0] + \frac{\hat{\gamma}}{\alpha} \max[t_d^R + tt^R - t^*, 0] = tt^S + \frac{\hat{\beta}}{\alpha} \max[t^* - t_d^S - tt^S, 0] + \frac{\hat{\gamma}}{\alpha} \max[t_d^S + tt^S - t^*, 0]$$

avec  $tt^S$  la seule inconnue qui est donc issue de cette dernière étape. La figure 7 représente les quatre étapes.

<sup>8</sup> Les tirages aléatoires et les calculs de l'étape 2 demandent du temps, par conséquent le nombre de retirages a été limité à 10.





**Figure 7: Procédure de calcul de l'option 2**

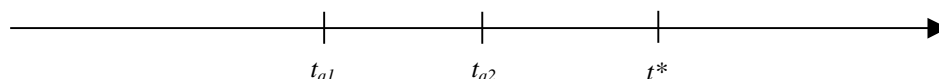
La procédure précédente génère une option simulée (l'option 2) définie par  $tt^S$  et  $t_a^S$  (et  $t_d^S$ ). L'option simulée est proposée comme une alternative au déplacement reporté. Les réponses à ces choix binaires sont présentées et utilisées dans la section 2 par les modèles de choix discrets pour estimer les paramètres dynamiques.

## 2. Estimations des paramètres dynamiques

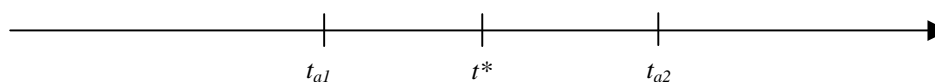
### 2.1. Utilisations des arbitrages

A partir des scénarios proposés aux individus (voir la section précédente), nous analysons dans cette section le choix entre deux arrivées associées à deux temps de trajet. Plus précisément, nous analysons les décisions de choix d'arriver en  $t_{a1}$  plutôt que d'arriver en  $t_{a2} = t_{a1} + x (x > 0)$ . C'est à dire arriver :

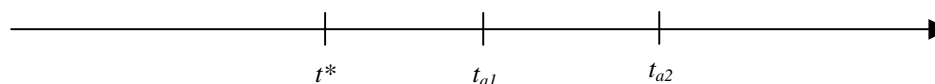
- soit très en avance ( $t_{a1}$ ) plutôt qu'un peu en avance ( $t_{a2}$ )



- soit en avance ( $t_{a1}$ ) plutôt qu'en retard ( $t_{a2}$ )



- soit un peu en retard ( $t_{a1}$ ) plutôt que très en retard ( $t_{a2}$ )



Au total, la base de données comprend 3195 réponses aux scénarios de ce type. Cependant, en raison des contraintes horaires des individus, une part importante de ceux-ci n'a que très peu de flexibilité et peut difficilement concevoir d'arriver avec trop de retard. Par conséquent, les scénarios d'arrivée en retard ne comptent que 11.4 % des réponses. En particulier, ceux qui arrivent en avance ne se voient pas proposer de scénarios en retard en raison d'un manque de flexibilité de leurs horaires.

Le tableau 8 recense les différents cas inclus dans la base de données.

**Tableau 8 : Effectifs des scénarios**

<b>SP</b>	<b>RP</b>	<b>Avance</b>	<b>A l'heure</b>	<b>En retard</b>	<b>Total</b>
<b>Avance</b>		514	1958	242	27 14
<b>A l'heure</b>		56	0	60	116
<b>En retard</b>		0	283	82	36 5
<b>Total</b>		5 7 0	6 4 5	3 8 4	3 1 9 5

Nous indiquons les délais minimaux, maximaux et **moyens** de chacun des arbitrages dans le tableau 9. Par exemple, la première cellule indique que ceux qui étaient déjà en avance (entre 2 et 145 minutes et en moyenne de 20 minutes) ont reçu des scénarios en avance en moyenne de 24 minutes (et de 1 à 173 minutes).

**Tableau 9 : Caractéristiques globales des scénarios**

<b>SP</b>	<b>RP</b>	<b>Avance</b>	<b>A l'heure</b>	<b>En retard</b>	<b>Total</b>
<b>Avance</b>		[2;145;20] [1;173;24]	[0;0;0] [6;125;19]	[1;71;13] [1;226;21]	[1;226;20]
<b>A l'heure</b>		[6;45;12] [0;0;0]		[6;45;15] [0;0;0]	[0;0;0]
<b>En retard</b>			[0;0;0] [6;36;12]	[3;165;27] [1;152;23]	[1;152;14]
<b>Total</b>		[2;145;19]	[0;0;0]	[1;165;16]	

Les valeurs maximales sont parfois élevées (jusqu'à 226 minutes) cependant ces valeurs ne représentent qu'une très faible part des interviewés. Le tableau 10 indique la part des scénarios dont le délai est supérieur à 120 minutes.

**Tableau 10 : Parts des scénarios dont le délai est supérieur à 120 minutes**

	<b>Parts</b>
<b>SP Avance</b>	0.04%
<b>SP A l'heure</b>	0%
<b>SP En retard</b>	0.05%
<b>RP Avance</b>	0.05%
<b>RP A l'heure</b>	0.01%
<b>RP En retard</b>	0.05%

Dans la suite nous utilisons l'ensemble des réponses aux arbitrages pour estimer les modèles de choix de l'heure de départ.

## 2.2. Résultats économétriques

Nous procédons à l'estimation du modèle Logit de choix de l'heure de départ. Notons à ce titre que chaque heure de départ est associée à un temps de trajet et par conséquent à une heure d'arrivée (voir la section 1.3.). Le terme « choix de l'heure de départ » prend en compte le choix de l'heure de départ **et** du temps de trajet **et** de l'heure d'arrivée. Nous proposons un bref rappel des modèles de choix discrets binaires dans le contexte du choix de l'heure de départ afin de comprendre parfaitement les résultats d'estimation.

Les modèles de choix discrets supposent qu'à chaque possibilité de choix  $t$  ( $t=1,2$  correspondant à l'heure de départ de l'option 1 ou 2) est associée une utilité aléatoire,  $U(t)$  traduisant le niveau de satisfaction qu'elle procure à l'individu. Celui-ci choisit l'option qui lui apporte l'utilité la plus élevée.

Cette utilité aléatoire,  $U(t)$  dépend (a) d'une utilité déterministe,  $V(t)$  composée des caractéristiques du choix  $t$  et de celles de l'individu, et (b) d'un terme aléatoire, noté  $\varepsilon(t)$ . Ce second terme est non observable et reflète les erreurs de mesure et d'observation relatives à la partie déterministe de l'utilité (Manski, 1977).

La composante aléatoire est supposée intervenir de façon additive:

$$U(t) = V(t) + \varepsilon(t) \quad t=1,2.$$

La fonction d'utilité déterministe pour un déplacement dont l'heure d'arrivée est  $t$  s'écrit :

$$V(t) = -C(\lambda X(t))$$

avec une formulation linéaire classique de la fonction de coût :

$$C(t) = \alpha t(t) + \beta \text{ délai en avance} + \gamma \text{ délai en retard}$$

et où  $X$  est le vecteur de variables explicatives propres à l'individu et  $\lambda$  le vecteur de poids associés à ces variables.

Du fait de l'existence de termes aléatoires, les modèles développés dans la théorie des choix discrets sont des outils probabilistes. Ainsi, deux individus ayant les mêmes caractéristiques observées et confrontés dans une même situation à deux choix donnés peuvent prendre des décisions différentes. Soit  $n$  l'indice de l'individu, si  $U_n(t_1) > U_n(t_2)$ , pour toute option  $t_2$  différente de  $t_1$  et appartenant à l'ensemble des choix de l'individu  $n$ , alors l'individu opte pour  $t_1$ .

La probabilité,  $P(t)$ , qu'un individu opte pour le choix  $t_1$  est :

$$P_n(t_1) = \text{Prob}(U_n(t_1) > U_n(t_2); \forall t_2 \neq t_1) = \text{Prob}(V_n(t_1) + \varepsilon_n(t_1) > V_n(t_2) + \varepsilon_n(t_2); \forall t_2 \neq t_1). \quad (2)$$

ou encore

$$P_n(t_1) = \text{Prob}(\varepsilon_n(t_1) - \varepsilon_n(t_2) > V_n(t_2) - V_n(t_1); \forall t_2 \neq t_1)$$

On remarque que la modélisation porte sur le différentiel d'utilité  $V(t_2) - V(t_1)$ , par conséquent il n'est pas nécessaire de spécifier une constante dans chacune des utilités. La constante sera donc relative à l'un des deux choix.

Le modèle logit est obtenu en supposant que la différence  $\varepsilon_n = \varepsilon_n(t_1) - \varepsilon_n(t_2)$  est distribuée suivant une loi logistique<sup>9</sup> définie comme suit :

$$F(\varepsilon_n) = \frac{1}{1 + e^{-\mu \varepsilon_n}} \quad \mu > 0, -\infty < \varepsilon_n < +\infty$$

<sup>9</sup> Ce qui est équivalent à supposer que les termes  $\varepsilon_n(t_1)$  et  $\varepsilon_n(t_2)$  suivent des lois de Gumbel (0,1). La différence de termes distribués suivant une loi de Gumbel est distribuée suivant une loi logistique.

$$f(\varepsilon_n) = \frac{\mu e^{-\mu\varepsilon_n}}{(1 + e^{-\mu\varepsilon_n})^2}$$

avec  $\mu$  est un paramètre d'échelle.

d'où :

$$P_n(t_1) = \frac{1}{1 + e^{-\mu(V_n(t_1) - V_n(t_2))}} = \frac{e^{\mu V_n(t_1)}}{e^{\mu V_n(t_1)} + e^{\mu V_n(t_2)}}$$

Le paramètre  $\mu$  ne peut pas être isolé des paramètres  $\beta$ , cependant, il peut être normalisé à 1 (ce qui entraîne de poser que la variance des  $\varepsilon_n$  est égale à  $\pi^2 / 6$ ).

Dans le contexte du projet Quatuor et plus précisément en fonction des composantes de la fonction d'utilité prise en compte par METROPOLIS, seule la partie  $C(t)$  de  $V(t)$  est à considérer. Par conséquent, seuls les paramètres dynamiques sont estimés dans la suite. Autrement dit, l'estimation a été effectuée en supposant que le vecteur  $X$  des caractéristiques de l'individu était vide. Néanmoins, l'outil de simulation permet de distinguer des sous-groupes d'utilisateurs de la voiture particulière en fonction de leur origine, leur destination, leur motif de déplacement ou encore de la distance parcourue. Les tableaux qui suivent reportent les estimations des paramètres dynamiques pour différents ensembles d'utilisateurs de la voiture.

**Tableau 11 : Estimations par couronne et département d'origine**

Types de groupes	Sous-ensembles VP	Paramètres					
		Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
	Total	1702	0,090 (0,010)	0,046 (0,005)	0,073 (0,017)	0,511	0,811
Par couronne d'habitation	Habitants 75	141	0,099 (0,036)	0,019 <sup>x</sup> (0,012)	0,082 <sup>x</sup> (0,069)	0,191	0,828
	Habitants petite couronne (92, 93 et 94)	601	0,066 (0,014)	0,036 (0,008)	0,085 <sup>x</sup> (0,141)	0,545	1,287
	Habitants grande couronne (77, 78, 91 et 95)	960	0,116 (0,015)	0,062 (0,008)	0,118 (0,025)	0,534	1,017
Par département d'habitation	Habitants 77	237	0,107 (0,029)	0,051 (0,014)	0,097 <sup>Ⓢ</sup> (0,047)	0,476	0,906
	Habitants 78	241	0,199 (0,042)	0,105 (0,023)	0,258 (0,073)	0,527	1,296
	Habitants 91	276	0,112 (0,029)	0,051 (0,014)	0,110 <sup>Ⓢ</sup> (0,044)	0,455	0,982
	Habitants 92	235	0,118 (0,032)	0,041 (0,013)	0,132 <sup>Ⓢ</sup> (0,062)	0,347	1,118
	Habitants 93	170	0,035 <sup>x</sup> (0,025)	0,034 <sup>Ⓢ</sup> (0,016)	0,039 <sup>x</sup> (0,056)	0,971	1,114
	Habitants 94	196	0,063 (0,024)	0,033 (0,014)	0,014 <sup>x</sup> (0,039)	0,523	0,222
	Habitants 95	206	0,089 (0,030)	0,064 (0,018)	0,087 <sup>x</sup> (0,059)	0,719	0,977

Légende: <sup>Ⓢ</sup> significatif entre 1% et 5%, <sup>Ⓣ</sup> significatif entre 5% et 10%, <sup>x</sup> non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

Lorsque l'on considère l'ensemble des usagers de la voiture particulière, les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  valent respectivement 0,090, 0,046 et 0,073. Soit une valeur du temps passé dans le véhicule supérieure aux délais d'arrivée en avance et en retard et une pénalité de délai plus élevée pour un retard qu'une avance.

Lorsque des groupes d'usagers sont constitués en fonction de la couronne ou du département d'origine, il existe dans tous les cas des estimations non significatives, ce qui doit être exclu. Le tableau 12 distingue le motif lié au travail des autres motifs et offre des estimations significatives mais non totalement satisfaisantes en raison du coût du délai en retard trop proche pour les deux sous-ensembles.

Tableau 12 : Estimations par motif

		Paramètres					
Type de groupes	Sous-ensembles VP	Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
Par motif	Motif lié au travail	1157	0,092 (0,012)	0,052 (0,006)	0,075 (0,021)	0,565	0,815
	Autres motifs	544	0,089 (0,019)	0,036 (0,008)	0,073 ⑤ (0,03)	0,404	0,820

Légende: ⑤ significatif entre 1% et 5%, ⑩ significatif entre 5% et 10%, × non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

Nous avons constitué des groupes par couronne et département de destination, les estimations sont reportées dans le tableau 13.

Tableau 13 : Estimations par couronne et département de destination

		Paramètres					
Types de groupes	Sous-ensembles VP	Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
Par couronne de destination	Destination 75	245	0,051 ⑤ (0,021)	0,016 ⑩ (0,010)	0,020 × (0,045)	0,313	0,392
	Destination petite couronne (92, 93 et 94)	640	0,114 (0,018)	0,053 (0,009)	0,110 (0,031)	0,464	0,964
	Destination grande couronne (77, 78, 91 et 95)	817	0,104 (0,016)	0,054 (0,008)	0,124 (0,032)	0,519	1,192
Par département de destination	Destination 77	198	0,121 (0,041)	0,063 (0,020)	0,105 × (0,070)	0,520	0,867
	Destination 78	213	0,115 (0,033)	0,056 (0,016)	0,186 (0,067)	0,486	1,617
	Destination 91	221	0,097 (0,034)	0,044 (0,015)	0,136 ⑤ (0,067)	0,453	1,402
	Destination 92	281	0,138 (0,032)	0,063 (0,014)	0,149 (0,052)	0,456	1,079
	Destination 93	176	0,088 (0,034)	0,106 (0,028)	0,003 × (0,062)	1,204	0,034
	Destination 94	183	0,121 (0,034)	0,034 ⑤ (0,013)	0,147 (0,055)	0,280	1,214
	Destination 95	185	0,103 (0,032)	0,063 (0,019)	0,100 × (0,070)	0,611	0,970

Légende: ⑤ significatif entre 1% et 5%, ⑩ significatif entre 5% et 10%, × non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

De nouveau, des estimations sont non significatives, en particulier pour Paris dans le cas du regroupement par couronne et pour les départements 77, 93 et 95 dans le cas du regroupement par département. Notons qu'en constituant des groupes par distance parcourue, nous obtenons des résultats satisfaisants au niveau de la significativité.

**Tableau 14 : Estimations par distance entre l'origine et la destination**

Type de groupes	Sous-ensembles VP	Paramètres					
		Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
Par distance entre O et D	<5 Kms	555	0,088 (0,021)	0,034 (0,008)	0,095 (0,038)	0,386	1,079
	Entre 5 et 12 Kms	579	0,094 (0,018)	0,054 (0,010)	0,059 ⑤ (0,028)	0,574	0,627
	> 12 kms	568	0,098 (0,016)	0,051 (0,009)	0,087 (0,027)	0,520	0,887

Légende: ⑤ significatif entre 1% et 5%, ⑩ significatif entre 5% et 10%, × non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

En effectuant le regroupement des destinations de Paris et de la petite couronne, nous obtenons des résultats intéressants.

**Tableau 15 : Estimations sur deux couronne**

Type de groupes	Sous-ensembles VP	Paramètres					
		Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
Par couronne de destination	Paris et petite couronne (92, 93 et 94)	885	0,084 (0,013)	0,041 (0,006)	0,052 ⑤ (0,020)	0,488	0,619
	Destination grande couronne (77, 78, 91 et 95)	817	0,104 (0,016)	0,054 (0,008)	0,124 (0,032)	0,519	1,192

Légende: ⑤ significatif entre 1% et 5%, ⑩ significatif entre 5% et 10%, × non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

Ces derniers résultats croisés avec ceux par motif, nous conduisent à retenir trois groupes d'utilisateurs ; par motif et destination :

- Travail à Paris et PC
- Travail en GC
- Autres motifs



**Tableau 16 : Estimations retenues pour le calibrage**

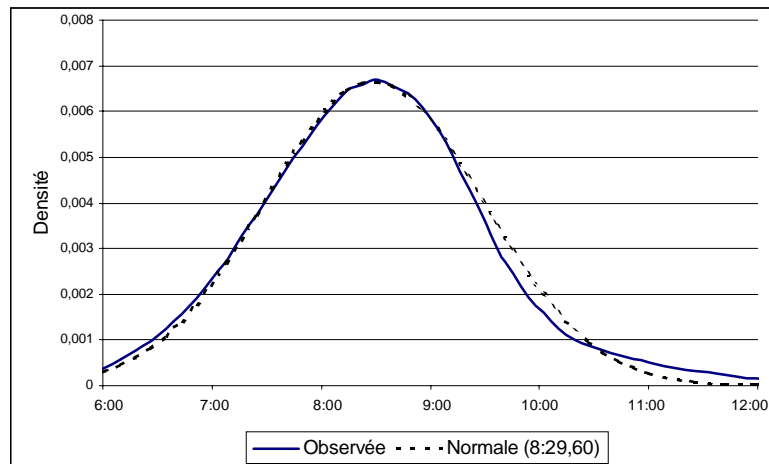
Type de groupes	Sous-ensembles VP	Paramètres					
		Tailles	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\beta/\alpha$	$\gamma/\alpha$
Par motif et destination	Travail à Paris et PC	648	0,081 (0,015)	0,038 (0,007)	0,047 ⑤ (0,023)	0,469	0,580
	Travail en GC	509	0,130 (0,022)	0,084 (0,013)	0,175 (0,045)	0,646	1,346
	Autres motifs	544	0,089 (0,019)	0,036 (0,008)	0,073 ⑤ (0,03)	0,404	0,820

Légende: ⑤ significatif entre 1% et 5%, ⑥ significatif entre 5% et 10%, × non significatif à moins de 10%  
aucun symbole : significatif à moins de 1%

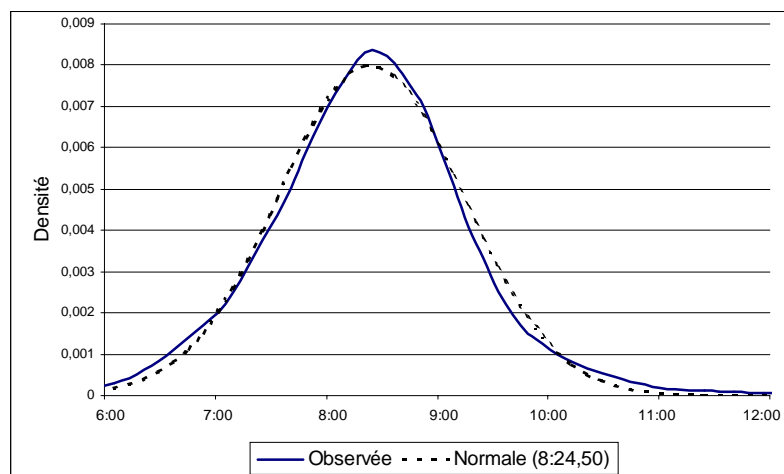
Les estimations précédentes ont été effectuées à partir d'individus qui révèlent une heure précise d'arrivée préférée. Pour chaque modèle, nous avons testé la significativité d'une plage horaire autour de l'heure préférée d'arrivée à l'intérieur de laquelle les coûts des délais sont nuls ( $\Delta$ ). Cette variable est nulle dans tous les cas.

Nous présentons dans la suite les distributions des heures préférées d'arrivées pour les trois classes d'utilisateurs retenues. La courbe continue représente la distribution observée et lissée à l'aide d'un kernel et la distribution discontinue représente le meilleur ajustement par loi normale.

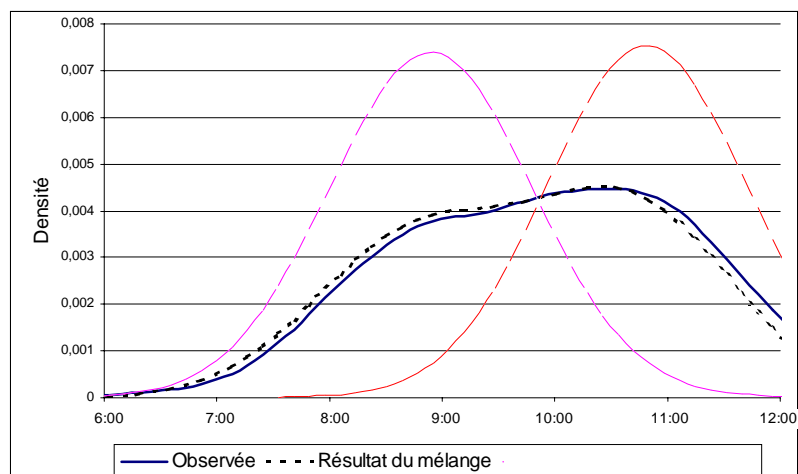
### 8.a Travail à Paris et PC



### 8.b Travail en GC



### 8.c Autres motifs



### Figure 8 : Distribution des heures préférées d'arrivée

On constate, dans tous les cas, que le lissage par loi normale est très proche du lissage non paramétrique. La loi normale peut alors être retenue pour effectuer les simulations. Pour les déplacements de motifs autres que ceux liés au travail, la distribution des heures préférées d'arrivée est bimodale. Ces distributions sont reprises dans le tableau 17 .

**Tableau 17 : Distributions des heures préférées d'arrivée pour les trois classes d'utilisateurs**

Sous-ensembles VP	Paramètres de la loi normale	
	Moyenne	Ecart-type (minutes)
Travail à Paris et PC	8:29	60
Travail en GC	8:24	50
Autres motifs		
Groupe 1 (46%)	8:54	54
Groupe 2 (54%)	10:49	53

La section suivante traite de l'utilisation des résultats d'estimation des paramètres dynamiques et des heures préférées d'arrivée dans l'outil de simulation.

### 3. Utilisation des résultats d'estimation dans METROPOLIS

Les trois groupes d'utilisateurs que nous avons identifiés à la section précédente sont pris en compte par l'outil de simulation ainsi que les caractéristiques des distributions de leurs heures préférées d'arrivées. Les paramètres dynamiques doivent par contre être sensiblement adaptés.

En effet, l'hypothèse restrictive de normalisation du paramètre d'hétérogénéité  $\mu$  est relevée dans METROPOLIS. Par conséquent, ce paramètre ne doit pas être normalisé à 1 et une valeur doit être introduite. Cependant, comme nous l'avons indiqué dans la sous section théorique 2.2., le paramètre  $\mu$  ne peut être directement estimé dans la procédure d'estimation du modèle Logit.

Si l'on retire l'hypothèse  $\mu = 1$ , les estimations précédentes des paramètres dynamiques correspondent à  $\alpha/\mu$ ,  $\beta/\mu$  et  $\gamma/\mu$ . Par exemple, dans le cas des déplacements liés au travail vers Paris et la petite couronne on a :  $\alpha/\mu = 0,081$ ,  $\beta/\mu = 0,038$  et  $\gamma/\mu = 0,047$ . L'évaluation du paramètre  $\mu$  peut être effectuée par l'intermédiaire d'une estimation récente de la valeur du temps,  $\alpha$ , obtenue pour la population de la région étudiée.

Suite à de travaux économétriques effectués à partir de l'EGT 1998, nous avons estimé pour les automobilistes de l'Ile de France une valeur  $\alpha$  de 85F/H (voir de Palma et Fontan 2001 ou TTR 2000). On peut en déduire que  $\mu = 17,48$  et par conséquent  $\beta = 40$  F/H et  $\gamma = 49$  F/H dans le cas des déplacements liés au travail vers Paris et la petite couronne.

Nous disposons par conséquent de l'évaluation de tous les paramètres nécessaires au fonctionnement de METROPOLIS pour le cas de l'Ile de France.

## Conclusion

Le projet d'enquête relatif à la composante horaire des déplacements des franciliens a pu être réalisé et utilisé dans le cadre du projet QUATUOR. Après avoir présenté les principales caractéristiques de cette enquête et extrait des éléments de compréhension de la dynamique des comportements, nous avons pu estimer des modèles de choix de l'heure de départ.

La richesse de la base de données nous permet de fournir des estimations des paramètres comportementaux pour divers segments d'usagers. En particulier, nous avons identifié trois segments pour lesquels les estimations étaient les plus robustes : "Travail à Paris et en Petite Couronne", "Travail en Grande Couronne" et "Autres motifs". L'outil a donc pu être paramétré pour chacun de ces sous échantillons : estimations des coûts unitaires des délais, valeurs du temps, paramètre d'hétérogénéité et distributions des heures préférées d'arrivée.

En raison de l'originalité du thème étudié, cette enquête a demandé de nombreux efforts. Cependant, la méthodologie peut facilement être calquée pour une étude dans une autre région ou encore peut servir de base très avancée pour une étude du pic du soir. Par la suite, les estimations des paramètres dynamiques ne nécessitent aucun outil spécifique et font simplement appel aux modèles logit. De ce fait, l'outil de simulation peut facilement être paramétré du point de vue de la dynamique des comportements de déplacements.

Notons que les travaux de recherche liés aux choix des heures de déplacements sont poursuivis (C. Fontan « Etude économétrique de la dynamique des comportements de déplacements urbains en Ile de France » Thèse pour le doctorat de Sciences Economiques, Thema, Université de Cergy-Pontoise, 2002) en particulier dans la prise en compte des non-linéarités des fonctions d'utilité. L'objet étant d'améliorer la qualité d'ajustement des modèles sans compliquer l'utilisation des outils de simulation.

## Références

- Abkowitz, M.D. (1980). "The impact of service reliability on work travel behaviour". Thèse, Département d'ingénierie civil du MIT.
- Abu-Eisheh, S. et A., Mannering, F. L. (1988). "A discrete/continuous analysis of commuters' route and departure time choice". *Transportation Research Record*, 1338.
- Arnott, R., de Palma, A. et Lindsey, R. (1993). "A structural Model of Peak Period Congestion: A Traffic Bottleneck with Elastic Demand". *American Economic Review*, 83, 168-179.
- Ben-Akiva, M. (1999). "Departure time choice model. Mimeo". Thema Transport & Réseaux.
- Cascetta, E., Nuzzolo, A. et Biggiero, L. (1992). "Analysis and Modelling of Commuters' Departure Time and Route choice in Urban Networks". Communication présentée au 2<sup>ème</sup> séminaire sur les réseaux de trafic urbain CAPRI.

- Cosslett, S. (1977). "The trip timing decision for travel to work by automobile". Rapport ITS University of California, Berkeley.
- de Palma, A. et Fontan, C. (2001). "Choix modal et valeurs du temps en Ile-de-France". A paraître dans Recherche Transport et Sécurité, N°71, INRETS.
- de Palma, A. et Fontan, C. (2000-a) "Choix modal et valeurs du temps en Ile-de-France". Document de travail THEMA, Université de Cergy-Pontoise.
- de Palma, A. et Fontan, C. (2000-b) "Enquête MADDIF : Multimotif Adaptée à la Dynamique des comportements de Déplacement en Ile-de-France". Rapport DRAST/PREDIT, N°99MT20.
- de Palma, A., Khattak, A., Gupta, D. (1997) "Commuters' Departure Time Decisions in Brussels". *Transportation Research Record*, N°1607, pp. 139-146.
- de Palma, A. et Rochat, D. (1996). "Urban Congestion and Commuters' Behavior : the Departure Time Context". *Revue d'Economie Régionale et Urbaine*, 3, 467-488.
- Emmerink, R., Van Beek, P. (1997) "Empirical analysis of work schedule flexibility: implications for road pricing and driver information systems". *Urban Studies*, Vol 34, N°2, pp. 217-234.
- Hendrickson, C. et Plank, E. (1984). "The Flexibility of Departure Times for Work Trips". *Transportation Research A*, 18, 1, 25-36.
- Mahamassani, H.S., Chang, G.L. (1986) "Specification and Estimation of a Dynamic Departure Time Acceptability Model in Urban Commuting". Présenté au 65<sup>ième</sup> Congrès Transportation Research Board.
- Mannering, F. L. (1989). "Poisson Analysis of Commuter Flexibility in Changing Routes and Departure Times". *Transportation Research B*, 23(1), 53-60.
- Manski C. F. (1977) "The Structure of Random Utility Models". *Theory and Decision*, 8, 299-254.
- Noland, R. B. et Small, K. A. (1995). "Travel Time Uncertainty, Departure Time Choice, and the Cost of Morning Commutes". *Transportation Research Record*, 1493, 150-158.
- Pagano, A.M. (1995). "Transportation Demand Management from the Employees' Perspective" Results form Chicago Area Focus Groups. Document de travail, Department of Managerial Studies, University of Illinois at Chicago.
- Sarwar, S. (1997) "Transit Utilisation in the East Harriet Neighbourhood". Rapport pour le Transportation Committee of the East Harriet Farmstead Neighborhood Association. Center for Urban and Regional Affairs, Université du Minnesota, Minneapolis.
- Small, K. (1982). "The scheduling of Consumer Activities". *American Economic Review*, 72, 467-479.
- Small, K. (1987). "A discrete Choice Model for Ordered Alternatives". *Econometrica*, 55, 2, 409-424.
- TTR (2000) "QUATUOR : Mise en œuvre d'outils dynamiques de simulation de trafic sur des réseaux franciliens de tailles moyennes". Rapport DRAST/PREDIT, N°99MT35.
- Vickrey, W.S. (1969). "Congestion Theory and Transport Investment". *American Economic Review* (articles et communications), 59, 251-261.

---

# Quatrième partie

## Calage des scénarios - naux

## Chapitre 1

# Réseau IAURIF : calage du scénario - nal

## Introduction

Dans le cadre du projet QUATUOR, nous cherchons maintenant à reproduire par simulations la réalité des données de trafic routier en Ile-de-France. Nous utilisons pour cela les données de déplacements fournies par l'EGT et l'IAURIF. En parallèle au projet QUATUOR, nous utilisons les résultats de l'enquête MADDIF. Cette enquête fournit des estimations des paramètres comportementaux des usagers du réseau francilien en fonction de leur motif de déplacement, de leur origine et de leur destination. Nous estimons également certaines forme de fonction de congestion à partir des données de comptages fournies par la DREIF et le SIER. L'objectif de ce chapitre est de calibrer le modèle en introduisant ces nouvelles données spécifiques à l'offre et à la demande, de façon à reproduire les données statistiques de l'EGT.

Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons le principe de la fonction de coût supporté par un usager dans le cadre d'un modèle dynamique simple. Nous présentons une démarche simple pour passer des valeurs estimées des paramètres comportementaux aux valeurs absolues devant être saisies dans l'outil de simulation METROPOLIS. La deuxième section est dédiée à la présentation des données statistiques utilisées dans le calage ainsi que la présentation des méthodes de calcul des critères d'évaluation du calage permettant de déterminer la meilleure simulation.

Etant donné que ces estimations des paramètres comportementaux prennent en compte l'origine et la destination des déplacements, nous présentons, en conséquence, la méthode utilisée pour introduire les valeurs des paramètres comportementaux en fonction de l'origine et de la destination dans la troisième section. La quatrième section rappelle la formulation des fonctions de congestion utilisées : la fonction de congestion de type goulot d'étranglement et la fonction de congestion de type Greenberg.

La méthode de calage proposée se base sur un principe assez simple qui consiste à faire évoluer et/ou la capacité de façon uniforme. Cette approche est détaillée dans la cinquième section et les résultats de calcul des critères d'évaluations sont exposés dans la sixième section. Dans la septième section, nous présentons les résultats des mesures d'efficacité agrégés et désagrégés par groupe d'usagers dans le cas d'un modèle avec fonction de type goulot d'étranglement et du modèle avec fonction de congestion de Greenberg. Les remarques et les conclusions seront exposées dans la dernière section.

## 1 Paramètres comportementaux

Au cours de la seconde année du projet QUATUOR, nous avons mis en place une enquête sur les comportements dynamiques des franciliens lors de leurs déplacements du matin. Les premiers résultats des estimations ont été présentés dans le chapitre 2 de la partie 2. Les paramètres estimés grâce aux données MADDIF sont légèrement différents de ceux nécessaires pour décrire le comportement dynamique des usagers dans METROPOLIS. Cette différence se situe essentiellement dans la prise en compte des coûts unitaires.



Soit la fonction de coût,  $C(t)$  d'un usager lors de son déplacement :

$$C(t) = \alpha t + \max[0, \beta(t^* - t_a)] + \max[0, \gamma(t_a - t^*)],$$

où la variable  $t$  représente le temps de trajet et les variables  $t^*$  et  $t_a$  représentent respectivement l'heure d'arrivée à destination désirée de l'utilisateur et l'heure d'arrivée à destination effective. Les différences entre les deux termes mesurent les délais d'arrivée (précoce ou tardive) à destination. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  représentent respectivement le coût unitaire du temps de trajet, le coût unitaire d'une arrivée précoce et le coût unitaire d'une arrivée tardive.

Dans le modèle de choix de l'heure de départ présent dans METROPOLIS, on introduit une composante stochastique :

$$C(t) = \alpha t + \max[0, \beta(t^* - t_a)] + \max[0, \gamma(t_a - t^*)] + \mu \varepsilon.$$

Le paramètre  $\varepsilon$  est un terme aléatoire de moyenne nulle et le paramètre  $\mu$  mesure l'hétérogénéité des individus. Plus sa valeur est faible et plus les usagers sont homogènes. Il permet également de décrire la perception des usagers de leur coût de déplacement. En moyenne, l'erreur de perception est de l'ordre de 10%.

Pour des raisons théoriques exposées dans le chapitre 2 de la troisième partie, les estimations économétriques permettent uniquement de fournir les valeurs relatives des paramètres c'est-à-dire les rapports suivants :  $\alpha/\mu$ ,  $\beta/\mu$  et  $\gamma/\mu$ . Cependant, dans METROPOLIS, il est nécessaire de connaître les valeurs exactes et séparément des différents paramètres ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\mu$ ). Nous aborderons dans la sous-section suivante la méthode de passage des valeurs relatives des paramètres aux valeurs exactes.

### 1.1 Valeurs des paramètres comportementaux

Les différentes études sur le sujet (partie 3, chapitre 2) montrent généralement que la valeur des paramètres de la fonction de coût diffèrent selon le motif de déplacement. De plus pour les motifs de déplacement autres que le travail, nous avons constitué deux sous-populations, selon l'heure d'arrivée désirée. Nous avons donc calculé les valeurs des coûts unitaires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ainsi que le paramètre d'homogénéité  $\mu$  pour quatre segments d'individus (voir tableaux 16 et 17 du chapitre 2 de la partie 3). Le tableau 1 ci-dessous décrit les valeurs des paramètres de ces quatre classes d'individus. Notons que les valeurs entre parenthèses représentent la moyenne et l'écart-type d'une loi normale.

**Tableau 1 : valeurs des paramètres comportementaux**

Segments	Tailles	$\alpha/\mu$ [min]	$\beta/\mu$ [min]	$\gamma/\mu$ [min]	$t^* (m, \sigma)$ [h:m, m]
Travail vers Paris et PC	648	0,081	0,038	0,047	(08:29, 60)
Travail vers GC	509	0,130	0,084	0,175	(08:24, 50)
Autres motifs (groupe 1)	250	0,089	0,036	0,073	(08:54, 54)
Autres motifs (groupe 2)	294	0,089	0,036	0,073	(10:49, 53)

Dans METROPOLIS, nous devons saisir de ces valeurs des paramètres comportementaux séparément. A cet effet, nous avons considéré que le coût unitaire du temps de trajet est égal à la valeur tutélaire ( $\alpha=12,96$  €/h). Ainsi, nous pouvons déduire la valeur du paramètre d'hétérogénéité  $\mu$  et les valeurs des coûts unitaires d'arrivée précoce ou tardive (tableau 2).

**Tableau 2 : valeurs des paramètres utilisées dans METROPOLIS**

Segments	Tailles	$\alpha$ [€/h]	$\beta$ [€/h]	$\gamma$ [€/h]	$\mu$ [€]	$t^* (m, \sigma)$ [h:m, m]
Travail vers Paris et PC	648	12,96	6,08	7,52	2,67	(08:29, 60)
Travail vers GC	509	12,96	8,37	17,44	1,66	(08:24, 50)
Autres motifs (groupe 1)	250	12,96	5,24	10,63	2,43	(08:54, 54)
Autres motifs (groupe 2)	294	12,96	5,24	10,63	2,43	(10:49, 53)

## 2 Données statistiques de calage

Pour déterminer un scénario calibré, nous comparons les résultats de simulations obtenus aux données existantes. Pour ce faire, deux ensembles de données sont utilisés : (1) les données de l'IAURIF et (2) les données de l'EGT 91.

### 2.1 Données de l'IAURIF

Pour adapter l'outil dynamique au réseau de l'IAURIF, nous utilisons une matrice statique de 970.000 départs, pendant une heure de pointe pour différents motifs (domicile – travail et domicile – autres motifs).

Le tableau 3 présente la répartition des déplacements par origine (Paris ou Banlieue) – destination (Paris ou Banlieue) selon la matrice statique des déplacements sur une heure ([7h30-8h30]) fournie de l'IAURIF. La majorité des déplacements (85,66%) s'effectue de banlieue à banlieue. Cependant, dans les déplacements "Paris – Paris" et "Banlieue - Banlieue", les déplacements intra-zones sont également comptabilisés. Rappelons néanmoins que les déplacements intra-zones ne sont pas pris en compte dans l'outil de simulation dynamique (il n'y a pas de congestion sur les connecteurs, qui servent par conséquent uniquement à acheminer les véhicules des zones au réseau physique). Dans les déplacements "Paris - Paris", les déplacements intra-zones représentent 1,45%. De même, la part des déplacements intra-zones dans le total des déplacements "Banlieue - Banlieue" représente

27,52%. En supprimant les déplacements intra-zones de la matrice globale de l'IAURIF, le nombre de déplacements toutes origines et toutes destinations devient égal à 970.000, base utilisée pour notre calage.

**Tableau 3 : répartition spatiale des déplacements, y compris intra-zones  
(7h30 – 8h30 ; source IAURIF)**

<b>Origine – destination</b>	<b>Nombre de déplacements</b>	<b>Part des déplacements</b>
Paris – Paris	63.286	4,98%
Paris – Banlieue	118.854	9,36%
Banlieue – Banlieue	1.088.255	85,66%
<b>Total</b>	<b>1.270.395</b>	<b>100%</b>

Le tableau 4 représente la répartition des déplacements de la matrice statique de l'IAURIF sans prendre en compte les déplacements intra-zones. Le calage de l'outil dynamique se fera par rapport aux résultats de ce second tableau (tableau 4). Remarquons que le nombre de déplacements Paris - Banlieue est le même pour les tableaux 3 et 4 étant donné que tous les déplacements sont nécessairement inter-zones.

**Tableau 4 : répartition spatiale des déplacements, hors intra-zones  
(7h30 – 8h30 ; source IAURIF)**

<b>Origine – destination</b>	<b>Nombre de déplacements</b>	<b>Part des déplacements</b>
Paris – Paris	62.369	6,43%
Paris – Banlieue	118.854	12,25%
Banlieue - Banlieue	788.777	81,32%
<b>Total</b>	<b>970.000</b>	<b>100%</b>

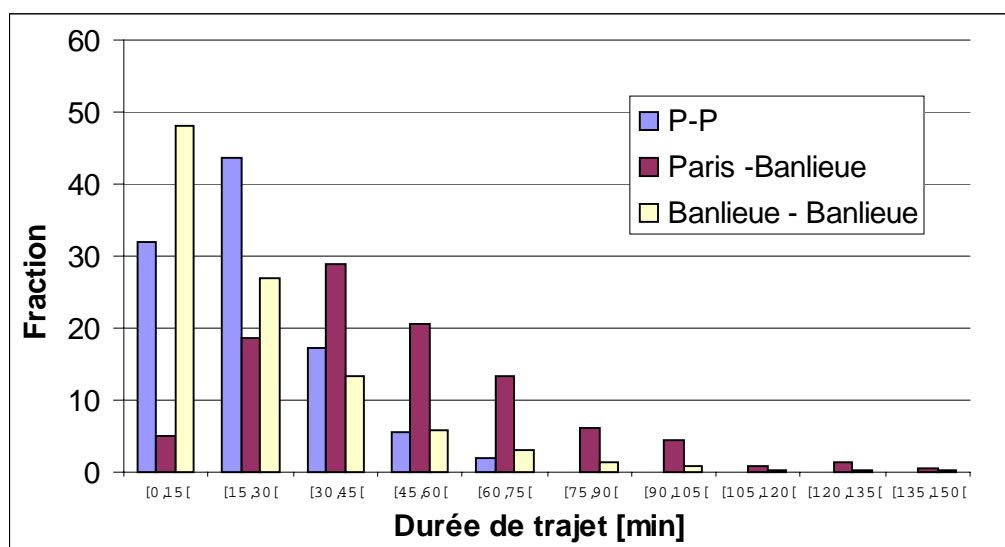
## **2.2 Données de l'EGT 91**

Les données de l'EGT 91 nous permettent de classer le nombre de déplacements selon deux critères : (1) l'origine (Paris ou Banlieue) et la destination (Paris ou Banlieue) et (2) la durée du trajet pour l'ensemble des usagers de la voiture qui partent entre 7h et 9h. Nous répartissons la durée de déplacements en classes de 15 minutes ; cette durée est adaptée à la sensibilité des usagers au coût du temps. La distribution est reproduite dans le tableau 5 ci-dessous. Dans ce tableau, nous ne pouvons pas distinguer les déplacements par motif.

**Tableau 5 : nombre de départs (x1000)  
en fonction de la durée du trajet (source EGT 91)**

Temps de trajet [min]	[0,15[	[15,30[	[30,45[	[45,60[	[60,75[
Paris - Paris	35	48	19	6	2
Paris – Banlieue	11	42	65	46	30
Banlieue - Banlieue	943	526	259	114	58
<b>Total</b>	<b>989</b>	<b>616</b>	<b>343</b>	<b>166</b>	<b>90</b>
Temps de trajet [min]	[75,90[	[90,105[	[105,120[	[120,135[	[135,150[
Paris - Paris	0	0	0	0	0
Paris – Banlieue	14	10	2	3	1
Banlieue - Banlieue	26	17	5	4	8
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>27</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>9</b>

Cette répartition est représentée à la figure 1 pour les trois types de déplacements : Paris – Paris, Paris – Banlieue et Banlieue – Banlieue.



**Figure 1 : distributions des temps de trajet  
selon l'origine et la destination**

Comme nous pouvons l'observer, la plupart des déplacements Paris – Paris ou Banlieue – Banlieue a un temps de trajet inférieur à 30 minutes alors que la plupart des déplacements Paris – Banlieue a un temps de trajet compris entre 30 et 45 minutes. Le premier objectif du calage est de reconstituer cette distribution des temps de trajet selon l'origine et la destination.

Le deuxième objectif du calage agrégé est que les temps de trajet moyens (selon l'origine et la destination) calculés à partir des résultats de simulations soient proches des temps de trajet moyens calculés à partir des données de l'EGT 91. Ces temps de trajet sont présentés dans le

tableau 6 ci-dessous. Nous avons calculé deux temps de trajet moyens. Le premier concerne l'ensemble des déplacements entre 7h et 9h et le deuxième concerne uniquement les usagers qui effectuent des déplacements dont la durée est supérieure à 15 minutes afin de ne pas prendre en compte les déplacements intra-zones que l'outil dynamique ne simule pas. En effet, rappelons que dans les déplacements "Paris – Paris" ou "Banlieue – Banlieue", nous ne pouvons pas distinguer les déplacements intra-zones et les déplacements inter-zones. Par conséquent, nous avons préféré supprimer les déplacements dont le temps de trajet est inférieur à 15 minutes. Par ailleurs, dans les déplacements "Paris – Banlieue", nous avons conservé l'ensemble des déplacements quels que soient leurs temps de trajet.

**Tableau 6 : temps de trajet moyen  
selon l'origine et la destination entre 7h et 9h (source EGT 91)**

Origine - Destination	Moyenne des temps de trajet supérieurs à 15 minutes [min]	Moyenne des temps de trajet [min]
Paris – Paris	29,90	22,77
Paris – Banlieue	50,25	48,15
Banlieue - Banlieue	36,84	22,72
<b>Total</b>	<b>38,63</b>	<b>25,21</b>

Le tableau 7 présente le nombre de déplacements par origine – destination avec et sans prise en compte des trajets d'une durée inférieure à 15 minutes. La colonne 3 (cas 1) présente le nombre de déplacements dont la durée de trajet est supérieure à 15 minutes. Par contre, la colonne 4 (cas 2) présente le nombre de déplacements dont la durée est supérieure à 15 minutes pour les déplacements "Paris – Paris" et "Banlieue - Banlieue". L'ensemble des déplacements "Paris - Banlieue" est envisagé c'est-à-dire y compris ceux dont la durée de trajet est inférieure à 15 minutes.

**Tableau 7 : répartition des déplacements (x1000)  
par origine – destination suivant la seconde approche (source EGT 91)**

Origine - destination	Nombre total de déplacements	cas 1	cas 2
Paris – Paris	110	75	75
Paris – Banlieue	224	213	224
Banlieue - Banlieue	1.960	1.017	1.017
<b>Total</b>	<b>2.294</b>	<b>1.305</b>	<b>1.316</b>

### 2.3 Critères d'évaluation du calage

Pour le calage de l'outil dynamique de simulation, nous avons trois groupes de critères selon le type de la variable analysée : (1) temps de trajet moyen, (2) distribution des temps de trajet et (3) nombre de déplacements. Pour chaque variable, nous calculons quatre critères : les trois premiers sont relatifs aux trois paires origine – destination et le quatrième est un critère global pondéré par le nombre de déplacements.

### 2.3.1 Définitions

Soient les notations suivantes :

On note  $x$  le type de variable à analyser. La variable  $x$  peut être soit le temps de trajet moyen, soit des valeurs de la distribution des temps de trajet ou encore le nombre de déplacements.

$i=1, \dots, 3$  le type de déplacement selon l'origine et la destination, où :

$i=1$  : les déplacements "Paris - Paris" dont le temps de trajet est supérieur à 15 minutes,

$i=2$  : les déplacements "Paris - Banlieue" y compris ceux dont la durée de trajet est inférieure à 15 minutes,

$i=3$  : les déplacements "Banlieue - Banlieue" dont le temps de trajet est supérieur à 15 minutes.

$\theta_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ): parts des déplacements (calculées à partir des données de l'EGT 91) suivant l'origine et la destination, où les types de déplacements sont indicés par  $i$ .

Le tableau 8 propose un résumé des parts des déplacements calculées à partir des données de l'EGT 91 présentées dans la colonne "Cas 2" du tableau 8.

**Tableau 8 : parts des déplacements  
suivant l'origine et la destination (source EGT 91)**

Origine – destination	Nombre de déplacements (x 1000)	Part des déplacements
Paris – Paris	75	$\theta_1 = 5,7\%$
Paris – Banlieue	224	$\theta_2 = 17\%$
Banlieue – Banlieue	1.017	$\theta_3 = 77,3\%$
Total	<b>1.316</b>	<b>100%</b>

### 2.3.2 Critère de calage de la distribution des déplacements

Les critères relatifs au calage des distributions des déplacements consistent à comparer, pour chaque paire origine – destination et pour chaque tranche de durée de trajet de 15 minutes, les proportions des déplacements simulés aux proportions de déplacements fournies par l'EGT 91.

Considérons les notations suivantes :

$P_{ij}^{EGT}$  proportion des déplacements, calculée à partir des données de l'EGT 91, pour l'origine – destination  $i$  et la tranche de temps de trajet  $j$ ,

$P_{ij}^{Sim}$  proportion des déplacements, calculée à partir des données simulées, pour l'origine – destination  $i$  et la tranche de temps de trajet  $j$ , où :

- $i=1, \dots, 3$  représente le type de déplacement selon l'origine et la destination,
- et  $j=1, \dots, 10$  représente la classe de durée de trajet.

Le tableau 9 présente les proportions des déplacements calculées à partir des données de l'EGT 91 sur la période 07h00 – 09h00.

**Tableau 9 : distribution des déplacements par classe de 15 minutes et par origine – destination (source EGT 91)**

Tranches de durée de trajet [min]	[0,15[	[15,30[	[30,45[	[45,60[	[60,75[
<b>Equivalence indice "j"</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Paris – Paris ( $i=1$ )	0,00%	64,00%	25,33%	8,00%	2,67%
Paris – Banlieue ( $i=2$ )	4,91%	18,75%	29,02%	20,54%	13,39%
Banlieue – Banlieue ( $i=3$ )	0,00%	51,72%	25,47%	11,21%	5,70%
<b>Total</b>	<b>0,84%</b>	<b>46,81%</b>	<b>26,06%</b>	<b>12,61%</b>	<b>6,84%</b>
Tranches de durée de trajet [min]	[75,90[	[90,105[	[105,120[	[120,135[	[135,150[
<b>Equivalence indice "j"</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Paris – Paris ( $i=1$ )	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Paris – Banlieue ( $i=2$ )	6,25%	4,46%	0,89%	1,34%	0,45%
Banlieue – Banlieue ( $i=3$ )	2,56%	1,67%	0,49%	0,39%	0,79%
<b>Total</b>	<b>3,04%</b>	<b>2,05%</b>	<b>0,53%</b>	<b>0,53%</b>	<b>0,68%</b>

Nous avons quatre critères relatifs à la distribution des temps de trajet à minimiser. Leurs expressions sont consignées ci-dessous.

#### Critère par origine – destination

$$C_i^P = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{ij}^{EGT} |P_{ij}^{Sim} - P_{ij}^{EGT}|}{\sum_{j=1}^{10} P_{ij}^{EGT}}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

#### Critère global

$$\hat{C}^P = \sum_{i=1}^3 \theta_i C_i^P, \quad i = 1, \dots, 3.$$

### 2.3.3 Critère de calage de la matrice des déplacements

Les précédents critères consistent à juger la qualité du calage par rapport à la distribution des temps de trajet et au temps de trajet moyen. Cependant, ils ne peuvent pas nous informer sur la qualité du calage par rapport à la matrice globale de déplacements sachant que nous prenons en compte deux motifs de déplacements : domicile – travail et domicile – autre motif. Notons que le motif travail regroupe également les déplacements pour motif "affaire" et les déplacements pour motif "école".

Pour ces motifs, nous avons pris en compte les données de l'EGT 91 pour lesquelles la part des déplacements pour le motif travail représente 55% de l'ensemble des déplacements.

Nous disposons de deux types d'informations pour juger de la qualité du calage :

- Le nombre de déplacements sur une période d'une heure fourni par la matrice statique de l'IAURIF est présenté dans le tableau 4.
- Le nombre de déplacements sur une période de deux heures fourni par l'EGT 91 et présenté dans la colonne "Cas 2" du tableau 7.

Le tableau 10 résume les données utilisées pour le calage de la matrice de déplacements pour deux plages horaires différentes. Comme nous pouvons l'observer, le passage d'une heure à deux heures n'est pas uniforme entre les différentes paires origine - destination. Le facteur de passage (1,88) d'une heure à deux heures pour la paire origine – destination "Paris - Banlieue" est le plus important alors qu'il ne représente que 12,6 % des déplacements totaux de 7h30 à 8h30.

**Tableau 10 : matrice statique des déplacements (x 1000)  
selon la plage horaire (source IAURIF/EGT 91)**

<b>Origine – destination</b>	<b>Données IAURIF 7h30 – 8h30</b>	<b>Données EGT 91 7h00 – 9h00</b>	<b>Facteur de passage</b>
Paris – Paris	62,369	75	1,20
Paris – Banlieue	118,854	224	1,88
Banlieue - Banlieue	788,777	101,7	1,28
<b>Total</b>	<b>970</b>	<b>1.316</b>	<b>1,35</b>

Dans le calage de l'outil dynamique nous faisons évoluer l'ensemble des déplacements de façon uniforme et donc nous utilisons un facteur de passage unique. Un scénario, où les deux matrices (motif travail et autres motifs) sont parfaitement calibrées, ne peut s'expliquer que par un meilleur choix des paramètres comportementaux spécifiques à chaque groupe d'utilisateurs selon leur motif de déplacement.



### 2.3.4 Critère de calage de la matrice IAURIF

Ce critère compare le nombre total de déplacements pendant le pic horaire sans tenir compte des déplacements selon l'origine et la destination.

$$\hat{C}^{IAURIF} = \frac{|N^{Sim} - N^{IAURIF}|}{N^{IAURIF}}.$$

Dans cette expression,  $N^{sim}$  (respectivement  $N^{IAURIF}$ ) représente le nombre total d'usagers simulés (respectivement le nombre total fourni par la matrice IAURIF).

### 2.3.5 Critère de calage des déplacements par origine – destination

Considérons les notations suivantes :

- le nombre de déplacements calculés à partir des données de l'EGT 91 est  $N_i^{EGT}$  où  $i=1, \dots, 3$  représente le type de déplacement selon l'origine et la destination,
- le nombre de déplacements simulés est noté  $N_i^{Sim}$  où  $i=1, \dots, 3$  représente le type de déplacement selon l'origine et la destination.

Les trois critères selon l'origine et la destination s'écrivent de la manière suivante :

$$C_i^{OD} = \frac{|N_i^{Sim} - N_i^{EGT}|}{N_i^{EGT}}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

#### Critère global

$$\hat{C}_{OD} = \sum_{i=1}^3 \theta_i C_i^{OD}.$$

Nous reprenons, dans le tableau 11, les différents indicateurs. Pour chaque variable, nous avons trois indicateurs désagrégés et un indicateur global (moyenne pondérée). Enfin, un critère synthétique est construit et représente la moyenne arithmétique des quatre critères globaux.

**Tableau 11 : indicateurs de calage proposés**

Variable étudiée	Indicateurs	Formule de l'indicateur
<b>Distributions des temps de trajet</b>	Origine – destination ( $i=1,\dots,3$ )	$C_i^P = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{ij}^{EGT}  P_{ij}^{Sim} - P_{ij}^{EGT} }{\sum_{j=1}^{10} P_{ij}^{EGT}}, i = 1,\dots,3$
	Global	$\hat{C}_P = \sum_{i=1}^3 \theta_i C_i^P, i=1,\dots,3$
<b>Nombre de déplacements (données EGT 91)</b>	Origine – destination ( $i=1,\dots,3$ )	$C_i^{OD} = \frac{ N_i^{Sim} - N_i^{EGT} }{N_i^{EGT}}, i = 1,\dots,3$
	Global	$\hat{C}_{OD} = \sum_{i=1}^3 \theta_i C_i^{OD}, i=1,\dots,3$
<b>Nombre de départs (données IAURIF)</b>	Global	$\hat{C}_{IAURIF} = \frac{ N_{Sim} - N_{IAURIF} }{N_{IAURIF}}$
<b>Critère synthétique</b>	Moyen	$\bar{C} = \frac{\hat{C}_P + \hat{C}_{OD} + \hat{C}_{IAURIF}}{3}$

### 2.3.6 Choix du scénario de référence

Les critères développés, ci-dessus, nous permettent d'améliorer le calage des paramètres du modèle et du nombre de déplacements. Il est possible que l'ensemble de ces critères ne puisse pas être minimisé pour tous les scénarios envisagés. Pour choisir un scénario final, nous calculons un critère synthétique qui correspond à une moyenne des différents critères globaux décrits ci-dessus. En d'autres termes, nous avons attribué un poids égal à chaque critère global. Bien sûr la pondération spécifique des critères globaux est du ressort des preneurs de décision. Le critère synthétique s'écrit :

$$\bar{C} = \frac{\hat{C}_P + \hat{C}_{OD} + \hat{C}_{IAURIF}}{3}.$$

Le meilleur scénario est celui dont le critère synthétique (moyen) est le plus petit.

## 3 Matrices origine–destination

Pour effectuer les simulations dans METROPOLIS, nous disposons que d'une matrice statique fournie par l'IAURIF. Or, les paramètres des usagers dépendent d'une part de leur origine – destination et d'autre part de leur motif de déplacement. Ainsi, nous avons créé

plusieurs sous-matrices selon ces deux critères de croisement. Le tableau 2 décrit l'existence de quatre types d'usagers. Les paramètres décrivent les valeurs des usagers se déplaçant pour le motif travail. Les valeurs de leurs paramètres varient suivant la localisation de leur lieu de travail : soit Paris ou petite couronne ; soit grande couronne. Les deux derniers types d'usagers se différencient par leur heure désirée d'arrivée.

### 3.1 Le travail comme motif de déplacement

Dans un premier temps, nous avons constitué, à partir de la matrice d'origine, des sous matrices selon l'origine (Paris, PC et GC) et la destination (Paris, PC et GC) des usagers. Nous avons ainsi 9 sous matrices décrites dans le tableau 12. La première colonne montre l'origine et la destination du déplacement. La deuxième colonne de ce tableau donne la destination de l'usager qui permet à son tour d'identifier les paramètres comportementaux pouvant être associés à ce type d'usager. La troisième colonne donne le nombre d'usagers pour chaque paire origine – destination calculé à partir de la matrice statique de l'IAURIF. Rappelons que cette matrice regroupe tout type de déplacement, autrement dit les déplacements pour le motif travail ainsi que les autres motifs. Par conséquent, il est nécessaire de distinguer les usagers des deux motifs. Pour ce faire, nous utilisons les informations fournies par l'EGT 91 sur les déplacements des usagers. Les données de l'EGT 91 montre que 55% des déplacements s'effectuent pour le motif travail. En appliquant ce coefficient de 55% au nombre d'usagers total, nous obtenons le nombre de déplacements pour le motif travail (voir quatrième colonne du tableau 12).

**Tableau 12 : nombre de déplacements  
par origine – destination pour le motif travail**

<b>Origine – Destination</b>	<b>Type d'usagers</b>	<b>Nombre d'usagers</b>	<b>Nombre de déplacements pour le motif travail</b>
Paris – Paris	Travail à Paris	62.369	34.303
Paris – PC	Travail en PC	36.944	20.319
Paris – GC	Travail en GC	16.638	9.151
PC – Paris	Travail à Paris	42.862	23.574
PC – PC	Travail en PC	261.341	143.738
PC – GC	Travail en GC	53.260	29.293
GC – Paris	Travail à Paris	22.410	12.326
GC – PC	Travail en PC	88.987	48.943
GC – GC	Travail en GC	385.189	211.854
<b>TOTAL</b>		<b>970.000</b>	<b>533.500</b>

### 3.2 Les autres motifs de déplacements

Les données de MADDIF distinguent les déplacements pour les autres motifs par les heures désirées d'arrivées (voir troisième et quatrième type du tableau 2). Pour créer les sous matrices associées aux autres motifs de déplacements, nous avons utilisé les parts fournies par MADDIF puisque les données de l'EGT 91 ne fournissent pas d'informations sur les heures d'arrivées désirées des usagers.

Parmi les déplacements pour les autres motifs, MADDIF nous informe que la part des usagers du troisième type représente 46% des déplacements pour les autres motifs. Par ailleurs, contrairement au cas des déplacements pour le motif travail, il n'est pas nécessaire de créer des sous matrices par origine – destination puisque les estimations ne font pas sortir de différence en termes d'origine et de destination. Le tableau 13 décrit la création des sous matrices pour les déplacements autre que le travail.

**Tableau 13 : nombre de déplacements  
pour les autres motifs que le travail**

Type d'usagers	Nombre d'usagers	Part de MADDIF	Nombre de déplacements pour les autres motifs
Autres motifs (groupe 1)	436.500	46%	200.790
Autres motifs (groupe 2)	436.500	54%	235.710
<b>TOTAL</b>		<b>100%</b>	<b>436.500</b>

Puisque l'EGT 91 montre que 45% des déplacements sont des déplacements autre que le travail, en appliquant ce coefficient au nombre total de déplacement (970.000), on obtient les valeurs indiquées dans la deuxième colonne. Dans ce cas le nombre d'usagers 436.500 comprend des usagers du groupe 1 et des usagers du groupe 2. Pour différencier chacun des deux groupes, nous avons multiplié 970.500 par les coefficients tirés de MADDIF (voir troisième colonne). Les résultats obtenus sont indiqués dans la quatrième colonne du tableau 13.

### 3.3 Résumé

Afin de prendre en compte les valeurs des paramètres estimés à partir des données MADDIF, nous avons dû créer 11 sous matrices. Le tableau 14 résume les tableaux 12 et 13. Cette représentation correspond à la saisie qui devrait être effectuée dans METROPOLIS. Par conséquent, le calage de la demande consiste à varier la matrice totale de façon uniforme en la multipliant par le coefficient de la demande noté  $n$ . Ceci correspond à faire évoluer également les sous matrice du même coefficient  $n$ . Nous avons préféré cette méthode pour cause de manque d'information sur les matrices origine – destination.

**Tableau 14 : nombre de déplacements  
selon la répartition de MADDIF**

Type d'usagers	Nombre de déplacements
Paris – Paris	34.303
Paris – PC	20.319
Paris – GC	9.151
PC – Paris	23.574
PC – PC	143.738
PC – GC	29.293
GC – Paris	12.326
GC – PC	48.943
GC – GC	211.854
<b>SOUS TOTAL 1</b>	<b>533.500</b>
Autres motifs (groupe 1)	200.790
Autres motifs (groupe 2)	235.710
<b>SOUS TOTAL 2</b>	<b>436.500</b>
<b>TOTAL</b>	<b>970.000</b>

## 4 Fonctions de congestion

Nous effectuons deux séries de simulations. La première série concerne l'adaptation d'une fonction de congestion de type goulot d'étranglement et la deuxième série concerne les fonctions de congestion de type Greenberg modifiée estimée dans la partie 3, chapitre 1. Pour ces deux séries, nous avons utilisé les mêmes paramètres comportementaux développés plus haut et nous avons retenu la même approche de calage de la demande et des capacités. Nous exposons les deux modèles et par la suite, nous décrirons la méthode utilisée pour faire évoluer les capacités dans les deux modèles.

### 4.1 Fonction de type goulot d'étranglement

Les fonctions de type goulot d'étranglement sont définies comme suit :

Pour les connecteurs de zones :

$$tt_i^1(\text{dynVol}_i) = \frac{L_i}{V_i},$$

et pour les liens :

$$tt_i^2(\text{dynVol}_i) = \begin{cases} \frac{L_i}{V_i} & \text{si } \text{dynVol}_i < \frac{s_i L_i}{V_i} \\ \frac{\text{dynVol}_i}{s} & \text{ailleurs} \end{cases},$$

où :

$dynVol_i$  : l'occupation du lien  $i$  à un moment donné,

$L_i$  : longueur du lien  $i$ ,

$\bar{V}_i$  : vitesse maximale sur le lien  $i$ ,

$s_i$  : capacité du lien  $i$ .

La capacité  $s_i$  correspond à la capacité "statique", fournie dans les données de l'IAURIF.

## 4.2 Fonction de type Greenberg modifié

Nous utilisons une fonction de type Greenberg modifiée puisque dans les estimations, c'est cette dernière qui apparaît la plus adaptée. Cette fonction décrit deux régimes. Le premier régime, dit fluide, dans lequel l'interaction entre les véhicules est supposée inexistante. La vitesse de circulation est supposée constante et égale à la vitesse de circulation à vide. Lorsque la densité de circulation atteint un niveau dit densité minimale, le second régime prend effet. La fonction de congestion Greenberg modifiée est décrite par la relation suivante :

$$V(k_i) = \begin{cases} V_{min} & \text{si } k \leq k_{min} \\ V_o \ln[k_j/k] & \text{si } k_{min} \leq k \leq k_j \end{cases}$$

Les paramètres estimés pour cette loi de congestion sont les suivants :

$V_{min}$  : vitesse de circulation à vide,

$k_{min}$  : densité de circulation minimale

$V_o$  : vitesse de circulation optimale, et

$k_j$  : densité d'embouteillage.

Les résultats des estimations sont représentés dans le tableau 15.

**Tableau 15 : résultats des estimations**  
(Les valeurs en italiques représentent l'écart-type des estimations)

Type de route	Vitesse à vide ( $V_{min}$ )		Densité minimale ( $k_{min}$ )		Densité d'embouteillage ( $k_j$ )		Vitesse optimale ( $V_o$ )		Débit critique ( $s_c$ )
1 voie	91	<i>25,9</i>	9	<i>6,8</i>	130	<i>51,7</i>	32	<i>15,1</i>	1530
2 voies	93	<i>20,5</i>	13	<i>6,2</i>	111	<i>38,7</i>	43	<i>12,4</i>	1756
3 voies	97	<i>16,8</i>	14	<i>10,9</i>	107	<i>37,2</i>	49	<i>11,6</i>	1930
4 voies	90	<i>14,0</i>	15	<i>5,3</i>	95	<i>22,4</i>	51	<i>18,9</i>	1782
5 voies	92	<i>9,5</i>	16	<i>2,7</i>	109	<i>10,7</i>	48	<i>4,8</i>	1924

Le débit critique est décrit dans la dernière colonne du tableau 16. En comparaison aux données du réseau de l'IAURIF (tableau 16, quatrième colonne), les valeurs du débit critique restent proches.

**Tableau 16 : répartition des routes  
selon le nombre de voies de circulation (source IAURIF)**

Type de route	Nombre de routes	Vitesse à vide	Capacité critique par voie
1 voie	10387	40	1279
2 voies	2230	53	1470
3 voies	603	68	1702
4 voies	373	69	1848
5 voies	38	69	1863

#### 4.2.1 Transférabilité des fonctions de congestion

Dans la base de données de l'IAURIF représentative du réseau francilien, nous disposons, pour chaque lien, de sa longueur, du nombre de voies, de sa vitesse de circulation à vide et de sa capacité critique.

Afin de conserver les caractéristiques du réseau de l'IAURIF, nous avons préféré agir sur la variation des agrégats estimés (densité minimale, densité d'embouteillage et vitesse optimale). Nous considérons alors la vitesse à vide et la capacité des routes comme fixes. Pour cela, nous devons décrire les relations reliant ces différents paramètres.

Puisque les fonctions de congestion sont définies continues et monotones, les deux régimes sont vérifiés au point de densité minimale  $k_{min}$ . De ce fait, la relation suivante est vérifiée :

$$V_{min} = V_o \ln[k_j / k_{min}]$$

De cette relation, nous pouvons déduire que :

$$k_{min} = \frac{k_j}{\exp[V_{min} / V_o]}$$

Puisque  $k_j = (e \cdot s_c) / l_j$ , nous obtenons :

$$k_{min} = \frac{e \cdot s_c}{V_o \exp[V_{min} / V_o]}$$

Puisque nous voulons garder les caractéristiques du réseau (vitesse à vide  $V_{min}$  et capacité des routes  $s_c$ ) lors du calage, nous pouvons écrire :

1. La densité critique comme suit :

$$k_{\min} = \frac{e \cdot s_c}{V_o \exp[V_{\min} / V_o]}, \text{ et}$$

2. La densité d'embouteillage  $k_j$  comme suit :

$$k_j = (e \cdot s_c) / V_o.$$

#### 4.2.2 Introduction dans METROPOLIS

Les fonctions de congestion, définies en temps de trajet sur les liens, dans METROPOLIS dépendent du nombre d'utilisateurs se trouvant sur chaque lien à tout instant. Cette variable est notée comme précédemment  $dynVol$  où :

$$dynVol = k \times l \times n.$$

Le paramètre  $n$  représente le nombre de voies sur un lien et  $l$  la longueur de ce lien. Par conséquent, le temps de trajet,  $tt(dynVol)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$tt = \begin{cases} \frac{l}{V_{\min}} & \text{si } k < k_{\min} \\ \frac{l}{V_o \ln[k_j / k]} & \text{si } k_{\min} \leq k < k_j. \end{cases}$$

En introduisant la variable  $dynVol$ , nous obtenons :

$$tt = \begin{cases} \frac{l}{V_{\min}} & \text{si } dynVol < (k_{\min} \times l \times n) \\ \frac{l}{V_o \ln[dynVol_j / dynVol]} & \text{si } (k_{\min} \times l \times n) \leq dynVol < (k_j \times l \times n) \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, nous posons :

$$\begin{cases} dynVol_j = k_j \times l \times n \\ dynVol_{\min} = k_{\min} \times l \times n \end{cases}$$

Le temps de trajet s'écrit par conséquent, comme suit :

$$tt(dynVol) = \begin{cases} \frac{l}{V_{\min}} & \text{si } dynVol < dynVol_{\min} \\ \frac{l}{V_o \ln[dynVol_j / dynVol]} & \text{si } dynVol_{\min} \leq dynVol < dynVol_j \end{cases}.$$



Cette dernière relation spécifie la fonction de congestion utilisée par METROPOLIS. Comme, nous l'avons montré dans la sous-section précédente, il suffit de connaître la vitesse à vide, la capacité des routes et leur vitesse optimale pour en déduire le reste des paramètres de la fonction de congestion. L'avantage de cette approche est de réduire le nombre de paramètres sur lesquels nous devons agir pour calibrer la fonction de congestion.

### 4.3 Ajustement de l'offre

L'ajustement de l'offre se fait par la modification de toutes les capacités des routes sur l'ensemble du réseau par un même facteur. Cette opération s'effectue par l'intermédiaire du facteur multiplicatif de la capacité, noté  $\kappa$ , à travers la relation suivante :

$$s'_i = \kappa s_i,$$

où :

- $s_i$  : capacité de la route  $i$  avant modification,
- $\kappa$  : facteur multiplicatif de la capacité,
- $s'_i$  : capacité de la route  $i$  après modification.

## 5 Méthode de calage

L'approche de calage consiste à faire évoluer la demande et les capacités des routes. La simulation de référence est celle qui satisfait au mieux les critères de calage décrit plus haut.

### 5.1 Variation de la demande

Le calage de la demande consiste à faire évoluer la demande de façon uniforme en la multipliant par le même coefficient, noté  $n$ . Le tableau 17 décrit la variation de ce coefficient et de la demande totale des usagers. La première valeur du coefficient multiplicateur ( $n=1,00$ ) est donnée à titre de référence de comparaison des différentes valeurs. Les demandes totales simulées varient de 2.910.000 usagers à 4.850.000 usagers. Par conséquent les sous matrices décrites dans le tableau 13 varient également uniformément puisque toutes ces sous matrices sont multipliées par le même coefficient multiplicateur.

**Tableau 17 : variation de la demande**

Coefficient multiplicateur ( $n$ )	<b>1,00</b>	<b>3,00</b>	<b>3,25</b>	<b>3,50</b>	<b>3,75</b>
Demande totale	970 000	2 910 000	3 152 500	3 395 000	3 637 500
Coefficient multiplicateur ( $n$ )	<b>4,00</b>	<b>4,25</b>	<b>4,50</b>	<b>4,75</b>	<b>5,00</b>
Demande totale	3 880 000	4 122 500	4 365 000	4 607 500	4 850 000

## 5.2 Variation des capacités

De la même façon que pour la variation de la demande, nous avons fait varier les capacités de façon uniforme. Par conséquent, nous avons multiplié les capacités des routes par le même coefficient, noté  $\kappa$ . Ce dernier varie de 0,80 à 1,10 avec un pas de 0,05.

En résumé, étant données les variations de la demande et des capacités, nous effectuons 63 simulations.

## 6 Résultats agrégés du calage

Dans cette section, nous présentons les résultats de calcul des critères. Nous présentons respectivement les quatre critères puis le critère moyen. Pour une meilleure analyse des résultats, nous présentons les résultats dans l'ordre suivant : (1) distribution des déplacements, (2) nombre de déplacements EGT, (3) nombre de départs IAURIF et (4) le critère synthétique.

### 6.1 Modèle du goulot d'étranglement

Dans cette sous section, nous présentons les résultats relatifs aux simulations de type goulot d'étranglement et dans un second temps les résultats de la simulation avec fonction de congestion de Greenberg modifiée.

Le tableau 18 représente les valeurs des critères des simulations. Pour chacun des couples  $(n ; \kappa)$ , nous présentons respectivement les valeurs des critères dans l'ordre décrit dans le paragraphe précédent. La plus faible valeur du critère moyen est égale à 4,76% et elle correspond au couple  $(n ; \kappa) = (3,75 ; 0,90)$ .

Notons que pour chacun des deux premiers critères (distribution des déplacements et nombre de déplacements EGT), il existe des situations meilleures. Par ailleurs, pour le critère du nombre de départs de l'IAURIF, il présente la valeur la plus petite soit 1,86%.

**Tableau 18 : valeurs des critères de calage**

Variation du coefficient de la demande $n$		Variation du coefficient de la capacité $\kappa$						
		0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
3,00	$\hat{C}_P$	5,66	5,36	5,09	5,01	4,74	4,68	4,40
	$\hat{C}_{OD}$	26,58	27,56	28,36	29,23	29,75	30,49	31,14
	$\hat{C}_{IAURIF}$	18,59	17,69	17,04	16,38	15,77	15,28	14,92
	$\bar{C}$	16,94	16,87	16,83	16,87	16,75	16,82	16,82
3,25	$\hat{C}_P$	7,15	6,79	6,56	6,15	5,78	5,65	5,56
	$\hat{C}_{OD}$	20,29	20,41	20,82	21,75	21,74	22,43	23,01
	$\hat{C}_{IAURIF}$	13,08	12,23	11,66	10,86	10,33	9,82	9,32
	$\bar{C}$	13,50	13,14	13,02	12,92	12,62	12,63	12,63
3,50	$\hat{C}_P$	6,33	5,86	5,64	5,47	5,33	5,10	5,01
	$\hat{C}_{OD}$	12,16	12,88	13,61	14,30	15,87	16,58	17,72
	$\hat{C}_{IAURIF}$	8,27	7,05	5,78	4,75	3,94	3,19	2,57
	$\bar{C}$	8,92	8,60	8,34	8,17	8,38	8,29	8,43
3,75	$\hat{C}_P$	6,98	6,33	6,13	5,76	5,36	5,24	5,22
	$\hat{C}_{OD}$	5,68	5,79	6,29	6,84	8,20	8,83	10,09
	$\hat{C}_{IAURIF}$	3,64	2,35	1,86	2,64	3,33	3,99	4,50
	$\bar{C}$	5,44	4,82	4,76	5,08	5,63	6,02	6,60
4,00	$\hat{C}_P$	7,75	6,97	6,53	6,16	5,66	5,40	5,26
	$\hat{C}_{OD}$	9,43	8,67	8,03	6,55	5,50	4,43	3,25
	$\hat{C}_{IAURIF}$	4,03	5,19	6,06	7,08	7,76	8,46	9,04
	$\bar{C}$	7,07	6,94	6,87	6,60	6,31	6,10	5,85
4,25	$\hat{C}_P$	10,77	9,53	8,74	8,19	7,46	7,39	6,94
	$\hat{C}_{OD}$	15,66	13,91	13,25	12,21	11,72	11,63	10,57
	$\hat{C}_{IAURIF}$	8,29	9,41	10,46	11,26	12,00	13,05	13,80
	$\bar{C}$	11,57	10,95	10,81	10,55	10,39	10,69	10,44
4,50	$\hat{C}_P$	10,90	10,52	9,49	8,70	8,22	7,72	7,48
	$\hat{C}_{OD}$	19,92	19,01	18,58	16,98	16,74	16,00	15,34
	$\hat{C}_{IAURIF}$	12,71	13,71	14,87	16,51	17,60	19,09	20,39
	$\bar{C}$	14,51	14,41	14,31	14,06	14,19	14,27	14,41
4,75	$\hat{C}_P$	12,12	11,14	10,60	9,91	8,85	8,21	7,80
	$\hat{C}_{OD}$	23,34	23,24	23,80	22,71	21,67	20,12	19,96
	$\hat{C}_{IAURIF}$	16,03	17,51	19,14	21,17	22,49	23,62	25,11
	$\bar{C}$	17,16	17,30	17,85	17,93	17,67	17,31	17,62
5,00	$\hat{C}_P$	12,18	10,74	9,51	8,45	7,73	7,13	6,73
	$\hat{C}_{OD}$	28,11	27,73	27,11	27,78	28,10	27,62	27,89
	$\hat{C}_{IAURIF}$	17,21	19,58	22,08	24,04	26,13	27,80	29,45
	$\bar{C}$	19,16	19,35	19,57	20,09	20,65	20,85	21,35

## 6.2 Modèle de Greenberg modifié

Nous avons également effectué des simulations sur le même réseau en changeant la définition de la fonction de congestion en utilisant une fonction de congestion de type Greenberg modifiée. Sans perte de généralité, nous présentons uniquement les valeurs des critères relatives à la meilleure simulation. Cette dernière correspond à une demande multipliée par  $n=3,50$  et une capacité multipliée par  $\kappa=0,90$ . Pour cette simulation (en termes de critère synthétique), nous obtenons les valeurs des critères suivants :

- (1) Le critère de la distribution des déplacements = 4,60%,
- (2) Le critère du nombre de déplacements EGT = 9,67%,
- (3) Le critère du nombre de départs IAURIF = 6,26%, et
- (4) Le critère synthétique = 6,84%.

Notons que la différence entre les deux meilleures simulations (goulot d'étranglement et Greenberg modifiée), se trouve dans le nombre d'utilisateurs et la capacité du réseau. Dans le cas des simulations avec goulot d'étranglement, le nombre d'utilisateurs a été multiplié par le coefficient  $n=3,75$  alors que dans le cas de la simulation avec Greenberg modifiée, la matrice totale a été multipliée par un coefficient de  $n=3,50$ . Mais également, la capacité du réseau a été réduite, de façon uniforme, de 10% dans le cas du modèle avec fonction de type goulot d'étranglement alors qu'elle a été diminuée que de 5% dans le cas du modèle avec fonction de type Greenberg modifiée.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons en parallèle, les résultats relatifs à la meilleure simulation obtenue avec une fonction de congestion de type goulot d'étranglement et la meilleure simulation obtenue avec une fonction de congestion de type Greenberg modifiée. Le tableau 19 ci-dessous donne un récapitulatif des différences entre les deux simulations. Notons que la différence entre les deux critères synthétiques provient essentiellement de la différence du troisième critère permettant de **calibrer les flux** selon la matrice statique d'une heure de l'IAURIF. Dans le cas la simulation avec fonction de congestion de type goulot d'étranglement est de l'ordre de 1,86% alors qu'il est de 6,26% dans la seconde simulation avec fonction de congestion de type Greenberg modifiée.

**Tableau 19 : récapitulatif de comparaisons**

Type de fonction de congestion	Goulot d'étranglement	Greenberg modifiée
Multiplicateur de la capacité $\kappa$	0,90	0,95
Multiplicateur de la demande $n$	3,75	3,50
Demande totale	3.637.500	3.395.000
Critère de la distribution des déplacements	6,13	4,60
Critère du nombre de déplacements EGT	6,29	9,67
Critère <b>de flux IAURIF</b>	1,86	6,26
Critère synthétique	4,76	6,84

Les valeurs des paramètres comportementaux et la segmentation des utilisateurs est la même dans les deux simulations. Les valeurs utilisées sont celles exposées dans le tableau 2.

## 7 Mesures d'efficacité et comparaisons

L'outil de simulation METROPOLIS permet de calculer différentes mesures d'efficacité. Le tableau 20 décrit les résultats de simulation de référence avec fonction de congestion de type goulot d'étranglement et fonction de congestion de type Greenberg modifié.

**Tableau 20 : mesures agrégées de l'efficacité du trafic**

Mesures d'efficacité	Goulot d'étranglement	Greenberg modifiée
Temps de trajet [min]	32,50	34,50
Temps de trajet à vide [min]	24,34	25,05
Temps de trajet de congestion [min]	8,16	9,45
Délai d'arrivée précoce [min]	28,28	28,65
Délai d'arrivée tardif [min]	19,07	21,14
Vitesse moyenne [km/h]	28,90	28,12
Part des arrivées précoces [%]	47,25	46,20
Part des arrivées tardives [%]	33,15	34,84
Coût moyen total [€]	9,47	10,05
Coût du temps de trajet à vide [€]	5,26	5,41
Coût du temps d'attente [€]	1,76	2,04
Coût moyen de déshorage [€]	2,45	2,60
Volume total des déplacements [millions de véh.km]	63,70	60,90
Distance moyenne parcourue [km]	17,51	17,93
Nombre d'arcs utilisés par individu	17,61	18,26
Indice de congestion	28,85	31,69

Le tableau 22 décrit les valeurs des mesures d'efficacité pour l'ensemble des usagers pour les deux types de fonction de congestion utilisées (goulot d'étranglement et Greenberg modifiée). Le temps de trajet total est de l'ordre de 32,50 minutes avec 8,16 minutes de temps de congestion ou de temps d'attente. Alors que dans le second modèle avec la fonction de Greenberg modifiée, nous obtenons un temps de trajet total de 34,50 minutes dont 9,45 minutes de temps de congestion. Ce type de fonction induit plus de congestion ; ce qui se traduit par un temps d'attente plus élevé. Un niveau de congestion plus élevé influence également le choix de route des usagers. Afin d'éviter les files d'attente sur le réseau, les individus préfèrent modifier leur itinéraire en sélectionnant des chemins plus long en distance. Cet allongement de l'itinéraire s'observe à travers la distance moyenne parcourue par les usagers 17,93 km au lieu de 17,51 km et par le nombre d'arcs utilisés 18,26 arcs au lieu de 17,61 arcs.

Dans le tableau 1, nous avons décrit les paramètres comportementaux de quatre types d'utilisateurs. Si nous ne prenons pas en compte les heures d'arrivée désirées des utilisateurs, cette segmentation se limite à trois types d'utilisateurs. Nous exposerons, pour chacun de ces segments d'utilisateurs, les mesures d'efficacité en termes de temps de trajet et du coût supporté lors de leur déplacement.

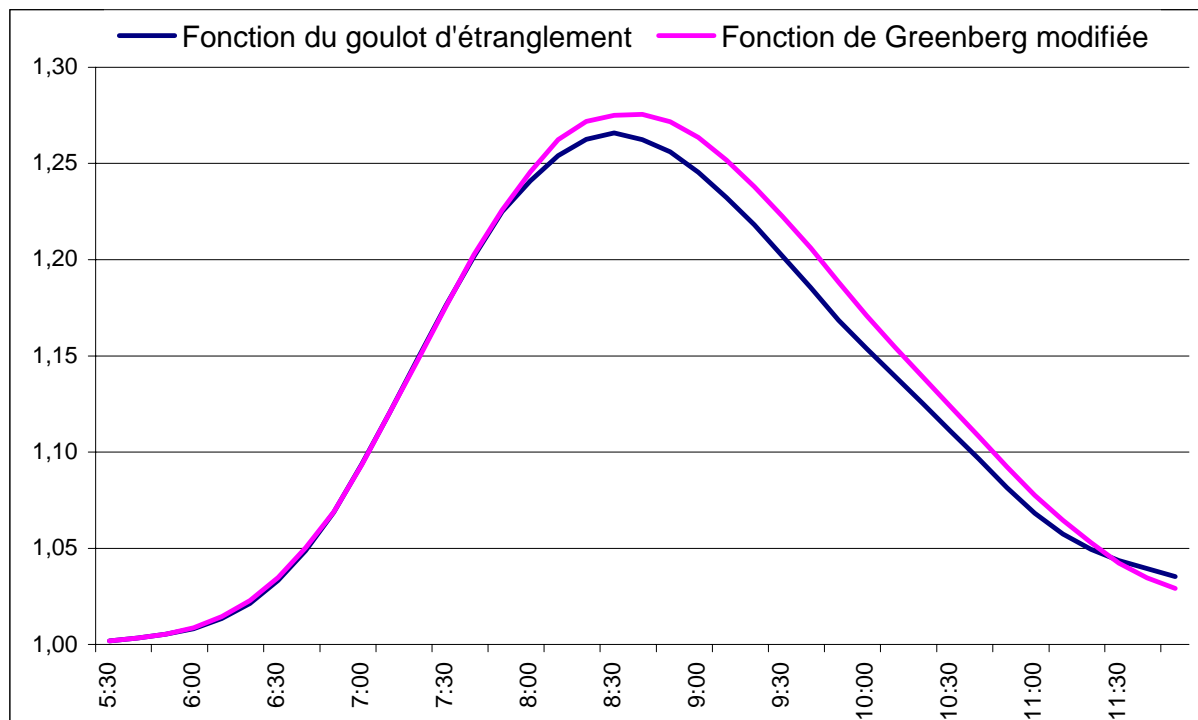
Le tableau 23 présente les résultats de deux modèles selon la fonction de congestion utilisée. Les résultats relatifs à chaque groupe d'utilisateurs dans les deux modèles sont assez proches. A titre d'exemple, le temps de trajet du groupe 1 est de l'ordre de 27,55 minutes dans le premier modèle et de 29,47 minutes dans le second modèle ; soit une différence de moins de 2 minutes.

L'observation des temps de trajet des trois groupes d'utilisateurs montre que c'est le groupe 2 qui supporte le temps de trajet le plus élevé soit 39,14 minutes dans le premier modèle et 40,69 minutes dans le second modèle. Afin d'expliquer ce résultat, notons que les utilisateurs du réseau ont le même coût unitaire du temps de trajet soit 12,96 €/h mais ils diffèrent par leurs coûts unitaires d'arrivée précoce et tardive. Les utilisateurs du second groupe qui subissent le temps de trajet le plus élevé se caractérisent par leurs coûts unitaires de déshorloge les plus élevés. En effet, le coût unitaire d'une arrivée précoce est de 8,37 €/h et le coût d'une arrivée tardive est de 17,44 €/h. Ces coûts unitaires et ce temps trajet élevés expliquent la valeur élevée du coût moyen total qui est de l'ordre de 10,56 € dans le premier modèle et de 11,12 € dans le second modèle.

**Tableau 21 : mesures d'efficacité désagrégées par groupe d'utilisateurs**

Mesures d'efficacité	Goulot d'étranglement			Greenberg modifiée		
	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Coût unitaire d'une arrivée précoce [€/h]	6,08	8,37	5,24	6,08	8,37	5,24
Coût unitaire d'une arrivée tardive [€/h]	7,52	17,44	10,63	7,52	17,44	10,63
Temps de trajet [min]	27,55	39,14	31,89	29,47	40,69	34,19
Délai d'arrivée précoce [min]	34,12	16,93	31,00	33,81	16,79	31,56
Délai d'arrivée tardive [min]	25,92	12,86	18,20	27,27	15,28	19,58
Part des arrivées précoces [%]	47,83	43,75	48,88	46,80	43,28	47,48
Part des arrivées tardives [%]	37,71	27,79	33,26	38,85	29,63	35,22
Coût moyen total [€]	8,83	10,53	9,28	9,30	11,12	9,92
Coût du temps de trajet [€]	5,95	8,46	6,89	6,36	8,79	7,38
Coût moyen de déshorloge [€]	2,88	2,07	2,40	2,93	2,33	2,54
Coût de déshorloge précoce [€]	3,46	2,36	2,71	3,43	2,34	2,77
Coût de déshorloge tardif [€]	3,25	3,74	3,22	3,42	4,44	3,47

La figure 2 ci-dessous présente la variation de l'indice de congestion au cours de la matinée. Il représente le rapport entre le temps de trajet total et le temps de trajet à vide sur l'ensemble du réseau. Comme nous pouvons l'observer, pour les deux modèles, le pic de congestion atteint son maximum vers 8h30 avec un niveau de congestion aux alentours de 1,27. Autrement dit, vers 8h30, les usagers qui se trouvent sur le réseau subissent un temps de trajet supplémentaire de 27% par rapport au temps de trajet à vide.



**Figure 2 : niveau de la congestion au cours de la matinée**

## Conclusion

La méthode adoptée pour le calage constitue une démarche assez simple pour reproduire la réalité du trafic sur le réseau francilien. Ce travail s'est effectué en plusieurs étapes. La première consiste à introduire les paramètres comportementaux en fonction de l'origine, de la destination et du motif de déplacement selon les estimations effectuées à partir des données de l'enquête MADDIF. Les résultats font apparaître quatre types d'usagers (tableau 1) qui se différencient par leur motif de déplacement, leur origine, leur destination et leurs heures d'arrivée désirées, etc.

Par la suite nous avons présenté les données statistiques utilisées pour le calage du modèle. Ces données sont de deux types : matrice statique de l'IAURIF et des données de déplacements de l'EGT 91. Nous avons également exposé la formulation des critères d'évaluation du calage qui sont de trois types (Tableau 13). Le premier critère permet de comparer le nombre de départs entre 7h30 et 8h30 au nombre de départs donné par la matrice statique de l'IAURIF. Le second permet de comparer le nombre de déplacements entre 7h00

et 9h00 au nombre de déplacements fourni par l'enquête EGT. Les données de l'EGT permettent de construire la distribution des déplacements en fonction de la durée de trajet et de l'origine et de la destination des usagers (Figure 1). Par conséquent, le troisième critère permet de comparer la distribution des déplacements simulés à la distribution des déplacements observés de l'EGT.

Après une brève analyse des données de l'IAURIF, nous avons proposé une méthode de développement des matrices en fonction de l'origine et de la destination des usagers tout en prenant en compte leur motif de déplacement et leurs paramètres comportementaux.

Du côté offre, nous avons supposé deux modèles selon la fonction de congestion utilisée. Deux types de fonctions de congestions ont été utilisées : goulot d'étranglement et Greenberg modifiée. La première correspond au modèle habituellement adopté dans la modélisation théorique et la seconde est estimée à partir des données de comptages (Partie 3 chapitre 3). Deux séries de simulations ont été effectuées dans lesquelles, nous avons fait varier, de façon uniforme, la demande totale et/ou la capacité du réseau.

La demande totale et la capacité de la meilleure simulation dépendent du type de la fonction de congestion. Dans le premier modèle avec fonction de congestion de type goulot d'étranglement montre que la meilleure simulation est atteinte lorsque la demande est multipliée par 3,75 (soit une demande totale de 3.637.500 usagers) et la capacité multipliée par un coefficient égale à 0,90 (soit une réduction uniforme de la capacité de 10%). Dans le cas du second modèle avec une fonction de congestion de type Greenberg, la meilleure simulation est atteinte lorsque la demande est multipliée par 3,50 (soit une demande totale de 3.395.000 usagers) et la capacité est multipliée par 0,95 (soit une réduction de la capacité de 5%). Pour ces cas de figures, nous obtenons un critère synthétique d'évaluation de 4,76% pour le premier modèle et de 6,84% pour le second modèle (Tableau 21). En terme de valeurs de mesures d'efficacité, les valeurs entre les deux modèles restent assez faibles. A titre d'exemple, le temps de trajet moyen pour le premier modèle est de l'ordre de 32,50 minutes alors qu'il est de 34,50 minutes pour le second modèle ; soit une différence de 2 minutes. Cette faible différence permet d'affirmer que toute fonction dite statique décrivant le temps de trajet en fonction de la densité peut être utilisée dans METROPOLIS si la fonction de type goulot d'étranglement se révèle insatisfaisante. En effet, cette dernière offre moins de flexibilité que les fonctions dites statiques lors du calage.

Dans notre approche de calage, et en l'absence de données suffisantes, nous avons adopté une méthode assez simple qui consiste à faire évoluer la demande totale et/ou les capacités des routes de façon uniforme. Dans nos simulations, nous avons considéré une matrice statique d'heure résultat d'affectation d'un modèle statique. En réalité les matrices statiques sont générées par des modules plus en amont du modèle de planification globale comme le module de génération et de distribution du modèle de planification à quatre étapes ou le module de choix modal des modèles désagrégés. Par conséquent, il serait possible de disposer de la matrice globale de déplacements pour l'ensemble de la matinée et non pas qu'une matrice statique d'heure. Dans ce cas, il ne serait plus nécessaire de faire varier la matrice d'une heure pour passer à la matrice de toute la journée. Nous avons également fait varier les capacités des routes de façon uniforme. Ce point serait également possible d'améliorer en calibrant les routes séparément en se basant sur des comptages ou des enquêtes cordons.



## Chapitre 2

# Reseau DREIF : calage du scenario - nal

## Introduction

Après avoir calé l'outil de simulation dynamique METROPOLIS au réseau de l'IAURIF, nous procédons à une approche équivalente sur un réseau de plus grande taille : le réseau de la DREIF. Les données du réseau de grande taille nous ont été fournies par la DREIF et représentent l'ensemble de la voirie de l'Ile-de-France mais de façon plus désagrégée que celles fournies par l'IAURIF. La différence entre les deux réseaux se situe essentiellement dans la description des intersections. Dans le réseau de l'IAURIF, les intersections sont décrites uniquement par un nœud. De plus, notons que IAURIF utilise des pénalités pour modéliser le fait de changer de direction. Par contre, dans le réseau de la DREIF, les intersections sont présentées de façon détaillée et chaque croisement est décrit par l'ensemble des directions possibles. Par conséquent, il est normal de constater que le nombre d'arcs est beaucoup plus élevé dans le cas de la DREIF.

Dans ce chapitre, nous allons effectuer une analyse descriptive du réseau de grande taille de la DREIF. Nous aborderons ainsi la différence entre le réseau de la DREIF et le réseau de l'IAURIF. Par la suite, nous décrirons la méthode suivie pour le calage de l'outil de simulation au réseau de la DREIF, qui reste très semblable à l'approche abordée dans la deuxième partie.

## 1 Présentation des données

Contrairement aux travaux effectués au cours de la seconde année de QUATUOR, les simulations présentées dans ce chapitre concernent l'ensemble du réseau de l'Ile-de-France : nous passons du quart Nord-Ouest du réseau Ile-de-France à l'ensemble de la région. Ce réseau de grande taille peut être également considéré comme un réseau désagrégé car le nombre d'arcs et le nombre de zones sont plus élevés que dans le réseau de l'IAURIF. En effet, le réseau de la DREIF comporte 1305 zones alors que celui de l'IAURIF ne comporte que 522 zones. Dans le réseau de la DREIF, le nombre d'arcs est de 39855 liens alors que dans le réseau de l'IAURIF, nous avons 13547 liens. Afin de mieux cerner les différences, nous allons dans un premier temps présenter les données relatives à la demande et dans un second temps décrire celles relatives à l'offre.

### 1.1 La demande

La demande est décrite essentiellement par la localisation des zones et la répartition de la matrice globale (ou matrice origine – destination) par rapport à ces zones.

#### 1.1.1 Le zonage

Le réseau utilisé est composé de 1305 zones qui recouvrent l'ensemble de l'Ile-de-France et 20 communes du sud de l'Oise (secteurs de Creil, Senlis et Chantilly). Cela représente en moyenne une zone par commune. Cependant, la densité des zones par commune dépend majoritairement de la densité de la population et de la distance par rapport au centre de la région. A titre d'exemple, Paris se compose de 105 zones alors que dans la grande couronne, il arrive qu'une zone représente trois ou quatre communes.

### 1.1.2 La matrice de déplacements

Les données de la matrice origine – destination correspondent à la matrice de déplacements en heure de pointe du matin, tous motifs confondus. Contrairement aux données de l'IAURIF, la matrice globale ne contient pas de déplacements intra-zones. Le nombre de déplacements total est égal à 1.046.842 usagers répartis sur 232.210 paires origine – destination (O-D). On compte 51% de paires représentant des déplacements unitaires.

Le nombre moyen de déplacements par O-D est de 4,5 usagers pour un écart-type de 13,83 usagers. La variabilité est assez élevée. L'O-D maximale représente 1.291 usagers.

Le tableau 1 ci-dessous présente le flux sortant (réception) et le flux entrant (émission) par zone. Même si les émissions et les réceptions sont égales en moyenne, leur variance sont différentes. En effet, la moyenne d'émission ou de réception par zone est égale à 802 alors que l'écart-type des émissions est égal à 689 déplacements et celui des réceptions est égal à 781 usagers.

**Tableau 1 : comparaison des flux entrants et des flux sortants**

	Somme	Moyenne	Ecart-type
Emission	1.046.842	802	689
Réception	1.046.842	802	781

## 1.2 L'offre

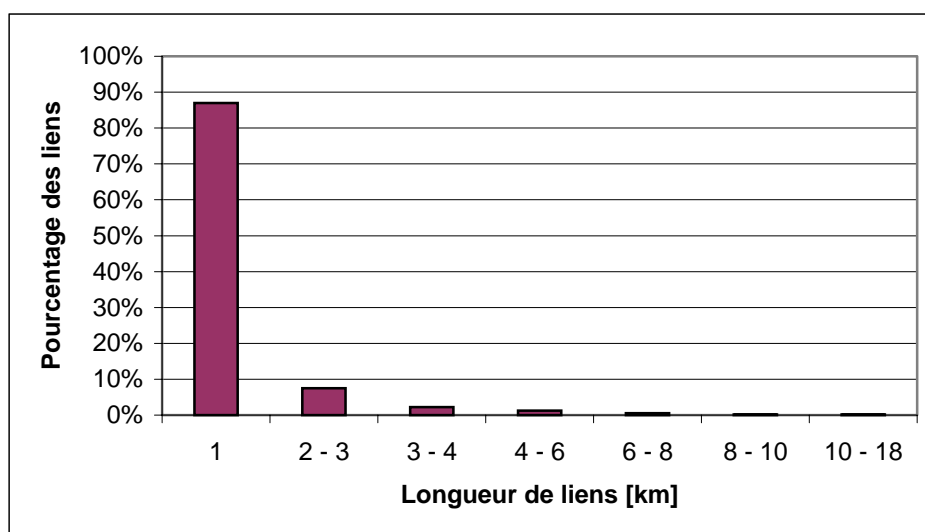
Le réseau de la DREIF est décrit par 39.854 liens dont 3.504 connecteurs (liens fictifs). Les liens sont répartis en 20 classes différenciées par leur coefficient de saturation utilisé dans la fonction de congestion du modèle d'affectation statique DAVIS. La valeur de ce coefficient est déterminée par les études de données débit - vitesse ou estimée en fonction du type et de la localisation des routes. Le tableau suivant présente l'effectif de différents types de routes.

**Tableau 2 : répartition des liens**

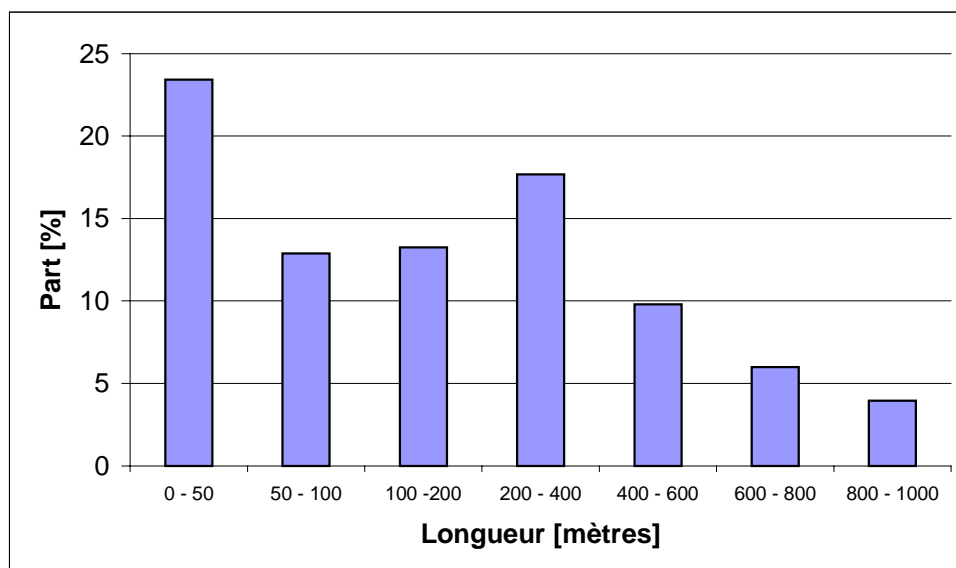
Type de voirie	Voirie locale	Voie de desserte	Voie artérielle	Autoroute	Autres voies rapides	Lien fictif	Autre	Total
Nombre de classes	6	1	2	1	4	3	3	20
Nombre de liens	19941	7806	3626	2236	366	3654	2225	39854
Longueur totale	8699	5791	2752	1622	192	3243	622	22922

### 1.2.1 Longueur des arcs

La longueur totale des liens codés (sans les liens fictifs) est égale à 19.679 km. La longueur moyenne est de 0,544 km et l'écart-type est de 3,605 km. Nous constatons que 94,45% des liens ont une longueur inférieure à 2 km et 23% des liens ont une longueur inférieure à 50 mètres. Le plus petit arc a une longueur de 10 m alors le plus grand des liens a une longueur de 17,50 km. La figure 1 présente la répartition des liens en fonction de leur longueur. Les arcs dont la longueur est inférieure à 1 km sont majoritaires. Ils représentent 87% de l'effectif total. Comme le montre la figure 2, la répartition des liens en fonction de la longueur pour ce même effectif (arcs dont la longueur est inférieure à 1 km) est assez hétérogène. Nous observons que 25% des liens ont une longueur inférieure à 500 mètres.



**Figure 1 : répartition des liens en fonction de la longueur**



**Figure 2 : répartition des petits liens en fonction de la longueur**

### 1.2.2 Capacités des arcs

Contrairement à la base de données de l'IAURIF, le nombre de voies par arc n'est pas connu. Par contre, nous connaissons la capacité totale de chaque lien. Le tableau 3 présente une description des capacités des liens par type de voie.

**Tableau 3 : distribution des capacités des liens**

Type de voie	Voirie locale	Voirie de desserte	Voie artérielle	Autoroute	Autres voies rapides	Autre	Total
Capacité moyenne	1395	1248	1880	5243	3607	2496	1737
Ecart-type	762	485	834	1628	1847	1588	1320
Capacité minimale	10	300	600	2000	800	300	10
Capacité maximale	6200	4200	5400	10500	9000	8800	10500

Le réseau de la DREIF en termes de capacité présente une grande hétérogénéité. En termes de capacité totale ce sont les routes locales qui l'emportent. Nous avons développé un indice de capacité des routes, noté  $CR_j$ , de calcul des capacités par type de voie.

$$CR_j = \sum_i \frac{q_{ij} l_{ij}}{V_{ij}},$$

où  $i$  représente un lien de type  $j$  donné,

$q_{ij}$  : capacité de la route  $i$ ,

$l_{ij}$  : longueur de la route  $i$ , et

$V_{ij}$  : vitesse de circulation à vide sur la route  $i$ .

Les valeurs de cet indice sont données dans le tableau 4 ci-dessous. Comme nous pouvons l'observer ce sont les voiries locales qui représentent la charge la plus importante ; elle est de l'ordre de 368.821 véhicules soit 43% de la charge totale. Inversement, ce sont les voies rapides qui représentent la plus petite charge soit 2% de la charge totale. Notons qu'aux heures de pointe le nombre de déplacements est égal à 951.675. cette valeur est multipliée par 1,1 pour présenter l'équivalent en unités véhiculaires soit 1.046.843 uvp.

**Tableau 4 : comparaisons des charges de type de voies**

Type de voirie	Voirie locale	Voirie de desserte	Voie artificielle	Autoroute	Autres voies rapides	Autre	Total
CR [véh]	368.821	183.890	117.049	130.392	15.419	39.326	854.896
CR moyen [véh]	18,50	23,56	32,28	58,31	42,13	17,67	23,62
Pourcentage du CR total [%]	43	22	14	15	2	5	100

### 1.2.3 Les vitesses à vide

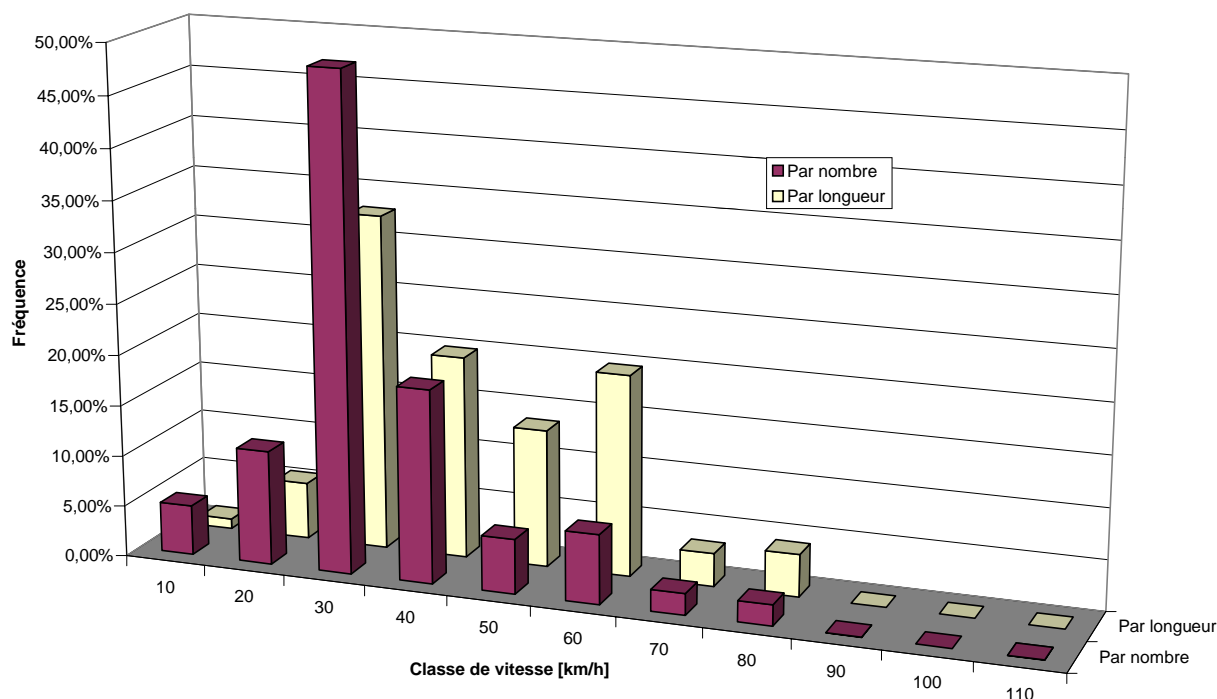
Les vitesses à vide des liens sont également assez hétérogènes. Le tableau 5 présente les valeurs moyennes des vitesses à vide en fonction du type de la voirie. La vitesse globale en moyenne du réseau de la DREIF est assez faible, de l'ordre de 30,4 km/h. La vitesse moyenne la plus élevée est observée sur les autoroutes où elle est de l'ordre de 61 km/h. Cependant,

certaines liens de circulation ont des vitesses à vide proches de 110 km/h. La comparaison de la valeur des écart-types des vitesses aux valeurs moyennes montre qu'il existe une grande disparité entre les voiries de même type. Au niveau global, la dispersion est de l'ordre de 43% ( $13,2/30,4*100$ ).

**Tableau 5 : distribution des capacités des liens**

Type de voie	Voirie locale	Voirie de desserte	Voie artérielle	Autoroute	Autres voies rapides	Lien fictif	Autre	Global
Moyenne	25,9	33,0	36,8	60,9	41,8	21,3	34,2	30,4
Ecart-type	10,1	8,3	12,2	12,5	14,8	7,0	8,3	13,2
Minimum	1,8	6,0	12,0	27,0	24,0	9,0	6,0	1,8
Maximum	72,0	72,0	72,0	108,0	72,0	36,0	72,0	108,0

La figure 3 représente la distribution des valeurs de la vitesse à vide par rapport au nombre de liens et leur longueur. Environ 45% des voies ont une vitesse à vide de l'ordre de 30 km/h. Par contre, la part des routes dont la vitesse à vide est supérieure à 80 km/h est assez faible voire presque nulle.



**Figure 3 : distribution des classes de vitesse à vide**

La description du réseau présentée précédemment montre que le réseau de la DREIF est beaucoup plus désagrégé que le réseau de l'IAURIF. Une analyse plus détaillée au niveau des données fournies par les deux organismes et des résultats des simulations est effectuée au troisième chapitre de la présente partie.

## 2 Analyse des performances du réseau

A partir des résultats de l'affectation statique de DAVIS, il est possible de calculer des valeurs de mesure d'efficacité qui peuvent être comparées aux résultats de simulation de METROPOLIS. Ces valeurs sont calculées à partir des relations analytiques décrites ci-dessous. Elles concernent le temps de trajet moyen, le temps de trajet moyen à vide, le nombre total de véhicules kilomètres, le nombre d'arcs utilisés par les usagers, la vitesse moyenne, la vitesse maximale et l'indice de congestion.

Soient les notations suivantes :

- $\Phi_i$  : le flux de déplacement sur l'arc  $i$ ,
- $L_i$  : la longueur de l'arc  $i$ ,
- $T$  : la période d'affectation,
- $tt_i$  : le temps en charge sur l'arc  $i$ ,
- $tt_{0i}$  : le temps de trajet à vide sur l'arc  $i$ , et
- $N$  : nombre total d'usagers du réseau désirant se déplacer pendant la période d'affectation  $T$ .

Les indicateurs<sup>1</sup> relatifs à un modèle statique se formalisent de la façon suivante :

- Temps de trajet moyen avec congestion ( $\bar{tt}$ ) :

$$\bar{tt} = \frac{\sum_i \Phi_i tt_i}{N} \cdot T \quad \text{où} \quad \sum_i \Phi_i T = N .$$

- Temps de trajet moyen à vide ( $\bar{tt}_0$ ) :

$$\bar{tt}_0 = \frac{\sum_i \Phi_i tt_{0i}}{N} \cdot T .$$

- Temps d'attente ( $\bar{tt}_a$ ) :

$$\bar{tt}_a = \bar{tt} - \bar{tt}_0 .$$

<sup>1</sup> Ces indicateurs ont été également utilisés lors du calage du réseau quart Nord-Ouest de la DREIF au cours de la seconde année.

- Volume total des déplacements en véhicules kilomètres ( $VT_{VehKm}$ ) :

$$VT_{VehKm} = \left[ \sum_i \Phi_i L_i \right] \cdot T .$$

- Distance moyenne parcourue ( $\bar{d}$ ) :

$$\bar{d} = \frac{\left[ \sum_i \Phi_i L_i \right] \cdot T}{N} .$$

- Vitesse moyenne ( $\bar{V}$ ) :

$$\bar{V} = \frac{\bar{d}}{tt} .$$

- Vitesse maximale moyenne ( $\bar{V}_0$ ) :

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{d}}{tt_0} .$$

- Nombre moyen d'arcs utilisés ( $N_{arcs}$ ) :

$$N_{arcs} = \frac{\sum_i \Phi_i}{N} \cdot T .$$

- Indice de congestion (Cong) :

$$Cong = \frac{tt - tt_0}{tt_0} .$$



Le tableau 6, ci-dessous, fournit ces indicateurs calculés à partir des résultats de l'affectation de la DREIF pour chaque type de route et pour le réseau dans sa globalité.

**Tableau 6 : valeurs des indicateurs de l'affectation de la DREIF**

	<i>Voirie locale</i>	<i>Voie de desserte</i>	<i>Voie artérielle</i>	<i>Autoroutes</i>	<i>Autres voies rapides</i>	<i>Lien fictif</i>	<i>Autre</i>	Global
Temps de trajet [min]	<b>18,65</b>	<b>4,93</b>	<b>2,88</b>	<b>6,45</b>	<b>0,73</b>	<b>3,49</b>	<b>3,59</b>	<b>40,71</b>
Temps de trajet à vide [min]	<b>8,72</b>	<b>2,58</b>	<b>1,90</b>	<b>4,03</b>	<b>0,43</b>	<b>3,49</b>	<b>1,49</b>	<b>22,64</b>
Volume total des déplacements [millions de véh.km]	<b>4,313</b>	<b>1,640</b>	<b>1,344</b>	<b>4,643</b>	<b>0,401</b>	<b>1,155</b>	<b>1,034</b>	<b>14,529</b>
Distance parcourue par usager [km]	<b>4,119</b>	<b>1,566</b>	<b>1,284</b>	<b>4,435</b>	<b>0,383</b>	<b>1,103</b>	<b>0,987</b>	<b>13,878</b>
Vitesse moyenne par usager [km/h]	<b>13,25</b>	<b>19,06</b>	<b>26,75</b>	<b>41,26</b>	<b>31,57</b>	<b>18,97</b>	<b>16,51</b>	<b>20,45</b>
Vitesse maximale par usager [km/h]	<b>28,35</b>	<b>36,38</b>	<b>40,53</b>	<b>65,95</b>	<b>53,45</b>	<b>18,98</b>	<b>39,68</b>	<b>36,77</b>
Nombre d'arcs traversés par usager	<b>11,63</b>	<b>3,14</b>	<b>2,47</b>	<b>7,33</b>	<b>0,72</b>	<b>2,06</b>	<b>3,86</b>	<b>31,21</b>
Congestion [%]	<b>114</b>	<b>91</b>	<b>52</b>	<b>60</b>	<b>69</b>	<b>0</b>	<b>140</b>	<b>80</b>

Les résultats d'affectation de DAVIS donnent un temps de trajet global de l'ordre de 40,71 minutes et une vitesse moyenne de circulation égale à 20,45 km/h. Le calcul de l'indice de congestion montre qu'il est très élevé pour les voiries locales (114%) et les autres voiries (140%). Par contre, la congestion sur les autoroutes est assez faible (60%) en comparaison aux autres voiries. En dehors des connecteurs où la fonction de temps de trajet est égale à la longueur sur la vitesse à vide, ce sont les voies artérielles qui supportent le niveau de congestion le plus faible (52%).

### 3 Méthodologie du calage

La démarche suivie pour le calage du réseau de la DREIF est la même que celle utilisée pour le calage du réseau de l'IAURIF (voir chapitre précédent). Nous utiliserons également les mêmes critères de calage. Pour ce faire nous avons dû également faire évoluer la capacité et la demande pour définir un scénario de référence.

#### 3.1 Paramètres comportementaux utilisés

Les paramètres comportementaux utilisés dans le calage du réseau de la DREIF sont issus des estimations de l'enquête MADDIF. Comme indiqué dans le tableau 7, nous distinguons quatre groupes d'utilisateurs. Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles utilisées dans l'adaptation de METROPOLIS au réseau de l'IAURIF.

**Tableau 7 : valeurs utilisées dans METROPOLIS**

Segments	Tailles	$\alpha$ [€h]	$\beta$ [€h]	$\gamma$ [€h]	$\mu$ [€]	$t^* (m, \sigma)$ [h:m, m]
Travail vers Paris et PC	648	12,96	6,08	7,52	2,67	(08:29, 60)
Travail vers GC	509	12,96	8,37	17,44	1,66	(08:24, 50)
Autres motifs (groupe 1)	250	12,96	5,24	10,63	2,43	(08:54, 54)
Autres motifs (groupe 2)	294	12,96	5,24	10,63	2,43	(10:49, 53)

### 3.2 Données statistiques

Les données statistiques sont utilisées, à travers des indices de calage, pour déterminer la meilleure simulation. Comme dans le cas du calage du réseau de l'IAURIF, nous disposons de deux sources de données. La première source est la matrice statique de la DREIF et la seconde source est les données de l'enquête EGT. Cette seconde source a été décrite dans le chapitre 3 de la partie 3. Alors que la première source interviendra dans le calcul du troisième critère de calage définit comme suit :

$$\hat{C}^{DREIF} = \frac{|N^{Sim} - N^{DREIF}|}{N^{DREIF}}.$$

Dans cette expression,  $N^{sim}$  (respectivement  $N^{DREIF}$ ) représente le nombre total d'utilisateurs simulés (respectivement le nombre total fourni par la matrice DREIF).

La demande de déplacements (pour différents motifs) est décrite par une matrice statique d'une heure. Le tableau 8 décrit la répartition des déplacements par origine (Paris ou Banlieue) – destination (Paris ou Banlieue) selon la matrice statique d'une heure de la DREIF. La majorité des déplacements (762.550) s'effectue de banlieue à banlieue. Notons que contrairement à la matrice statique de l'IAURIF, il n'existe pas de déplacements intra-zones dans la matrice de déplacements de la DREIF.

**Tableau 8 : répartition spatiale des déplacements  
(source DREIF)**

Origine – destination	Nombre de déplacements	Part dans le nombre total de déplacements
Paris – Paris	62.350	6.55%
Paris – Banlieue	127.100	13.35%
Banlieue – Banlieue	762.550	80.10%
<b>Total</b>	<b>952.000</b>	<b>100%</b>

### 3.3 Variations simulées

Afin de déterminer la meilleure simulation, nous avons fait évoluer la demande totale d'une part et la capacité du réseau d'autre part. Nous avons fait varier l'ensemble des flux des paires origine – destination de façon uniforme en la multipliant par un coefficient allant de 3 à 5 avec un pas de 0,25. La variation de la demande sous jacente est décrite dans le tableau 9 ci-dessous :

**Tableau 9 : variation du coefficient de la demande et de la demande totale**

Coefficient multiplicateur ( <i>n</i> )	<b>1,00</b>	<b>3,00</b>	<b>3,25</b>	<b>3,50</b>	<b>3,75</b>
Demande totale	952.000	2.856.000	3.094.000	3.332.000	3.570.000
Coefficient multiplicateur ( <i>n</i> )	<b>4,00</b>	<b>4,25</b>	<b>4,50</b>	<b>4,75</b>	<b>5,00</b>
Demande totale	3.808.000	4.046.000	4.284.000	4.522.000	4.760.000

Du côté offre, nous avons multiplié les capacités par un coefficient allant de 0,80 à 1,10 avec un pas de 0,05.

## 4 Résultats agrégés du calage

Dans cette section, nous présentons les résultats de calcul des critères. Nous présentons respectivement les critères de calage dans l'ordre suivant : (1) distribution des déplacements, (2) nombre de déplacements EGT, (3) nombre de départs DREIF et (4) le critère synthétique.

### 4.1 Modèle du goulot d'étranglement

Le tableau 10 représente les valeurs des critères des simulations. Pour chacun des couples  $(n ; \kappa)$ , nous présentons respectivement les valeurs des critères dans l'ordre décrit dans le paragraphe précédent. La plus faible valeur du critère moyen est égale à 4,76% et elle correspond au couple  $(n ; \kappa) = (3,75 ; 0,80)$ . Le critère synthétique est de l'ordre de 3,49%.

**Tableau 10 : valeurs des critères de calage**

Variation du coefficient de la demande $n$		Variation du coefficient de la capacité $\kappa$						
		0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
3,00	$\hat{C}_P$	14,00	16,04	17,90	19,24	19,95	20,45	21,83
	$\hat{C}_{OD}$	25,56	27,30	29,08	30,38	31,56	32,70	33,91
	$\hat{C}_{DREIF}$	14,73	14,13	13,69	13,46	13,34	13,29	12,85
	$\bar{C}$	18,09	19,16	20,22	21,03	21,62	22,15	22,86
3,25	$\hat{C}_P$	11,86	13,00	15,51	16,99	18,35	19,58	20,40
	$\hat{C}_{OD}$	17,03	18,57	20,90	22,16	23,55	25,18	26,44
	$\hat{C}_{DREIF}$	8,92	7,85	7,17	6,74	6,43	6,19	6,05
	$\bar{C}$	12,60	13,14	14,53	15,30	16,11	16,98	17,63
3,50	$\hat{C}_P$	8,21	10,40	12,74	14,21	16,17	17,21	18,26
	$\hat{C}_{OD}$	9,06	10,39	12,37	13,65	15,78	16,22	18,87
	$\hat{C}_{DREIF}$	3,38	2,24	1,50	0,91	1,05	1,20	1,88
	$\bar{C}$	6,88	7,67	8,87	9,59	11,00	12,25	13,00
3,75	$\hat{C}_P$	<b>5,72</b>	7,97	9,91	11,81	13,58	15,93	17,20
	$\hat{C}_{OD}$	<b>2,91</b>	1,95	4,02	5,73	8,30	9,70	11,58
	$\hat{C}_{DREIF}$	<b>1,83</b>	3,48	4,71	5,65	6,46	7,23	7,70
	$\bar{C}$	<b>3,49</b>	4,46	6,21	7,73	9,45	10,96	12,16
4,00	$\hat{C}_P$	3,50	5,53	7,44	10,03	11,68	13,69	14,73
	$\hat{C}_{OD}$	8,89	8,34	7,36	6,34	5,06	4,04	5,13
	$\hat{C}_{DREIF}$	6,68	8,66	10,20	11,38	12,30	13,33	14,09
	$\bar{C}$	6,36	7,51	8,33	9,25	9,68	10,35	11,32
4,25	$\hat{C}_P$	4,85	3,50	5,38	7,37	9,00	11,12	12,89
	$\hat{C}_{OD}$	15,49	15,26	14,46	13,25	12,13	10,84	9,55
	$\hat{C}_{DREIF}$	10,95	13,14	14,86	16,34	17,74	18,81	19,93
	$\bar{C}$	10,43	10,63	11,56	12,32	12,96	13,59	14,12

<b>4,50</b>	$\hat{C}_P$	5,94	4,89	3,67	5,18	6,84	8,87	10,73
	$\hat{C}_{OD}$	22,23	21,00	20,42	20,31	19,84	18,81	16,89
	$\hat{C}_{DREIF}$	14,77	17,12	19,16	21,07	22,73	24,39	25,42
	$\bar{C}$	14,31	14,34	14,42	15,52	16,47	17,36	17,68
<b>4,75</b>	$\hat{C}_P$	6,91	5,77	5,08	3,91	4,95	6,71	8,59
	$\hat{C}_{OD}$	28,60	29,07	28,17	27,14	26,48	25,48	24,62
	$\hat{C}_{DREIF}$	18,88	22,02	24,28	26,30	27,95	29,51	30,87
	$\bar{C}$	18,13	18,95	19,18	19,12	19,79	20,57	21,36
<b>5,00</b>	$\hat{C}_P$	7,49	6,84	5,83	4,82	3,63	5,22	6,91
	$\hat{C}_{OD}$	35,30	35,41	34,77	34,85	33,71	32,77	31,20
	$\hat{C}_{DREIF}$	22,50	25,76	28,41	30,60	33,07	35,01	36,47
	$\bar{C}$	21,76	22,67	23,00	23,42	23,47	24,33	24,86

#### 4.2 Modèle de Greenberg modifié

Comme dans le cas du réseau de l'IAURIF, nous avons effectué des simulations en supposant une fonction de congestion de type Greenberg. La meilleure simulation dans ce cas correspond également à un coefficient multiplicateur de la demande  $n=3,75$  et à un coefficient de la capacité  $\kappa=0,80$ . Pour cette simulation (en terme de critère synthétique), nous obtenons les valeurs suivantes :

- (1) Le critère de la distribution des déplacements = 4,55%,
- (2) Le critère du nombre de déplacements EGT = 7,23%,
- (3) Le critère du nombre de départs DREIF = 4,73%, et
- (4) Le critère synthétique = 5,50%.

Le tableau 11 donne un résumé des principaux résultats du calage pour les deux modèles (goulot d'étranglement et Greenberg modifiée). La différence en termes du critère synthétique entre les deux modèles est de 2 points. Il est de l'ordre de 3,49% dans le cas du premier modèle et de l'ordre de 5,50% dans le cas du second modèle.

**Tableau 11 : récapitulatif de comparaisons**

Type de fonction de congestion	Goulot d'étranglement	Greenberg modifiée
Multiplicateur de la capacité $\kappa$	0,80	0,80
Multiplicateur de la demande $n$	3,75	3,75
Demande totale	3.570.000	3.570.000
Critère de la distribution des déplacements	5,72	4,55
Critère du nombre de déplacements EGT	2,91	7,23
Critère du nombre de départs DREIF	1,83	4,73
Critère synthétique	3,49	5,50

## 5 Mesures d'efficacité et comparaisons

Le tableau 12 présente les valeurs des mesures d'efficacité calculées directement par METROPOLIS. La différence entre les deux simulations est d'environ 2 minutes. Cependant, cette différence importante en temps de trajet se traduit par un volume de déplacement plus important dans le cas du second modèle soit 54 millions de véhicules kilomètres au lieu de 51,30 millions véhicules kilomètres. Les usagers du réseau dans le cas du second modèle effectuent en moyenne 15,12 kilomètres de trajet alors que dans le premier modèle leur distance moyenne est de l'ordre de 14,40 kilomètres. Rappelons que le réseau de la DREIF est très désagrégé ce qui explique le nombre élevé de liens utilisés par les usagers lors de leur déplacement (32,88 liens pour le premier modèle et 56,74 pour le second modèle). Le modèle avec fonction goulot d'étranglement donne des résultats proches de ceux calculés à partir des données de l'affectation de la DREIF (voir tableau 6).

**Tableau 12 : mesures agrégées de l'efficacité du trafic**

Mesures d'efficacité	Goulot d'étranglement	Greenberg modifié
Temps de trajet total [min]	26,64	28,08
Délai d'arrivée précoce [min]	26,98	25,59
Délai d'arrivée tardif [min]	18,73	23,41
Vitesse moyenne [km/h]	37,18	24,49
Part des arrivées précoces [%]	50,00	46,00
Part des arrivées tardives [%]	30,29	34,44
Coût moyen total [€]	8,14	8,76
Coût du temps de trajet à vide [€]	3,97	4,29
Coût du temps d'attente [€]	1,79	1,78
Coût moyen de déshorage [€]	2,39	2,69
Volume total des déplacements [millions de véh.km]	51,30	54,00
Distance moyenne parcourue [km]	14,40	15,12
Nombre d'arcs utilisés par individu	32,88	56,74
Indice de congestion	61,68	66,19

Le tableau 13 présente les résultats des mesures d'efficacité par type d'individu. Si on ne tient pas compte des heures désirées d'arrivée, nous distinguons trois types d'individus qui se différencient pas leur coût unitaire de deshorage. Cette désagrégation a été effectuée pour les deux types de modèles (modèle avec fonction de congestion de type goulot d'étranglement et modèle avec fonction de congestion de type Greenberg modifiée).

Pour le premier type, se sont les individus du deuxième groupe qui subissent le temps de trajet le plus élevé (30,82 minutes). Etant donné que leurs coûts unitaires de déshorage sont très élevés, ils préfèrent passer plus de temps dans les files d'attente que d'arriver en avance ou en retard. Par conséquent, ils subissent le coût moyen le plus élevé (8,86 €) dont la composante principale est due au coût du temps de trajet (6,66 €). Notons que c'est ce groupe (groupe 3) qui subit le coût de déshorage le plus faible (14,45 minutes).

**Tableau 13 : mesures d'efficacité désagrégées par groupe d'utilisateurs**

Mesures d'efficacité	Goulot d'étranglement			Greenberg modifié		
	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Coût unitaire d'une arrivée précoce [€/h]	6,08	8,37	5,24	6,08	8,37	5,24
Coût unitaire d'une arrivée tardive [€/h]	7,52	17,44	10,63	7,52	17,44	10,63
Temps de trajet [min]	23,83	30,82	25,70	28,46	28,08	27,86
Délai d'arrivée précoce [min]	31,14	16,98	30,78	30,83	14,91	29,19
Délai d'arrivée tardive [min]	24,28	14,74	17,93	28,85	23,70	20,01
Part des arrivées précoces [%]	48,79	47,97	51,96	44,60	42,88	48,77
Part des arrivées tardives [%]	35,96	24,90	30,31	40,93	29,28	33,84
Coût moyen total [€]	7,78	8,86	7,91	9,02	8,97	8,46
Coût du temps de trajet [€]	5,15	6,65	5,52	6,15	6,06	6,02
Coût moyen de déshorage [€]	2,63	2,20	2,36	2,87	2,91	2,44
Coût de déshorage précoce [€]	3,16	2,37	2,69	3,12	2,08	2,55
Coût de déshorage tardif [€]	3,04	4,28	3,18	3,61	6,89	3,54

La figure 3 ci-dessous présente la variation de l'indice de congestion au cours de la matinée. Il représente le rapport entre le temps de trajet total et le temps de trajet à vide sur l'ensemble du réseau. Comme nous pouvons l'observer, pour les deux modèles, le pic de congestion atteint son maximum vers 8h30 avec un niveau de congestion de 1,53. Autrement dit, vers 8h30, les usagers qui se trouvent sur le réseau subissent un temps de trajet supplémentaire de 53% par rapport au temps de trajet à vide.

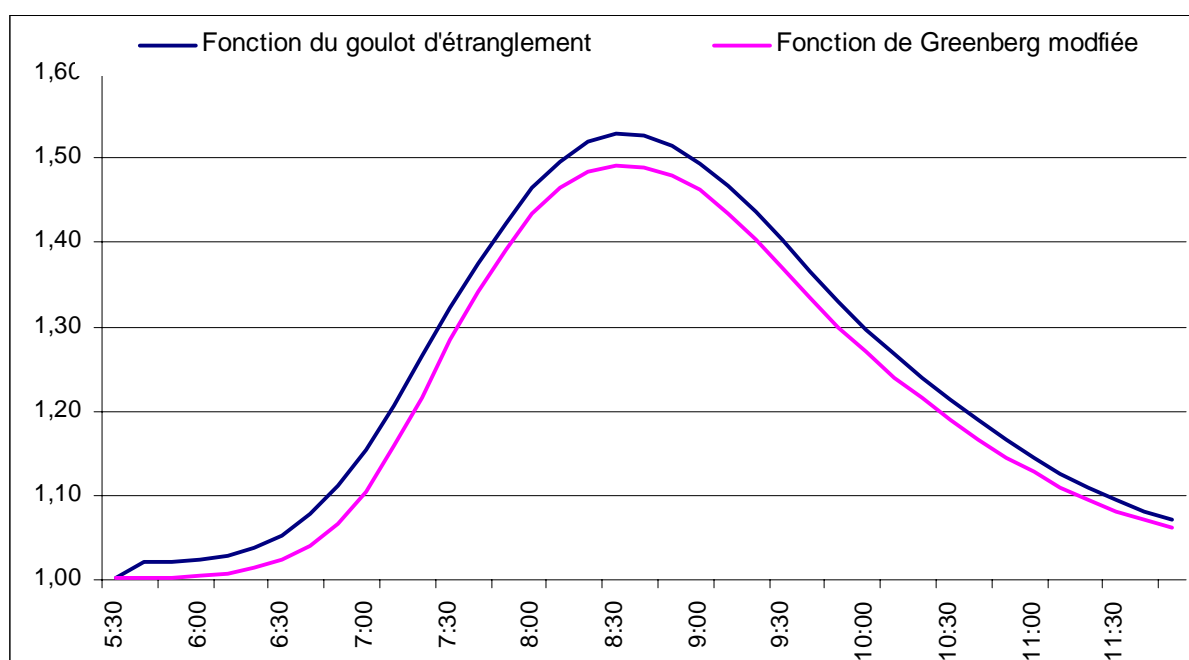


Figure 3 : niveau de la congestion au cours de la matinée

## Conclusion

Au cours du développement du projet QUATUOR, nous avons adapté METROPOLIS à différents types de réseau. Nos premiers tests d'adaptation ont été effectués sur le réseau de l'IAURIF qui est de taille moyenne. Il représente l'ensemble de la voirie de la région Ile-de-France et l'ensemble des déplacements. Le second test d'adaptation concernait le réseau de Nord – Ouest de la DREIF qui décrit de façon détaillée la partie nord – ouest du réseau de l'Ile-de-France. Au cours de cette étape, nous avons rencontré des problèmes relatifs à l'ajustement des fonctions de congestion dans un réseau désagrégé. Par la suite, nous avons adapté METROPOLIS pour le grand réseau désagrégé de l'Ile-de-France. Ce dernier décrit de façon détaillée les intersections. Chaque sens de circulation est défini par un lien. Ce niveau de désagrégation augmente bien sur le nombre de liens en comparaison au réseau de l'IAURIF. Parallèlement le nombre de zones est également plus élevé que dans le cas du réseau de la DREIF.



Lors du calage de ce réseau, nous avons utilisé les paramètres dynamiques fournis par l'enquête MADDIF. Pour l'offre, nous avons utilisé une fonction de congestion de type goulot d'étranglement et une fonction de congestion de type Greenberg modifiée. L'approche de calage suivie consiste à minimiser la moyenne des erreurs par rapport aux indicateurs de calage décrits dans le chapitre 1 de cette partie. Ces indicateurs ont été calculés à partir des données de l'EGT 91.

Pour déterminer un scénario de référence, nous avons, dans un premier temps, calibré les capacités des routes par une modification homothétique de l'ensemble des capacités des routes. Dans un second temps, nous avons modifié la taille de la matrice totale de façon à obtenir celle correspondant à la matrice du modèle statique DAVIS. Pour finir, nous avons effectué un ensemble de simulations afin de déterminer la valeur exacte du coefficient multiplicateur de la capacité et du coefficient multiplicateur de la demande. Le coefficient multiplicateur de la capacité obtenu est égal à 0,80. En d'autres termes, il est nécessaire, lors de l'utilisation d'une fonction de type goulot d'étranglement ou Greenberg, de réduire les capacités des routes de façon homothétique de 20%. En ce qui concerne la demande, nous avons obtenu un coefficient multiplicateur de 3,75 soit une demande totale de 3,57 millions d'utilisateurs pour l'ensemble de la matinée. Effectivement, nous n'avons pas analysé des politiques pour ce réseau, mais un ensemble de politiques a été effectué au cours des deux premières années. La démarche à suivre pour étudier ces politiques reste la même.

En conclusion, sur l'ensemble des déplacements de la matinée, nous avons obtenu un temps de trajet de l'ordre de 27 minutes avec une fonction de goulot d'étranglement et 28 minutes avec une fonction de Greenberg. Ce temps reste assez faible en comparaison au temps de trajet obtenu lors du calage du réseau de l'IAURIF qui était d'environ 32 avec une fonction du goulot et 34 minutes avec une fonction de Greenberg. Dans les deux cas la différence en temps de trajet est de l'ordre de 5 minutes. La distance moyenne parcourue par un usager est de l'ordre de 14 kms dans le premier modèle et 15 kms dans le second modèle, comparable au résultat de l'affectation statique. Le coût total obtenu, dans le cas du premier modèle, est de l'ordre 8,14 € dont 2,39 € sont dus au coût de déshorage soit 30% du coût total. Dans le cas du second modèle, nous obtenons un coût de 8,76 € dont 2,69 € sont dus au coût du déshorage. Dans le troisième chapitre de cette partie, nous comparons les résultats obtenus sur le réseau de la DREIF aux résultats obtenus sur le réseau de l'IAURIF.

## Chapitre 3

# Comparaison des résultats entre deux réseaux : IAURIF et DREIF

## Introduction

Nous avons maintenant adapté l'outil de simulation dynamique METROPOLIS à deux éléments du réseau francilien. La première adaptation concerne le réseau de l'IAURIF qui est de type grande taille et agrégé. La deuxième adaptation concerne le réseau de la DREIF dans son entier (voir chapitre 1, partie 4). Il est défini comme un réseau de grande taille désagrégé.

L'objectif de ce chapitre est de comparer dans un premier temps ces différents types de réseau et dans un second les résultats des simulations effectuées sur chacun d'eux. Le réseau nord-ouest de la DREIF est une partie du réseau global de la DREIF. Par conséquent, il ne sera pas pris en considération dans ces comparaisons. Ce réseau de taille moyenne constituait un bon exercice pour déceler les difficultés pouvant être rencontrées lors de l'adaptation de METROPOLIS au réseau désagrégé.

Ce chapitre se compose de cinq sections. Dans la première section, nous rappelons les caractéristiques des deux réseaux IAURIF et DREIF. Nous mettrons en évidence les différences relatives à la taille du réseau en termes de nombre de liens, de capacité des routes, de longueur de réseau et de vitesses de circulation. Nous mettrons également en évidence les différences en termes de demande et de définition des zones. La seconde section est consacrée aux comparaisons des résultats d'affectations statiques effectuées par l'IAURIF et la DREIF où nous comparons les temps de trajet, les vitesses de circulation et d'autres mesures d'efficacité calculées à partir de ces résultats d'affectation. Comme nous le verrons, même si les temps d'affectation et de simulation sont différents, il n'en est pas moins vrai qu'ils sont très raisonnables comparativement aux développements effectués dans ce domaine par d'autres modèles.

La troisième section concerne la comparaison des données utilisées pour le calage de METROPOLIS aux deux réseaux (IAURIF et DREIF). Au cours de l'adaptation, nous avons dû modifier à plusieurs reprises les données entrantes pour les simulations selon les informations disponibles. Pour le réseau de l'IAURIF, nous avons effectué deux calages. Dans le premier, nous avons effectué une série de simulations et de tests de sensibilité afin de déterminer les valeurs des paramètres de l'offre et de la demande à prendre en compte. Dans le cas de l'offre, nous avons utilisé une fonction de type goulot d'étranglement. Dans le cas de la demande, nous avons collecté les valeurs des paramètres comportementaux dynamiques à partir de la littérature présentant des estimations effectuées pour d'autres villes dans le monde.

Dans le second calage, les valeurs de paramètres relatifs à l'offre et la demande étaient disponibles (voir partie 2). Dans le cas de l'offre, nous avons estimé des fonctions de congestion à partir des données de comptage fournies par le SIER et la DREIF. Dans le cas de la demande, nous avons utilisé les valeurs des paramètres comportementaux dynamiques estimées à partir des données de l'enquête MADDIF.

Dans les quatre calages, nous avons ajusté la demande totale. Les matrices fournies par l'IAURIF et la DREIF représentent le nombre de départs pendant le pic horaire. Ces matrices sont calibrées à leur tour par des modèles de génération et de distribution des déplacements (modèle Global pour l'IAURIF et MODUS pour la DREIF). Dans notre cas, nous étions obligés d'augmenter les matrices globales de façon à obtenir les mêmes matrices statiques d'une heure que celles de l'IAURIF et de la DREIF. A cet effet, nous avons développé des critères de calage à minimiser (voir chapitre 1, partie 3). Le fait que le calcul de ces critères soit le même pour l'ensemble de ces calages simplifie la comparaison des résultats de simulation. La quatrième section est consacrée à la comparaison des critères de calage mais également aux résultats des simulations. Pour conclure, les remarques et les observations sont abordés dans la dernière section.

## 1 Réseau IAURIF versus réseau DREIF

Le projet QUATUOR consiste à développer et adapter l'outil de simulation dynamique des déplacements des usagers de la voiture particulière à des fins de planification et de gestion des réseaux. Dans le cas des grands réseaux, il est souvent fait appel à des modèles d'affectation statiques. Cependant, ce type de modèle ne rend pas en compte de l'évolution de la congestion au cours de la journée. Pour cette raison, les modèles dynamiques ont fait leur apparition. Une description détaillée des modèles les plus utilisés est faite dans Ran et Boyce (1994) ou bien dans Bliemer (2001) selon que l'on dispose de modèles microscopiques, mésoscopiques ou macroscopiques. L'un des inconvénients des modèles microscopiques est qu'ils nécessitent des temps de calcul très élevés. De ce fait, leur utilisation se limite à des réseaux de petite taille. Le modèle de simulation utilisé offre l'avantage de prendre en compte la dynamique complète et de s'adapter à des réseaux de grandes tailles (voir de Palma et al., 2001).

Dans cette section, nous abordons les différences existantes entre les deux réseaux IAURIF et DREIF. Nous commençons par aborder les aspects relatifs à l'offre et puis les aspects relatifs à la demande.

### 1.1 Comparaison typologique du réseau

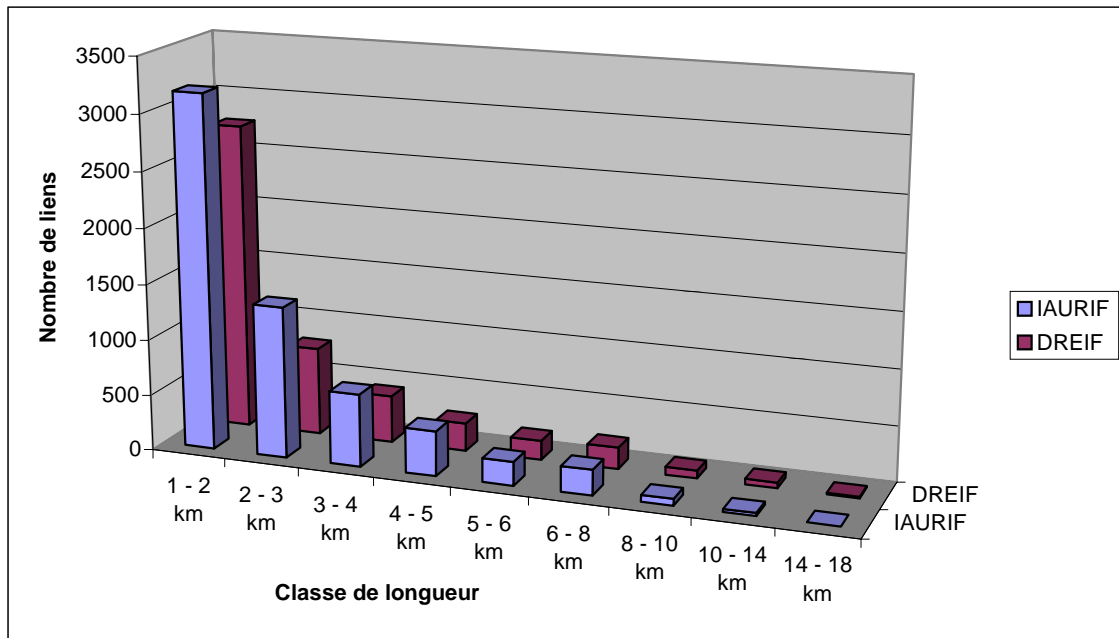
Les deux réseaux couvrent la même surface soit 12.012 km<sup>2</sup> qui correspondent à la surface de la région de l'Ile-de-France. Le tableau 1 décrit la différence entre les deux réseaux en termes de nombre de liens, de la longueur totale du réseau et de capacité totale du réseau.

**Tableau 1 : description générale des deux réseaux**

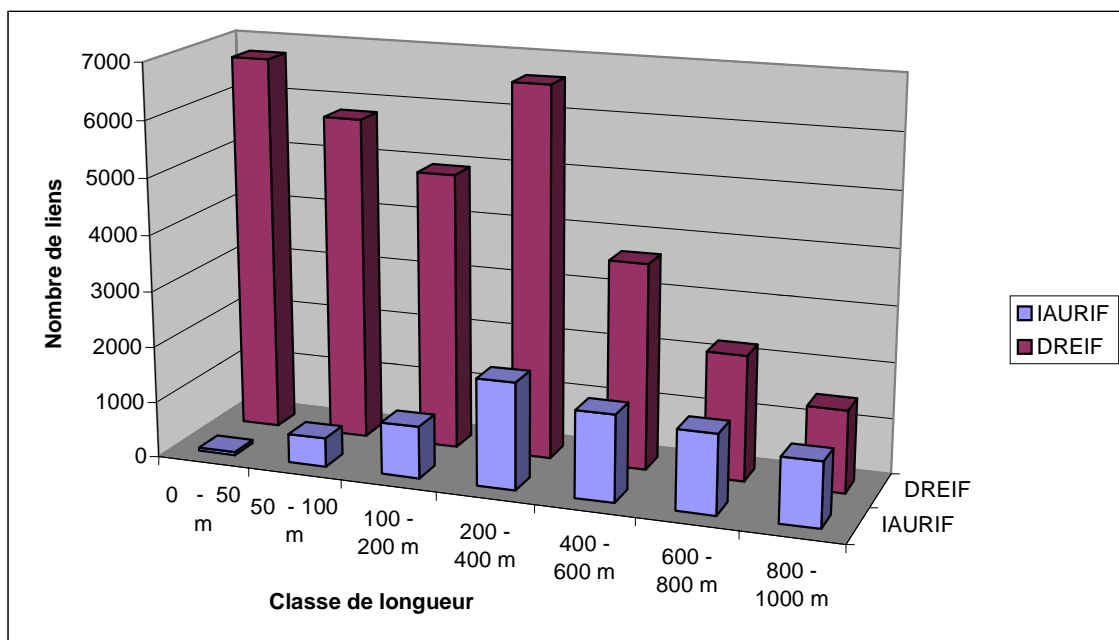
Réseau	Nombre de liens	Longueur du réseau [km]	Capacité du réseau [véh/h]
IAURIF	13.631	18.819	28.442.924
DREIF	36.200	19.679	33.875.983

La nombre de liens dans le réseau de la DREIF est trois fois plus élevé (36.200) que dans celui de l'IAURIF (13.631). Cependant les longueurs respectives sont assez proches : 18.819 km pour le réseau et 19.679 km. Cette différence s'explique par le nombre très élevé de petits liens sur le réseau de la DREIF. La figure 1 représente la répartition du nombre de liens de

longueur supérieure à 1 km, en fonction de la longueur pour les deux réseaux. Pour chaque classe de longueur, nous observons que le nombre de liens est plus élevé dans le réseau de l'IAURIF. Cette observation n'est pas vérifiée dans le cas des liens de longueur inférieure à 1 km. Comme le montre la figure 2, le nombre de liens est plus élevé dans le réseau de la DREIF. Notons que cette observation reste vérifiée pour chaque classe de longueur.



**Figure 1 : répartition du nombre de liens de longueur supérieure à 1 km**

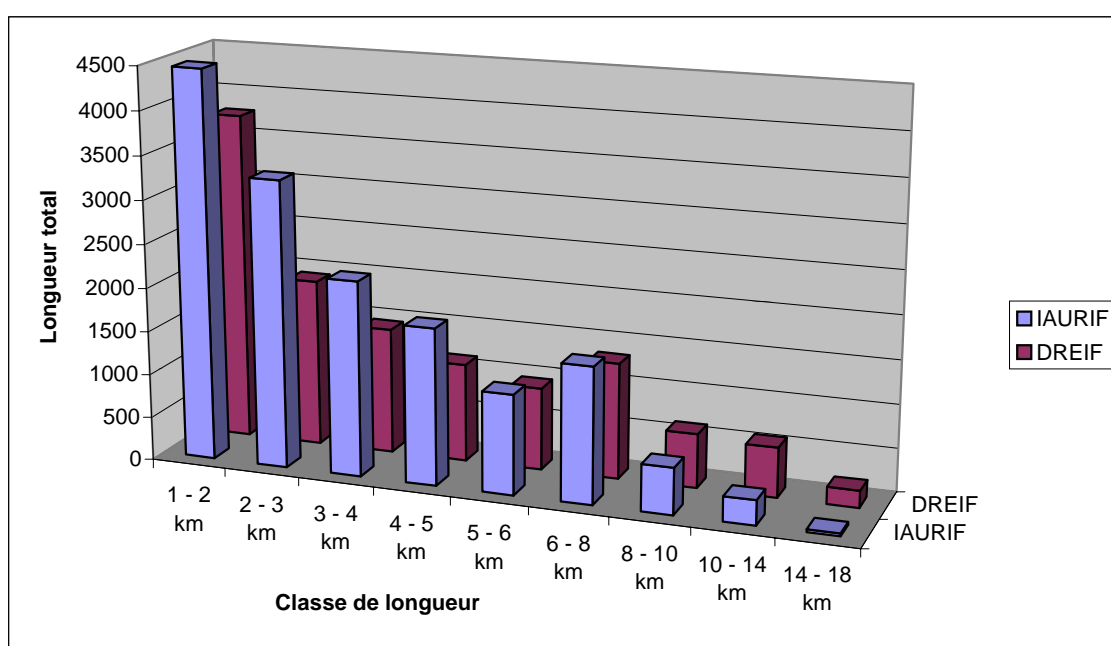


**Figure 2 : répartition du nombre de liens de longueur inférieure à 1 km**

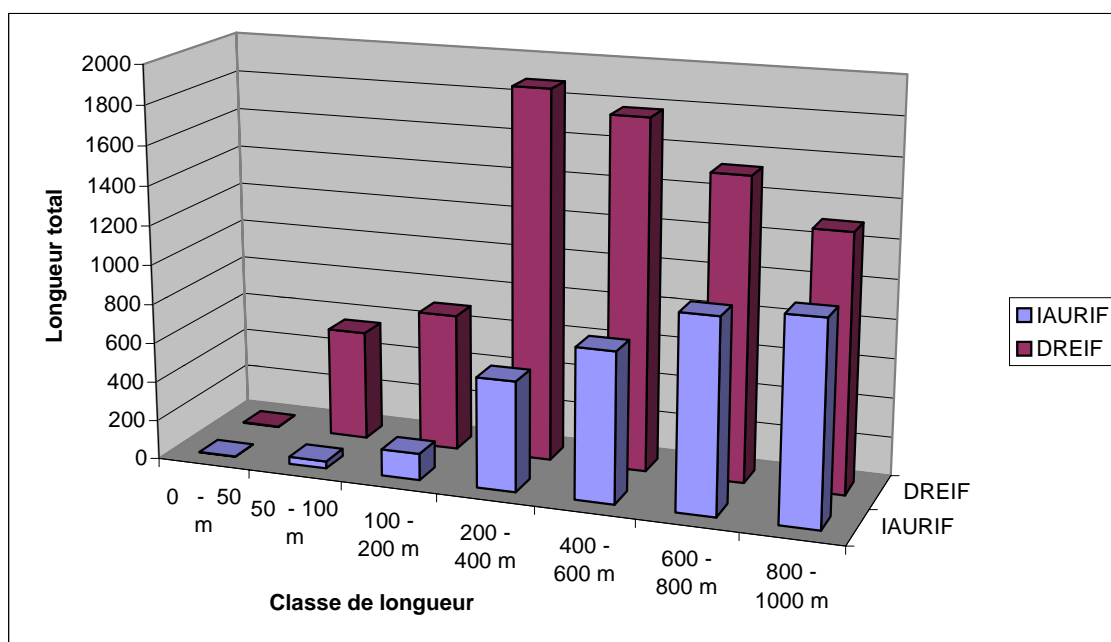
Cette différence de répartition des longueurs dans le cas des petits liens s'explique, d'une part, par le nombre de connecteurs très élevé puisque le nombre de zones est plus élevé que dans le réseau de l'IAURIF. D'autre part, le niveau désagrégé du réseau de la DREIF explique cette

différence parce que le sens de circulation à chaque intersection est décrit par tous les sens possibles.

Comme nous l'avons observé dans le tableau 1, les longueurs totales des deux réseaux sont assez proches. Mais puisque le nombre de liens est plus élevé dans le réseau de la DREIF il est naturel d'observer que les liens sont plus longs sur le réseau de l'IAURIF. La figure 3 montre la répartition de la longueur totale des liens en fonction de classe de longueur. Pour chaque classe de longueur, nous observons que la longueur totale est plus élevée dans la cas de l'IAURIF. La figure 4 représente la même répartition mais pour des classes de liens inférieurs à 1 km. Cependant dans ce cas, la longueur totale des liens est plus élevée dans le réseau de la DREIF.



**Figure 3 : répartition de la longueur totale (liens de longueur supérieure à 1 km)**



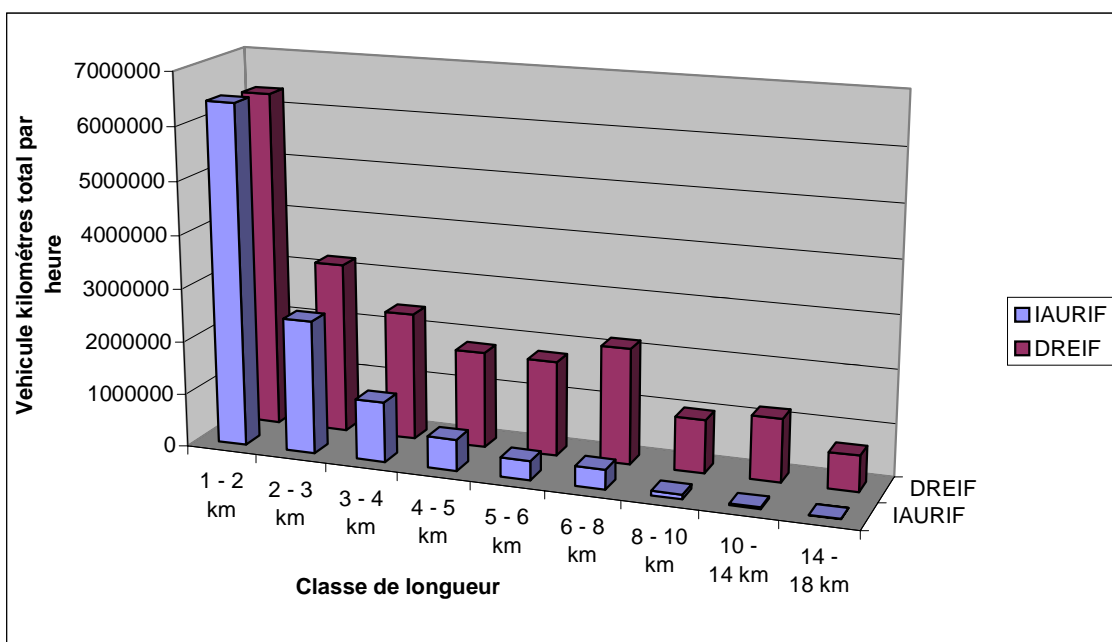
**Figure 4 : répartition de la longueur totale (liens de longueur inférieure à 1 km)**

Le tableau 2 donne la répartition du nombre de liens en fonction de la vitesse. Dans le cas du réseau de l'IAURIF, il n'existe aucun lien dont la vitesse de circulation à vide est inférieure à 20 km/h. Alors qu'il existe 4715 liens avec une vitesse à vide inférieure à 20 km/h. La différence importante s'observe également pour les liens dont la vitesse est supérieure à 80 km/h. Dans le réseau de la DREIF, le nombre de ces liens est de 8 alors que pour le réseau de l'IAURIF, il existe 834 liens dont la vitesse est supérieure à 80 km/h. La vitesse moyenne de circulation sur le réseau de l'IAURIF (52 km/h) est supérieure à celle de la DREIF (37km/h).

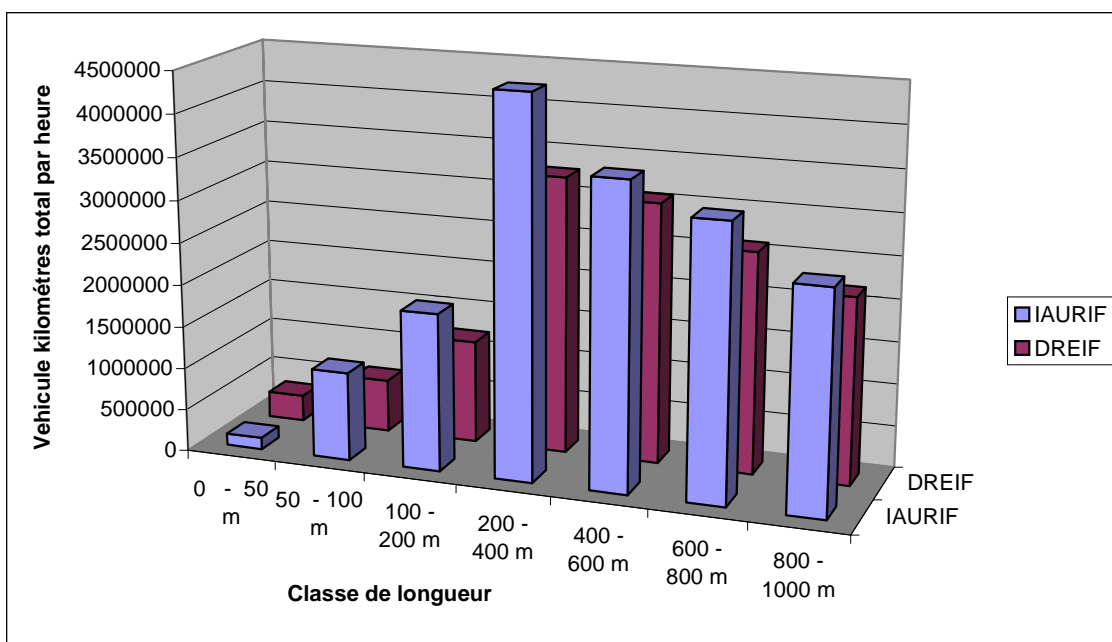
**Tableau 2 : répartition du nombre de liens en fonction de la vitesse**

Vitesse de circulation à vide [km/h]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	Total
<b>IAURIF</b>	0	0	472	4348	4196	3200	244	337	410	310	114	13631
<b>DREIF</b>	1581	3134	15180	9770	2156	2611	934	824	6	2	2	36200

Nous avons également effectué une comparaison en termes de capacité totale par classe de longueur. Les figures 5 et 6 présentent la répartition de la capacité totale en fonction des classes de longueur. La figure 5 concerne les liens dont la longueur est supérieure à 1 km. Nous observons que les capacités totales sont plus importantes dans le cas du réseau de la DREIF sauf pour les liens dont la longueur est comprise entre 1 et 2 kms pour lesquels les capacités totales sont presque égales. Enfin, dans le cas de liens de longueur inférieure à 1 km, les capacités totales du réseau de l'IAURIF sont plus importantes (voir figure 6).



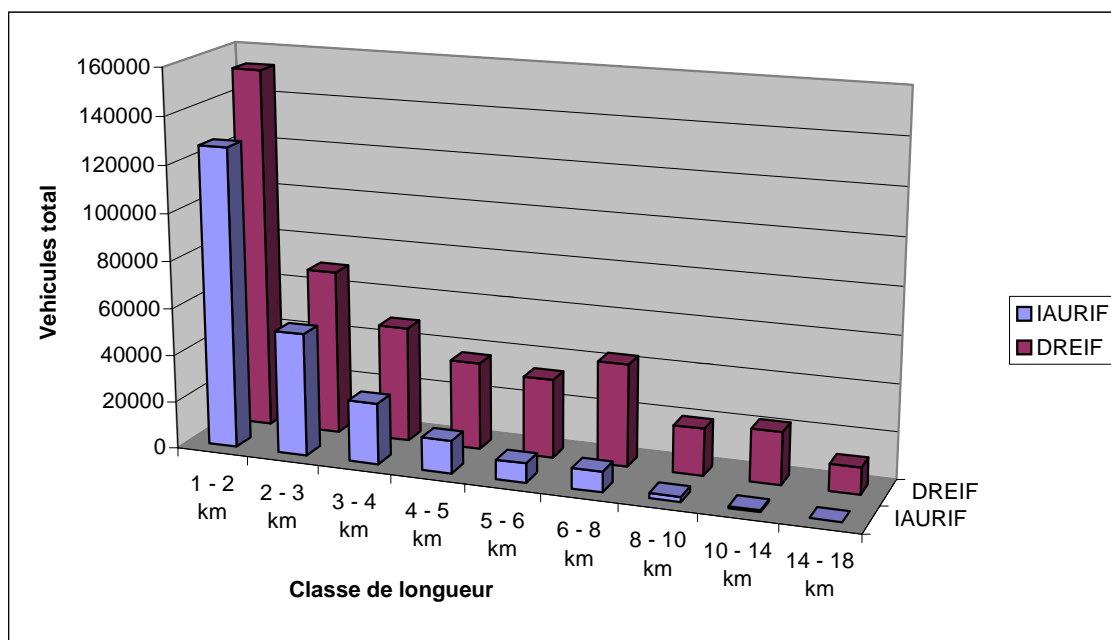
**Figure 5 : répartition de la capacité totale (liens de longueur supérieure à 1 km)**



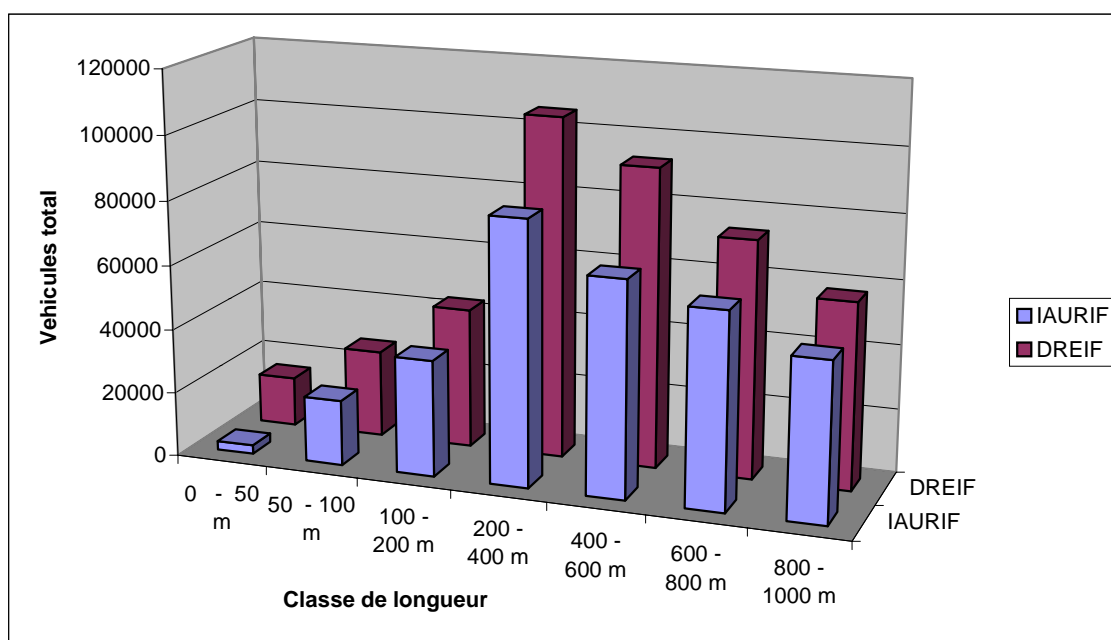
**Figure 6 : répartition de la capacité totale (liens de longueur inférieure à 1 km)**



A partir des observations relatives à la répartition des vitesses à vide dans le réseau et les capacités, nous constatons que la DREIF accorde plus de préférence au calage des capacités qu'au calage des vitesses à vide. Une charge plus élevée suppose que le réseau supporte une demande plus élevée dans le cas de la DREIF que dans le cas de l'IAURIF. Cette différence en termes de charge totale est présentée dans les figures 7 et 8.



**Figure 7 : répartition de la charge totale (liens de longueur supérieure à 1 km)**



**Figure 8 : répartition de la charge totale (liens de longueur inférieure à 1 km)**

Rappelons que la charge totale se calcule comme suit :

$$Ch_j = \sum_i \frac{q_{ij} l_{ij}}{V_{ij}},$$

où  $i$  représente un lien de classe de longueur  $j$ ,

$q_{ij}$  : capacité de la route  $i$ ,

$l_{ij}$  : longueur de la route  $i$ , et

$V_{ij}$  : vitesse de circulation à vide sur la route  $i$ .

Cependant, l'IAURIF donne plus d'importance à la vitesse à vide comme nous avons pu le constater dans le tableau 2. Cette différence entre les deux réseaux par rapport à la charge totale et la vitesse à vide s'explique de façon indirecte par l'objectif des deux organismes (IAURIF et DREIF). L'IAURIF utilise un modèle d'affectation à des fins de planification et de gestion de réseau. Par conséquent, cela revient à accorder plus d'importance au temps de trajet et donc à la vitesse de circulation. Par ailleurs, la DREIF utilise le modèle d'affectation statique à des buts de calage de la demande dans le modèle MODUS. Ces différences ont été développées dans la partie 1 du rapport de l'année 1 du projet QUATUOR lors de l'enquête effectuée auprès des opérateurs franciliens.

Etant donné l'ensemble de ces différences entre les deux réseaux par rapport aux capacités et aux vitesses de circulation, il nous semble plausible que les valeurs des paramètres de calage final (comme le coefficient multiplicateur de la capacité) ne soient pas les mêmes.

## 1.2 Comparaison de la demande

Les deux organismes utilisent des modèles de planification à quatre étapes pour calculer les matrices de déplacements origine – destination. Les deux organismes utilisent à cet effet, des modèles développés en interne. La DREIF utilise le modèle MODUS pour calibrer la matrice origine – destination alors que l'IAURIF utilise le modèle GLOBAL. D'une part le nombre de zones considéré par l'IAURIF est plus faible que celui de la DREIF (de l'ordre de 522 et 1.305 zones). Cela constitue un second aspect du niveau de désagrégation des données de la DREIF.

Les deux organismes utilisent des approches différentes pour le calage de leur matrice O-D au cours des étapes des modèles de génération des déplacements. Pour la première étape du modèle qui est la génération des déplacements, l'IAURIF utilise une approche par facteur de croissance alors que la DREIF utilise une approche de régression linéaire. L'avantage de la seconde approche réside dans le fait qu'il existe un modèle explicatif pour la génération des déplacements.

Pour l'étape de distribution, l'IAURIF utilise un modèle gravitaire sans prise en compte de la congestion, tel que :

$$T_{od} = \frac{\alpha T_o T_d}{(d_{od})^\beta}.$$

où :

$T_{od}$  : nombre de déplacements entre l'origine  $o$  et la destination  $n$ ,

$T_o$  : trafic émis à l'origine  $o$ ,

$T_n$  : trafic reçu à la destination  $n$ ,

$d_{od}$  : distance entre l'origine et la destination sans congestion,

$\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres à calibrer à partir des données de l'EGT.

Par ailleurs, la méthode de distribution de la DREIF considère un modèle gravitaire avec une fonction d'impédance exponentielle

$$T_{od} = T_o T_d \exp\left[-\frac{C_{od}}{\tau}\right] h_o k_d.$$

où  $h_o$ ,  $k_d$  et  $\tau$  sont des paramètres à calibrer.

Enfin, le choix du modèle est également calibré de façon différente. L'IAURIF utilise un modèle de répartition modale agrégé où seulement le coût généralisé est pris en compte. Alors que la DREIF utilise un modèle de forme logit désagrégé par motif de déplacements avec prise en compte du coût généralisé de déplacement  $C_{od}$ .

La matrice totale utilisée dans les simulations constitue le résultat de ces différentes étapes de calage. Au vu de ces différences dans la démarche de calage, il est peut probable que les matrices des deux organismes soient semblables. Puisque les matrices fournies par les deux organismes sont différentes, il est possible que, lors du calage de METROPOLIS aux deux réseaux, les demandes totales soient différentes ; ce qui se traduit par une différence des coefficients multiplicateurs de la demande.

### 1.3 Comparaisons des résultats d'affectation

Pour conclure cette section, nous présentons les différences des affectations sur les deux réseaux. Le tableau 3 présente les valeurs des critères des affectations pour les deux réseaux. Les formules de calcul de ces critères ont été développées dans le chapitre 2 de cette partie.

**Tableau 3 : valeurs des critères de l'affectation de la DREIF**

	IAURIF (1)	DREIF (2)	Différence (1)-(2) [%]
Temps de trajet [min]	44,71	40,71	9,83
Temps de trajet à vide [min]	24,23	22,64	7,02
Volume total des déplacements [millions de véh.km]	11,57	14,53	-20,37
Distance parcourue par usager [km]	13,84	13,88	-0,29
Vitesse moyenne par usager [km/h]	18,57	20,45	-9,19
Vitesse maximale par usager [km/h]	34,27	36,77	-6,80
Congestion [%]	84,00	80,00	5,00

Les résultats d'affectation pour les deux réseaux sont assez proches. En effet, le temps de trajet marque une différence de l'ordre de 4 minutes. Cette différence semble surtout due à la faible capacité des routes du réseau de l'IAURIF. En général, les résultats des affectations sont assez proches puisque l'on observe des différences inférieures à 10% en valeur absolue à l'exception de la distance parcourue par les usagers où la différence est de l'ordre de 20%, ce qui peut s'expliquer par le fait que la demande totale est plus élevée dans le réseau de la DREIF car il tient compte des déplacements intra-zones.

## 2 Scénarios de référence pour METROPOLIS

Etant donnés les deux réseaux pris en compte et les deux types de fonctions de congestion retenues, nous avons quatre scénarios de référence à discuter dans cette section.

1. **Scénario IAURIF 1** : correspond au calage du réseau de l'IAURIF en prenant en compte une fonction de type goulot d'étranglement,
2. **Scénario IAURIF 2** : correspond au calage du réseau de l'IAURIF en prenant en compte une fonction de type Greenberg,
3. **Scénario DREIF 1** : correspond au calage du réseau de la DREIF en prenant en compte une fonction de type goulot d'étranglement, et
4. **Scénario DREIF 2** : correspond au calage au réseau de la DREIF en prenant en compte une fonction de type Greenberg.

Les paramètres comportementaux utilisés dans les calages des deux réseaux sont semblables. Ils sont estimés à partir des données de l'enquête MADDIF. Le tableau 4 ci-dessous représente les valeurs des paramètres utilisés dans METROPOLIS. Nous avons distingué quatre groupe d'usagers qui se différencient par leur motif de déplacements et par leur origine et destination. Les deux premiers groupes concernent les déplacements pour le motif travail mais se distinguent par leur destination : (1) vers Paris et Petite couronne et (2) vers Grande couronne. Les deux derniers concernent les déplacements pour les motifs autre que le travail. Ils se distinguent par leur heure d'arrivée désirée. Le seul facteur commun entre ces quatre

groupes est la valeur du temps qui est égale à la valeur tutélaire soit 12,96 €/h.

**Tableau 4 : valeurs utilisées dans METROPOLIS**

Segments	Tailles	$\alpha$ [€/h]	$\beta$ [€/h]	$\gamma$ [€/h]	$\mu$ [€]	$t^* (m, \sigma)$ [h:m, m]
Travail vers Paris et PC	648	12,96	6,08	7,52	2,67	(08:29, 60)
Travail vers GC	509	12,96	8,37	17,44	1,66	(08:24, 50)
Autres motifs (groupe 1)	250	12,96	5,24	10,63	2,43	(08:54, 54)
Autres motifs (groupe 2)	294	12,96	5,24	10,63	2,43	(10:49, 53)

Nous avons considéré que les paramètres dynamiques décrits dans le tableau 4 sont constants pour les quatre scénarios. Par conséquent, le calage consiste à modifier la taille des matrices statiques et les capacités de façon uniforme de façon à satisfaire les critères de calage (voir chapitre 1 et 2). Le tableau 5 donne un récapitulatif des variations effectuées pour déterminer les quatre scénarios de référence.

**Tableau 5 : description des scénarios de référence**

Scénarios de référence	Scénario IAURIF 1	Scénario IAURIF 2	Scénario DREIF 1	Scénario DREIF 2
Taille de la matrice d'une heure	970.000	970.000	952.000	952.000
Coefficient multiplicateur de la demande $n$	3,75	3,50	3,75	3,75
Taille de la matrice totale	3.637.500	3.395.000	3.570.000	3.570.000
Coefficient de la capacité $k$	0,90	0,95	0,80	0,80

La matrice statique d'une heure du pic fournie par l'IAURIF représente 970.000 déplacements pour différents motifs. En comparaison, la matrice statique d'une heure du pic fournie par la DREIF concerne 952.000 déplacements : soit une différence de 28.000 usagers. A titre d'exemple, dans le cas du scénario IAURIF 1 avec une fonction du goulot, nous avons multiplié la matrice initiale d'une heure par un coefficient égal à 3,75 afin de représenter l'ensemble des déplacements de la matinée et nous avons réduit la capacité de 10% en multipliant les capacités de toutes les routes par 0,90.

### 3 Résultats des scénarios de référence

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation pour chacun de ces scénarios. Nous effectuons dans un premier temps une comparaison des critères de calage et dans un second temps, nous présentons les résultats des mesures d'efficacité pour chacun d'entre eux.

#### 3.1 Critères de calage

Pour chacun des trois scénarios, nous avons calculé des critères de calage à minimiser. Les définitions de ces critères ont été développées dans les chapitres 1 et 2. Le tableau 6 présente les valeurs des critères pour les différents scénarios.

**Tableau 6 : valeurs des critères de calage**

<b>Critères de calage [%]</b>	<b>Scénario IAURIF 1</b>	<b>Scénario IAURIF 2</b>	<b>Scénario DREIF 1</b>	<b>Scénario DREIF 2</b>
Critère de la distribution des temps de trajet	6,13	4,60	5,72	4,55
Critère du nombre de déplacements	6,29	9,67	2,91	7,23
Critère de nombre de départs	1,86	6,26	1,83	4,73
<b>Critère moyen</b>	<b>4,76</b>	<b>6,84</b>	<b>3,49</b>	<b>5,50</b>

La valeur du critère moyen varie entre 3% et 7%. Le meilleur critère moyen correspond au scénario DREIF 1 qui de l'ordre de 3,49%. Notons que c'est le scénario DREIF 1 qui permet de reproduire les données de l'EGT.

#### **4 Résultats des simulations et comparaisons**

Le tableau 7 présente les résultats relatifs aux différents scénarios présentés plus haut. Le temps trajet moyen est plus élevé sur le réseau de l'IAURIF que sur le réseau de la DREIF, soit une différence d'environ 6 minutes. Cette constatation reste vraie quelle que soit la fonction de congestion utilisée. Cette différence provient essentiellement de la différence en temps de trajet à vide. Par exemple dans le cas de scénarios avec fonction du goulot d'étranglement, nous avons un coût moyen de 9,47 € pour le scénario IAURIF 1 et un coût moyen de 8,14 € pour le réseau DREIF 1, soit une différence en coût total de 1,37 €. Cette différence est due majoritairement à la différence en coût de temps de trajet à vide qui est de l'ordre de 1,29 €. Dans le cas du scénario IAURIF 1, nous avons un temps de trajet à vide de 24,34 minutes alors que dans le cas du scénario DREIF 1, nous avons un temps de trajet à vide de 18,37 minutes, soit une différence d'environ 6 minutes. L'existence de cette différence en temps de trajet à vide peut s'expliquer le nombre élevé de zones dans le réseau de la DREIF qui se traduit par des distances moyennes parcourues plus petites comme nous pouvons le constater dans le tableau 7.

**Tableau 7 : comparaison des mesures d'efficacité des quatre scénarios**

Fonction de congestion	Goulot d'étranglement		Greenberg	
	Scénario IAURIF 1	Scénario DREIF 1	Scénario IAURIF 2	Scénario DREIF 2
<b>Scénarios de référence</b>				
<b>Temps de trajet [min]</b>	<b>32,50</b>	<b>26,64</b>	<b>34,50</b>	<b>28,08</b>
Temps de trajet à vide [min]	24,34	18,37	25,05	19,84
Temps d'attente [min]	8,16	8,27	9,45	8,24
Délai d'arrivée précoce [min]	28,28	26,98	28,65	25,59
Délai d'arrivée tardive [min]	19,07	18,73	21,14	23,41
Part des arrivées précoces [%]	47,25	50,00	46,20	46,00
Part des arrivées à l'heure [%]	19,60	19,71	18,96	19,56
Part des arrivées tardives [%]	33,15	30,29	34,84	34,44
<b>Coût moyen total [€]</b>	<b>9,47</b>	<b>8,14</b>	<b>10,04</b>	<b>8,76</b>
Coût du temps de trajet à vide [€]	5,26	3,97	5,41	4,29
Coût du temps d'attente [€]	1,76	1,79	2,04	1,78
Coût moyen de délai d'arrivée [€]	2,45	2,39	2,60	2,69
Vitesse moyenne [km/h]	28,90	37,18	28,12	24,49
Volume total des déplacements [millions de véh.km]	63,70	51,30	60,90	54,00
Distance moyenne parcourue par usagers [km]	17,51	14,40	17,93	15,12
Nombre d'arcs utilisés par individu	17,61	32,88	18,26	56,74
Indice de congestion [%]	28,85	61,68	31,69	66,19

Etant donné que le nombre d'arcs sur le réseau de la DREIF est plus élevé que sur le réseau de l'IAURIF, nous observons que le nombre d'arcs utilisés est plus élevé sur le réseau de la DREIF que sur le réseau de l'IAURIF. Cependant les usagers simulés sur le réseau de la DREIF parcourent des distances plus petites (en moyenne 14,40 kilomètres sur le réseau de la DREIF et 17,51 kilomètres sur le réseau IAURIF).

De plus, il est intéressant de constater que si l'on rajoute au coût moyen total du scénario DREIF, la différence de temps de trajet (4 mn environ) entre les deux scénarios évaluée à 12,96 euros de l'heure, on obtient un coût de l'ordre de 9 euros, soit une différence de 5% entre les deux scénarios.

Selon la fonction de congestion utilisée, les autres mesures d'efficacité sont assez proches entre le réseau de la DREIF et le réseau de l'IAURIF. Pour finir, nous observons une grande différence en termes d'indice de congestion. Cette différence s'explique par le fait que sur les deux réseaux, nous avons des temps d'attente assez proche (8,16 minutes dans le cas du scénario IAURIF 1 et 8,28 minutes dans le cas du scénario DREIF 1) mais des temps de trajet à vide différents (24,34 minutes dans le cas du scénario IAURIF 1 et 18,37 minutes dans le cas du scénario DREIF 1).

La différence en termes de niveau de congestion s'observe également sur la figure 9 dans laquelle, nous présentons l'évolution de la congestion au cours de la matinée pour les quatre scénarios. Cet indice présente le rapport entre le temps de trajet total et le temps de trajet à vide sur l'ensemble des routes du réseau. Selon les données du SIER, le pic de congestion atteint son maximum vers 8 h30 avec un niveau de congestion de l'ordre de 1,45 ce qui correspond le plus au scénario DREIF 2 (dont lequel, nous avons utilisé une fonction de type Greenberg).

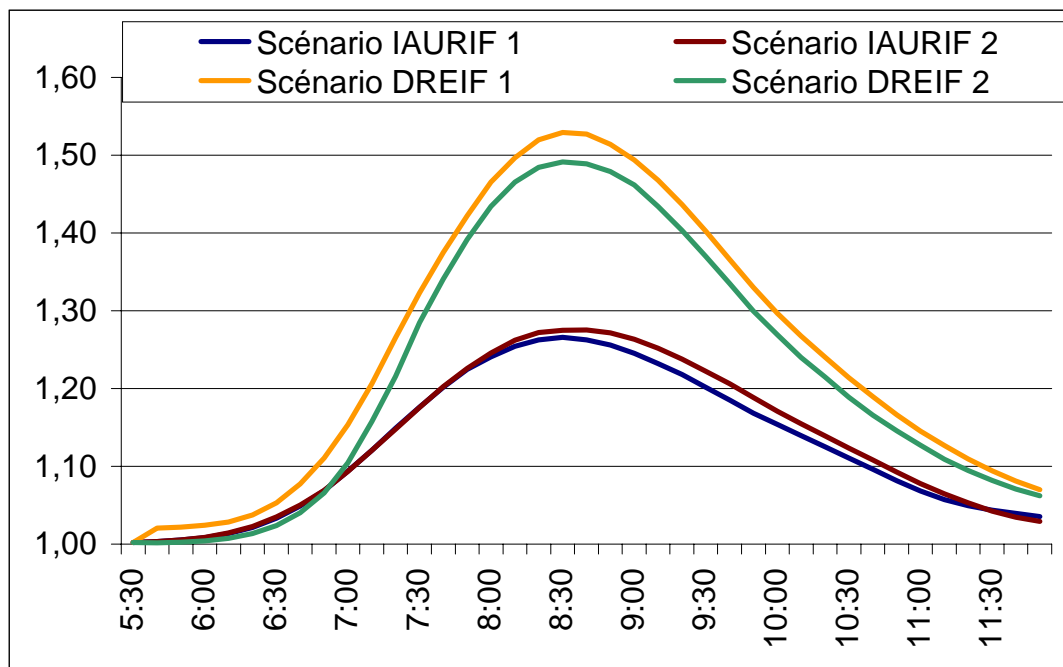


Figure 9 : niveau de la congestion au cours de la matinée



## Conclusions

Au cours du développement du projet QUATUOR, nous disposons de deux types de réseau. Le premier est dit agrégé et dont les données nous ont été fournies par l'IAURIF. Les données du second réseau dit désagrégé nous ont été fournies par la DREIF. La différence entre ces deux réseaux réside d'une part dans la description physique du réseau puisque le second contient un nombre de lien trois fois supérieur au premier soit 39.854 liens et d'autre part, ces deux réseaux se distinguent par le nombre de zones considérées dans chacun d'eux. Dans le réseau de l'IAURIF nous avons 522 zones alors que dans le réseau de la DREIF, il y a 1.305 zones.

Pour chacun des deux réseaux, nous avons utilisé deux types de fonction de congestion. La première est une fonction de type goulot d'étranglement et la seconde est une fonction de type Greenberg dont nous avons estimé les paramètres à partir des données de comptages. Pour le côté demande, nous avons utilisé les paramètres comportementaux dynamiques estimés à partir des données de l'enquête MADDIF. Pour le calage de ces réseaux, nous avons développé des critères de calage calculé à partir des données de l'EGT 91. Nous avons ainsi déterminé des scénarios de référence qui nous ont permis par la suite de comparer brièvement les mesures d'efficacité du trafic sur les deux réseaux.

A partir de ces résultats, nous avons montré que le fait d'utiliser une fonction de type goulot d'étranglement ou une fonction de type Greenberg fournit des résultats assez proches. De plus, nous avons montré que, selon la loi de congestion utilisée, les mesures d'efficacité diffèrent peu entre les deux réseaux sauf en ce qui concerne les temps de trajets. Par exemple, les délais d'arrivée précoce ou tardive sont assez semblables entre les deux réseaux et cela indépendamment de la loi de congestion utilisée. Cette observation reste également vraie pour le temps de congestion. Par ailleurs, nous avons trouvé que les temps de trajet à vide sont très distincts soit une différence de 6 minutes entre les scénarios de l'IAURIF et les scénarios de la DREIF. Cette différence influence le calcul du niveau de congestion où nous obtenons en moyenne un indice de l'ordre de 30% dans le cas des scénarios de l'IAURIF et un indice de l'ordre de 60% dans le cas des scénarios de la DREIF.

Cependant ce travail d'adaptation pour les deux réseaux nous a permis de montrer les avantages de METROPOLIS par rapport aux modèles dynamiques et statiques existants. En effet, METROPOLIS contrairement aux autres modèles dynamiques qui se limitent à l'analyse de petits réseaux ne connaît pas de limites de ce point de vue. Nous avons également montré qu'il est possible d'utiliser des fonctions de congestion dites statiques pour effectuer des simulations dynamiques contrairement aux différents modèles existants qui nécessitent un calage de fonctions dynamiques microscopiques.

## Références

- [1] De Palma, A., Fontan, C., Marchal, F., Mekkaoui, M. et Sanchez, O. (2001) Modélisation dynamique et gestion de déplacements en Ile-de-France, *Modélisation du trafic, Actes du groupe de travail 19 9 8* Les collections de l'INRETS.
- [2] Bliemer M. (2001) Analytical dynamic traffic assignment with interacting user-classes : theoretical advances and applications using a variational inequality approach.
- [3] DREIF, (1998), MODUS 1 & 2 : Modèle de déplacements urbains et suburbains, Rapport interne DREIF.
- [4] IAURIF, (1997), Le modèle de trafic de l'IAURIF, Rapport interne IAURIF.
- [5] Ran, B. et Boyce, D. (1994) *Dynamic Urban Transportation Network Models, Theory and Implications for Intelligent Vehicle Highway Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] THEMA – TTR (2000), *QUATUOR : Outils dynamiques pour la gestion de déplacements dans la région parisienne*, Rapport DRAST/PREDIT N° 98MT30.

---

# Conclusion générale

## **Le projet QUATUOR**

### **1 La mobilité : du quotidien au laboratoire et au bureau d'études**

Le transport occupe une place importante dans la vie économique et sociale. Nous avons assisté, récemment, à une amorce de révolution dans le domaine des communications avec l'écllosion d'Internet et de la « e-économie ». Il n'en reste pas moins que le transport d'individus et de marchandises continue et continuera vraisemblablement, dans les prochaines années, à jouer un rôle crucial dans notre société. Nous avons cru, à tort, que le téléphone allait contribuer à diminuer les déplacements et nous avons observé l'inverse. Il est probable que le même processus s'accomplisse en ce qui concerne l'entrée de notre société dans l'infosphère et que les transports continuent à jouer un rôle croissant dans l'économie.

Le champ des transports est connu de tous, puisque chacun de nous se déplace, achète des biens et se préoccupe de sa mobilité, de celle de sa famille ou des biens achetés ou vendus par son entreprise. Son analyse reste toutefois complexe puisqu'elle fait appel à de nombreuses disciplines spécialisées, à haut degré de technicité : l'ingénierie des transports, l'économie des transports, l'économétrie, la microéconomie, la recherche opérationnelle et l'informatique.

Pour beaucoup, la gestion des transports est une question de bon sens et la distance entre les recommandations proposées par les modélisateurs et les prises de décision restent importantes. De fait, nombreux sont ceux qui possèdent des opinions assez précises sur l'offre idéale de transports publics (horaires, tracés des lignes), sur les aménagements nécessaires des infrastructures, sur les politiques à mener en matière de stationnement, sur les moyens à mettre en œuvre pour réglementer les émissions de polluants et même sur les politiques de répression à mettre en place à l'encontre des conducteurs en état d'ébriété. De manière plus locale, nous savons aussi gérer, au quotidien, une file d'attente exagérée à un carrefour que nous traversons chaque jour pour nous rendre à notre lieu de travail. Les collectivités locales, les mairies, les départements ou la DDE disposent d'approches standardisées pour gérer leurs problèmes de transport. Les études interviennent pour arbitrer les conflits entre des agents qui possèdent des intérêts divergents. Ces approches sont évidemment perfectibles, mais elles constituent un compromis tenant compte de l'état de la

recherche et surtout des contraintes opérationnelles, à savoir les coûts de collecte de données et les délais nécessaires pour effectuer ces études et la difficulté inhérente à l'application des recommandations proposées par les modèles.

Depuis bientôt un demi-siècle, des méthodes d'abord mathématiques et ensuite numériques, ont été appliquées pour appréhender quantitativement ces problèmes. Néanmoins, leur champ d'application reste souvent limité car elles se basent sur des méthodes d'agrégation qui attendent encore souvent une justification. Ceci pose déjà le problème de l'harmonisation des approches théoriques étant donné que les lois mises en évidence dans le cadre d'un modèle simplifié ne s'appliquent pas nécessairement dans le cas d'un modèle plus détaillé.

Le but de notre étude était, d'une part, de montrer les limites des approches agrégées et d'autre part, de montrer, sur un cas concret (l'Ile-de-France), qu'une nouvelle génération de modèles, les modèles de planification dynamiques, possédait un niveau de maturité suffisante pour être utilisé dans des applications. Notre point de départ semble banal : les méthodologies mises en place actuellement négligent un aspect essentiel dans la description de l'offre et de la demande de transport : la composante dynamique. Dans le cadre dynamique, la congestion dépend de l'heure de la journée, du jour voire de la saison et il n'est pas supposé que celle-ci est répartie uniformément au cours du temps (pendant et en dehors du pic horaire). Toute hypothèse sur les fractions du trafic circulant pendant les heures de pointe et en dehors des heures de pointes reste *ad hoc* et ne permet de rendre compte qu'imparfaitement de l'impact de politiques. Parallèlement, la composante horaire constitue un élément essentiel pour évaluer la qualité des services offerts par les transports en commun et par conséquent est nécessaire pour obtenir une description satisfaisante du choix modal. Nous pensons que les modèles dynamiques seront amenés à jouer un rôle de plus en plus important dans la gestion de la mobilité. Les développements importants dans ce sens aux Etats-Unis et l'intérêt naissant dans le cadre de l'Union Européenne renforcent cette affirmation.

## **2 Les avantages de l'approche dynamique**

Nous avons pris le parti de nous orienter sur la voie nouvelle des modèles dynamiques. Les conclusions de notre étude montrent clairement que la méthodologie mise au point et

appliquée en Ile-de-France (l'un des plus grands réseaux urbains en Europe) permet d'effectuer des études de transport sans coût additionnel notable par rapport aux modèles statiques classiques, hormis une formation aux méthodes de modélisation de la composante horaire et l'accès à des puissances de calcul supérieures mais abordables.

La conclusion de notre expérience, dans le cadre du projet Quatuor, est sans appel:

- D'une part, nous avons montré, par différentes contributions théoriques, par la collecte de données empiriques et par des résultats de simulations calibrées sur le réseau de l'IAURIF (20,000 arcs) et sur le réseau de la DREIF (38,000 arcs), que les coûts de deshorage, qui sont spécifiques aux modèles dynamiques, représentent environ **30 % des coûts supportés par les usagers** (50% des coûts liés à la congestion).
- D'autre part, nous sommes en mesure d'effectuer des simulations dynamiques pour de grands réseaux, en utilisant à peu près les mêmes données que les modèles statiques et en utilisant des ressources humaines équivalentes. La capacité de calcul nécessaire est certes plus importante mais même pour les grands réseaux considérés, elle ne dépasse pas celle d'un PC haut de gamme.

### 3 Le cadre de notre étude

Pour le chercheur, le transport pose des questions multiples qui ne cessent d'envahir de nouveaux domaines. Laissons de côté l'aspect technologique des systèmes de transport pour nous concentrer sur les interactions entre ces systèmes et l'utilisateur et plus particulièrement sur le transport de voyageurs en milieu urbain. Pour faire un parallèle, nous disposons d'ordinateurs dont les capacités dépassent de loin l'essentiel de nos besoins ; la question que nous nous posons n'est pas "comment améliorer les performances des outils de planification?" mais "comment en améliorer l'efficacité et l'utilisation que nous en faisons ?" De même, les infrastructures de transports sont certes perfectibles mais la société se pose plutôt la question de trouver la meilleure utilisation possible des infrastructures existantes. Pour cela, nous disposons de politiques de gestion de la demande de plus en plus nombreuses dont les coûts (par exemple ceux de mise en place du péage urbain) doivent être comparés aux bénéfices escomptés (réduction de la congestion urbaine, de la pollution et du bruit).

Les modèles de planification dynamique permettent d'effectuer cette analyse coûts-bénéfices étant donné qu'ils produisent des critères d'évaluation économiques (temps passé dans les embouteillages, kilomètres parcourus et surplus des usagers). Le modèle de planification dynamique utilisé permet de fournir des critères d'évaluation économiques locaux et globaux, contrairement aux modèles de microsimulation (qui fournissent des critères locaux qui ne sont pas basés sur la théorie microéconomique). Le système social est un tout et son articulation passe par la communication, elle-même favorisée par la gestion efficace des systèmes de transports. Ceux-ci jouent un rôle non pas servile mais stratégique. Il devrait être évident que les outils étudiés devront jouer un rôle à la fois pour la planification des villes et pour aider les entreprises dans leur recherche de compétitivité. L'entreprise de la nouvelle économie qui parviendra à optimiser son système logistique sera celle qui aura le plus de chance de survivre. Le distributeur qui pourra réagir le plus vite avec le moins de stock possible sera celui qui pourra s'assurer de plus grandes marges. Mais ces entreprises ne verront pas d'un bon œil les tentatives de réglementation du trafic que nous avons tentées d'étudier : la limitation de vitesse, la tarification, l'interdiction de stationnement peuvent être comprises comme des entraves à la mobilité, et elles le sont, du moins d'un point de vue individuel, de sorte que les agents (entreprises, transporteurs, ou compagnies de taxis) ont des a priori négatifs sur la réglementation du trafic. Ces contraintes individuelles ne trouvent leur justification (éventuelle) que lorsque l'ensemble d'un système de transport est analysé. En effet, c'est à ce niveau que le concept économique d'externalités prend tout son sens. C'est aussi à ce niveau de généralité qu'une approche de modélisation globale est nécessaire.

Cette approche permet d'analyser non seulement les politiques isolées mais aussi des ensembles de politiques coordonnées. Dans certains cas, les politiques de transport influencent de manière importante le reste de l'économie, ce qui milite en faveur d'une approche de type équilibre général (omise dans ce travail).

L'approche de modélisation adoptée est quantitative. Il nous semble, en effet, que le degré de maturité de la discipline des transports et des outils sur lesquels elle repose est suffisant. Les résultats obtenus sont souvent mitigés : il est hors de question de dire qu'une politique est bonne et qu'une autre est mauvaise. En effet, toute politique est en général mauvaise pour

certaines individus et bonne pour d'autres : en termes économiques, à quelques rares exceptions près, il n'existe pas d'amélioration au sens de Pareto, ce qui signifie que le technicien en transport, que nous incarnons, ne pourra jamais se substituer au politique. C'est le preneur de décision qui aura la lourde tâche de soupeser les avantages et les inconvénients de différentes politiques en fonction de critères d'équité qui lui sont propres et qui traduisent ses sensibilités politiques.

Le monde du transport est ambigu et polymorphe : les automobiles semblent demander quotidiennement leurs lots de victimes, les routes et les aires de stationnement semblent vouloir se substituer aux jardins. Le temps que nous passons dans le métro, nous ne le passons pas à jouer avec nos enfants. Mais cette mobilité chronophage nous permet d'accroître, comme jamais il n'a été possible dans le passé, nos interactions. Du temps de nos grands-parents, un voyage de Bruxelles à Paris était long, périlleux et réservé à quelques privilégiés, qui en profitaient pour rédiger d'intéressants récits de voyage. A l'heure actuelle, la durée de Paris à Bruxelles en train est inférieure à celle nécessaire pour traverser Paris en voiture à l'heure de pointe, chose inconcevable il y a cinquante ans. Le transport essaie de gérer au mieux deux univers qui se côtoient, celui des effets externes négatifs, de la pollution, du bruit, de la congestion mais aussi de l'uniformisation et celui des effets externes positifs associés à la mobilité et à l'accessibilité. Le planificateur se retrouve, contre son gré, transformé en disciple d'Abraxas, qui doit concilier l'univers du « bien et du mal ». Heureusement, il possède pour ce faire différentes méthodes. L'une de celles-ci consiste à monétariser les bénéfices et les coûts et à proposer un bilan comptable chiffré des politiques. Le concept du prix de la vie humaine est choquant en soit, mais il constitue aussi un mal nécessaire pour arbitrer entre des ressources rares. Nous avons adopté cette voie, certes très critiquable, mais acceptable pour autant que les limites de son champ soient suffisamment clairement définies.

#### **4 Les limites de l'approche**

Une première limite réside dans la définition même du système étudié (nous avons omis les aspects macroéconomiques). Nous avons opté pour une approche basée sur une description axiomatisée des comportements des usagers (approche économique néoclassique) et des lois de congestion paramétrisées. Ces choix sont extrêmement réducteurs mais constituent, nous



semble t-il, un compromis satisfaisant à l'heure actuelle. Nous nous situons par conséquent à mi-chemin entre les approches holistiques, du type de celles développées en équilibre général qui prennent en compte l'ensemble des agents économiques (voir les travaux de Stef Proost, de la KUL en Belgique) et celles développées au niveau individuel, qui se préoccupent du détail du déplacement des véhicules sur les bandes de circulation (approche des modèles de microsimulation type MITSIM ou DYNAMIT, aux Etats-Unis). Il ne nous a pas semblé possible de concilier ces deux approches et nous nous sommes engagés sur une approche médiane.

Une seconde limite est constituée par notre champ d'étude, restreint à l'urbain et au péri-urbain et donnant la priorité aux déplacements du domicile au lieu de travail (bien que les autres déplacements soit considérés, mais de manière plus approximative étant donnée la difficulté de la collecte de données).

Nous avons omis le long terme et n'avons pas décrit les interactions entre les décisions en matière de transport et celle en matière de localisation (interaction occupation du sol et transport). Enfin, de manière plus technique, nous avons supposé que le taux de motorisation et que la matrice des déplacements (origine et destination) étaient donnés de manière exogène. Un enrichissement de cet aspect consiste, par exemple, à prendre en compte les phénomènes de chaînes ou boucles de déplacement.

Enfin, nous n'avons pas modélisé un certain nombre de phénomènes : recherche de stationnements, chaînes d'activité, parcs-relais, intermodalités qui devront être inclus dans une approche ultérieure.

## **5 Résumé synthétique de l'approche proposée**

En conclusion, nous rappelons de manière non mathématique les fondements du modèle de base utilisé dans notre étude :

1. Modélisation du comportement des usagers basée sur la théorie microéconomique.
2. Analyse d'un état de référence stationnaire traduisant l'équilibre dynamique entre l'offre et la demande de mobilité.

3. Utilisation d'algorithmes de convergence vers un état stationnaire basés sur un modèle heuristique d'apprentissage ayant des fondements comportementaux relatifs à l'acquisition d'information par les usagers.
4. Description désagrégée à la fois au niveau spatial (utilisation des réseaux de transports désagrégés comportant plusieurs milliers d'arcs) et à la fois au niveau temporel (description de seconde en seconde des conditions de circulation sur les réseaux et prise en compte de cet aspect dynamique dans les décisions des individus).
5. Utilisation de formules simples et explicites des lois de congestion dans le système.
6. Modélisation « mésoscopique » de la congestion (chaque arc du réseau est décrit comme un tout).
7. Modélisation individuelle du comportement des usagers.
8. Compatibilité presque totale de l'approche dynamique proposée avec les données statiques couramment utilisées (et généralement collectées pour les villes de tailles moyennes et de grandes tailles).
9. Possibilité d'obtenir un spectre de résultats relatifs aux modèles statiques standards et relatifs à l'approche dynamique).
10. Rapidité de calcul permettant de modéliser de grands réseaux en des temps raisonnables (une simulation pour l'ensemble de l'Ile-de-France, pour un réseau de 20.000 arcs et plusieurs millions d'usagers prend entre 2 et 5 heures sur un PC haut de gamme).
11. Modularité et flexibilité de l'approche permettant à l'opérateur d'utiliser au mieux son expertise.

Le modèle que nous avons mis au point permet de traiter les choix suivants des usagers : choix modal, choix de l'heure de départ, choix de direction (ou choix de route), choix de diversion suite à des incidents ou à des phénomènes de blocage inattendu du réseau. Ce modèle ne permet pas de traiter les choix suivants : choix combiné transport individuel et transport en commun, prise en compte des boucles de déplacement, choix d'accélération, de changement de bande de circulation, choix de vitesse en fonction du motif ou de l'aversion au risque, choix de direction en fonction des péages urbains, choix de localisation et choix de possession d'un véhicule automobile.

---

Presentation du logiciel de  
simulation dynamique  
METROPOLIS

## Introduction

L'outil de simulation du trafic METROPOLIS permet de modéliser les déplacements urbains de manière mésoscopique. Il se compose d'un simulateur, d'une interface graphique et d'un éditeur de réseau. L'interface permet de paramétrer les caractéristiques de la demande (comme les paramètres comportementaux des usagers et la matrice origine-destination) et de l'opère de transports (comme les fonctions de congestion et les caractéristiques d'un réseau routier). Cette interface vous propose également différentes mesures d'efficacité : temps de trajet moyen, coût de trajet moyen ... L'éditeur de réseau est chargé de présenter la géométrie du réseau et les résultats désagrégés.

## 1 Définitions préliminaires

METROPOLIS stocke les données et les résultats dans des bases de données (Database) qui sont gérées par le SGBD MySQL. Dans une base de données, l'utilisateur peut avoir plusieurs réseaux, matrices et simulations dans la limite de capacité de stockage de l'ordinateur qui héberge la base de données (Host). La seule condition imposée, c'est l'unicité de l'ensemble des centroïdes (voir les définitions du réseau).

## 2 Définition de l'opère

Les caractéristiques de l'opère de transport sont présentées par la définition d'un réseau et des fonctions de congestion.

### 2.1 Les caractéristiques du réseau

La géométrie d'un réseau est introduite par un ensemble de noeuds et de liens. On appelle centroïde un noeud initial ou terminal où un flux de déplacement sort ou entre mais en aucun cas ne le traverse. On appelle intersection un noeud qui n'est ni origine, ni destination. Ces éléments sont importés d'un fichier texte par l'intermédiaire de l'interface graphique et saisis et modifiés dans l'éditeur de réseau. D'autres caractéristiques physiques du réseau sont définies au niveau des liens (link). Pour chaque lien, les données suivantes doivent être fournies : longueur (length), nombre de voies (lanes), vitesse à vide (speed), capacité par voie (capacity) et trois paramètres personnalisés à utiliser, par exemple, dans les fonctions de congestion (ul1, ul2, ul3). L'unité de représentation des paramètres est laissée à l'appréciation de l'utilisateur qui s'assurera de la compatibilité entre eux.

De plus, d'autres informations permettant d'identifier les éléments du réseau doivent être saisies : numéro des noeuds d'origine et de destination, un identifiant pour le numéro de la fonction de congestion correspondante (VDF) et un identifiant personnalisé pour l'utilisateur (type).

## 2.2 Fonction de congestion

Le temps de trajet sur chaque lien est calculé par une fonction de congestion basée sur les caractéristiques du lien et l'état de trafic sur le lien. Le temps de trajet sur le lien est présenté par défaut en secondes. L'utilisateur peut le calculer dans une autre unité en gardant la compatibilité des unités. Dans METROPOLIS, trois variables représentant l'état du trafic sont disponibles :

dynflo : le flux de trafic entrant sur un lien donné durant le dernier intervalle de calcul (voir les paramètres de simulation),

dynvol : le nombre instantané de véhicules présents sur un lien donné,

statvol : le flux de trafic passant par un lien donné durant une tranche horaire (par exemple le flux moyen du lien pour la durée de simulation).

La fonction de congestion peut avoir une forme quelconque. Nous présentons quatre formes couramment utilisées :

1. Le temps de trajet sans congestion :

$$tt = 3600 \times \frac{\text{length}}{\text{speed}} \quad [s]$$

2. La fonction exponentielle :

$$tt = 3600 \times \frac{\text{length}}{\text{speed}} \left( 1 + e^{(1 - \alpha) \frac{\text{dynflo}}{\text{capacity} \times \text{lanes}}} \right) \quad [s]$$

3. La fonction de type goulot d'étranglement :

$$tt = \begin{cases} 3600 \times \frac{\text{length}}{\text{speed}} & \text{si } \text{dynvol} \cdot \text{capacity} \times \text{lanes} \times \frac{\text{length}}{\text{speed}} \\ 3600 \times \frac{\text{length}}{\text{dynvol}} & \text{sinon} \end{cases} \quad [s]$$

4. La fonction de type Greenberg modifiée :

$$tt = \begin{cases} 3600 \times \frac{\text{length}}{\text{speed}} & \text{si } \text{dynvol} = (\text{length} \times \text{lanes}) \cdot k_{\min} \\ 3600 \times V_0 \ln \frac{k_j}{\text{dynvol} = (\text{lanes} \times \text{length})} & \text{si } k_{\min} < \text{dynvol} = (\text{length} \times \text{lanes}) \cdot k_j \end{cases} \quad [s]$$

### 3 Les caractéristiques de la demande

#### 3.1 La matrice origine-destination (OD)

Les nombres totaux des déplacements entre les paires d'origine - destination pendant la durée de simulation sont introduits par la matrice OD. L'utilisateur peut introduire plusieurs matrices et utiliser une combinaison de celles-ci pour définir la demande globale.

#### 3.2 Les paramètres comportementaux

Les choix individuels (choix de route, de l'heure de départ ou de mode de déplacement) sont modélisés en utilisant les paramètres comportementaux qui sont introduits par groupe d'utilisateurs. Les choix sont faits en fonction du coût généralisé issu de chaque option de trajet. En plus des paramètres de la fonction de coût généralisé, l'utilisateur doit entrer le paramètre de modèle de choix et déterminer si l'utilisateur est informé de l'état actualisé de la circulation dans les prochains liens qu'il doit parcourir.

##### 3.2.1 La fonction de coût généralisé

METROPOLIS calcule le coût généralisé en fonction de temps de trajet et de déshorage imposé à l'utilisateur. La gêne associée au déshorage s'impose à l'arrivée pour les déplacements du domicile au travail le matin et au départ pour les déplacements du lieu de travail vers le domicile le soir. La fonction de coût généralisé pour les individus qui se déplacent sur un segment OD donné en voiture est :

$$C(t_d) = \alpha \text{tt}(t_d) + \beta [\text{avance}] + \gamma [\text{retard}]$$

L'heure de départ, qui est à choisir par l'utilisateur, est noté  $t_d$ .  $\text{tt}(t_d)$  représente le temps de trajet en fonction de l'heure de départ. Les variables avance et retard désignent l'écart éventuel d'arrivée (ou de départ) par rapport à une heure désirée d'arrivée (ou de départ)  $t^a$ . Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  représentent donc la valeur du temps, la pénibilité de l'arrivée (ou départ) en avance et en retard à introduire dans METROPOLIS.

Le modèle considère également un écart  $\Phi$  autorisé, symétrique autour de l'heure d'arrivée désirée. L'heure d'arrivée effective  $t_a$  est donc  $t_a = t_d + \text{tt}(t_d)$ . Dans le tableau suivant, nous présentons le calcul du déshorage :

Contrainte	à l'arrivée	au départ
avance	$(t^a - \Phi) \leq t_a$	$(t^a - \Phi) \leq t_d$
retard	$t_a \leq (t^a + \Phi)$	$t_d \leq (t^a + \Phi)$

Dans le cas du transport en commun, le coût généralisé est le suivant :

$$C_{TC} = \alpha_{TC} t_{TC} + P$$

Dans ce cas, nous avons un coût unitaire du temps différent,  $\alpha_{TC}$ ; et une pénibilité constante,  $P$ . Le temps de trajet en transport en commun est considéré comme constant et est donné pour chaque paire OD.

Le choix de l'heure de départ suit un modèle Logit continu dans lequel la probabilité de partir entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\text{Prob}(t) = \frac{e^{-\frac{C(t)}{\lambda_{td}}}}{\int_0^T e^{-\frac{C(\xi)}{\lambda_{td}}} d\xi} dt$$

Dans cette formulation  $\lambda_{td}$  est une constante représentant la diversité de la population (paramètre d'hétérogénéité) concernée vis-à-vis du choix de l'heure de départ (ou arrivée).

Le choix de mode de déplacement suit un modèle Logit binaire dans lequel la probabilité de choisir son véhicule particulier est :

$$\text{Prob}(VP) = \frac{e^{-\frac{C_{VP}(t_d)}{\lambda_{mode}}}}{e^{-\frac{C_{VP}(t_d)}{\lambda_{mode}}} + e^{-\frac{C_{TC}}{\lambda_{mode}}}}$$

Où  $\lambda_{mode}$  est le paramètre d'hétérogénéité du modèle Logit pour le choix du mode de déplacement et  $t_d$  représente l'heure de départ choisie pour voyager en véhicule particulier (VP).

Pour tous ces paramètres, l'utilisateur peut introduire une distribution de probabilité par segment de population. Le simulateur METROPOLIS affectera une valeur à chaque usager. La distribution peut être uniforme, normale ou lognormale et est définie par sa moyenne et son écart-type.

## 4 Les paramètres de simulation

Certaines options sont liées à chaque simulation. Il s'agit du contrôle du déroulement de la simulation, des critères d'arrêt du processus itératif et des paramètres concernant le processus d'apprentissage et les sorties à conserver.

Par la fenêtre de simulation, l'utilisateur introduit le scénario qu'il va simuler et l'éventuel état initial à partir duquel le scénario va être appliqué. Le processus itératif continue jusqu'à satisfaction d'une des deux conditions : accomplir un certain nombre d'itérations ou obtenir une valeur assez petite pour la critère de convergence (STAC,

voir les mesures d'efficacité). METROPOLIS peut être implanté sur un réseau, dans ce cas l'utilisateur précisera la machine qui va lancer le simulateur dans la case "Engine". La valeur par défaut est "Localhost".

L'utilisateur a le choix pour conserver certains résultats désagrégés ou semi-agrégés dont il a besoin. Ce sont :

- 2 Les flux entrants et sortants des liens, par intervalles de temps (données historiques), "Link volumes".
- 2 Les temps de trajet sur les liens par intervalles de temps (données historiques), "Link times".
- 2 Les informations à propos des caractéristiques affectées à chaque usager et ses choix de mode et de l'heure de départ et d'arrivée, "Users times".
- 2 Les flux et les temps de trajet des liens issus de la dernière itération de simulation, "Last iteration".
- 2 Les chemins effectifs des usagers, "Users paths" (cette option n'est pas encore implémentée).
- 2 Le surplus des usagers sur l'intervalle des heures de départ possibles, pour une paire OD, est calculé par la formule suivante :

$$GC_{O_i D} = \ln \frac{z_{FR}}{z_{LR}} e^{\frac{C_{O_i D}(\lambda)}{td}} : d_i$$

L'utilisateur indiquera l'heure de début et de fin de simulation par "First record, FR" et "Last record, LR" et également la durée de l'intervalle de temps. Les sorties désagrégées sur les liens sont produites pour ces intervalles.

Le modèle peut considérer la queue verticale ou horizontale des voitures sur les liens. Dans l'option des queues horizontales (Spillback), la longueur moyenne des voitures doit être introduite.

#### 4.1 Le processus d'apprentissage

METROPOLIS est un modèle calculant un équilibre stationnaire sur la base d'un processus itératif. Chaque jour, les individus modifient leur comportement en fonction de ce qu'ils découvrent du réseau de transport. A cette fin, le logiciel considère une certaine mémoire pour les individus : ce sont les données historiques. A chaque itération  $w$  et pour chaque lien, les variables d'état de circulation sont représentées par  $X_w^S$ . En revanche les informations historiques cumulées jusqu'à cette étape sont représentées par  $X_w^H$ .



L'utilisateur dispose de quatre choix pour la fonction d'apprentissage qui détermine l'évolution du processus :

1. Exponentielle :

$$X_{w+1}^H = (1 - \alpha)X_w^H + \alpha X_w^S;$$

2. Linéaire :

$$X_{w+1}^H = \frac{w}{w+1}X_w^H + \frac{1}{w+1}X_w^S;$$

3. Quadratique :

$$X_{w+1}^H = \frac{\rho_w}{w+1}X_w^H + \frac{1}{w+1}X_w^S;$$

4. Génétique :

$$X_{w+1}^H = [(X_w^H)^w X_w^S]^{w+1};$$

## 5 Les sorties du modèle

METROPOLIS produit des résultats désagrégés au niveau de la demande et de l'opère.

### 5.1 Opère

Les renseignements suivants sont produits à propos de l'état de circulation sur chaque lien :

- 2 Temps de trajet moyen par intervalle de calcul.
- 2 Flux entrant et sortant moyens par intervalle de calcul.

Ces résultats sont présentés pour la dernière itération. Les données historiques sont également disponibles.

### 5.2 Demande

Au niveau des usagers, le modèle donne les données suivantes pour chaque usager (les résultats de choix de mode de déplacement, l'heure de départ et d'arrivée correspondent à la dernière itération) :

origine, destination, segment (identifiant le groupe dont l'utilisateur appartient), Drive-Car (1 si l'utilisateur utilise VP, 0 sinon),  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ ;  $\alpha_{TC}$ ;  $\alpha_{td}$  paramètre d'hétérogénéité pour le choix de l'heure de départ;  $\alpha_{route}$  paramètre d'hétérogénéité pour le choix de route (stochastique);  $\alpha_{mode}$  paramètre d'hétérogénéité pour le choix de mode,  $t_{td}$ ;  $t_{mode}$ ;  $t^a$ ;  $\frac{c}{2}$ ;  $t^a + \frac{c}{2}$ .

## 6 Les mesures d'efficacité agrégées

METROPOLIS calcule les mesure d'efficacité agrégées (Measures Of Effectiveness, MOEs) suivantes qui sont présentées par l'interface graphique pour chaque itération. Leur unité par défaut est également présentée.

1. Expect : un indice de convergence représentant l'écart relatif moyen entre l'heure d'arrivée estimée (au début des itérations) et celle simulée (à la ...n des itérations).

$$\text{Expect} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{t_{a;i,w}^{\text{est}} - t_{a;i,w}^s}{(t_{a;i,w}^s - t_{d;i,w}^s)} \quad [0]$$

2. STAC: un indice de convergence représentant l'écart relatif moyen entre le temps de trajet historique et celui simulé des liens.

$$\text{STAC} = \sum_{i=1}^N \frac{\int_0^R \frac{|j_{tt_{i,w}^H}(\zeta) - tt_{i,w}^S(\zeta)|}{tt_i} \eta_{i,w}(\zeta) d\zeta}{\int_0^R \eta_{i,w}(\zeta) d\zeta} \quad [0]$$

$$\eta_{i,w}(t) = \frac{j_{tt_{i,w}^H}(t) - tt_i^0}{tt_i^0}$$

3. Users : nombre total d'utilisateurs modélisés.
4. Drivers : nombre total d'utilisateurs choisissant leur véhicule personnel comme mode de déplacement.
5. TTime : le temps de trajet moyen pour tous les utilisateurs :

$$\text{TTime} = \frac{\sum_{i=1}^N (t_{a;i} - t_{d;i})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^R \eta_i(\zeta) tt_i(\zeta) d\zeta}{N}; \quad [\text{min}]$$

6. Cost : coût généralisé moyen pour tous les utilisateurs :

$$\text{Cost} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad [\text{Euro}]$$

7. SCost : coût moyen de déshorloge pour tous les usagers.

Dans le cas d'une contrainte à l'arrivée, les coûts sont :

$$SC_i(t_a; t^a) = \begin{cases} SC_i^E = -i \cdot (t^a - \frac{\phi_i}{2}) \cdot t_a & \text{si } t_a < t^a - \frac{\phi_i}{2} \\ SC_i^O = 0 & \text{si } |t_a - t^a| \leq \frac{\phi_i}{2} \\ SC_i^L = i \cdot t_a \cdot (t^a + \frac{\phi_i}{2}) & \text{si } t_a > t^a + \frac{\phi_i}{2} \end{cases} \cdot t_a \cdot i \cdot t^a + \frac{\phi_i}{2} \text{Euro}$$

$$SCost = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N SC_i(t_{a,i}; t_i^a)$$

Dans le cas d'une contrainte au départ, les coûts sont :

$$SC_i(t_d; t^a) = \begin{cases} SC_i^E = -i \cdot (t^a - \frac{\phi_i}{2}) \cdot t_d & \text{si } t_d < t^a - \frac{\phi_i}{2} \\ SC_i^O = 0 & \text{si } |t_d - t^a| \leq \frac{\phi_i}{2} \\ SC_i^L = i \cdot t_d \cdot (t^a + \frac{\phi_i}{2}) & \text{si } t_d > t^a + \frac{\phi_i}{2} \end{cases} \cdot t_d \cdot i \cdot t^a + \frac{\phi_i}{2} \text{Euro}$$

$$SCost = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N SC_i(t_{d,i}; t_i^a)$$

8. TT0Cost : le coût moyen de temps trajet sans congestion sur le chemin choisi dans le réseau congestionné.

$$TT0Cost = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{R_T} P_{i,j} \cdot \text{tt}_i^0 \cdot d_{i,j}}{N} \quad [\text{min}]$$

9. Late : le délai moyen d'arrivée en retard.

Ensemble des individus en retard :  $L = \{i | t_{a,i} > t_i^a + \frac{\phi_i}{2}\}$

$$Late = \frac{\sum_{i \in L} t_{a,i} \cdot i \cdot (t_i^a + \frac{\phi_i}{2})}{\text{card}[L]} \quad [\text{min}]$$

10. Early : le délai moyen d'arrivée en avance.

Ensemble des individus en avance :  $E = \{i | t_{a,i} < t_i^a - \frac{\phi_i}{2}\}$

$$Early = \frac{\sum_{i \in E} (t_i^a - \frac{\phi_i}{2}) \cdot i \cdot t_{a,i}}{\text{card}[E]} \quad [\text{min}]$$

11. Earpop : pourcentage de la population arrivée en avance.

$$Earpop = \frac{\text{card}[E]}{N} \times 100 \quad [\%]$$

12. Latepop : pourcentage de la population arrivée en retard.

$$\text{Latepop} = \frac{\text{card}[L]}{N} \times 100 \quad [\%]$$

13. Period : l'intervalle horaire pendant lequel 80% des usagers sont partis de leur origine.

14. Cong : niveau moyen de congestion sur le réseau.

$$\text{Cong} = \frac{\sum_{i=1}^P \sum_{j=0}^{R_T} [tt_i(\zeta) - tt_i^0] \odot_i(\zeta) d\zeta}{\sum_{i=1}^P \sum_{j=0}^{R_T} \odot_i(\zeta) d\zeta} \times 100 \quad [\%]$$

15. Vehkm : la somme de véhicule-kilomètres parcourus sur le réseau par million vehkm.

$$d = \sum_{i=1}^X L_i \cdot \sum_{j=0}^{Z_T} \odot_i(\zeta) d\zeta = 10^6 \quad [\text{millions vehkm}]$$

16. Narcs : nombre moyen d'arcs traversés par chaque usager.

$$n_{\text{arc}} = \frac{\sum_{i=1}^P \sum_{j=0}^{R_T} \odot_i(\zeta) d\zeta}{N} \quad [0]$$

17. Speed : vitesse moyenne sur le réseau.

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^P \sum_{j=0}^{R_T} L_i \odot_i(\zeta) d\zeta}{\sum_{i=1}^P \sum_{j=0}^{R_T} \odot_i(\zeta) tt_i(\zeta) d\zeta} \quad [\text{km/h}]$$

18. Generalized cost : le surplus des usagers sur l'intervalle des heures de départ possibles, pour chaque paire OD.

$$\text{GC}_{O_i D} = \ln \int_{FR}^2 \int_{FR}^3 e^{-\frac{c_{O_i D}(\zeta)}{td}} d\zeta \quad [\text{Euro}]$$

## 7 Notations

Nous présentons ici un récapitulatif de l'ensemble des notations utilisées.

$V_o$  : vitesse de circulation optimale sur un lien donné.

$k_j$  : densité d'embouteillage sur un lien donné.

$k_{min}$  : densité de circulation minimale sur un lien donné.

$\Phi$  : écart autorisé et non pénalisé à l'arrivée (ou au départ) en minutes.

$tt(t)$  : temps de trajet pour une paire OD donnée, en partant à l'instant  $t$ .

$tt_i(t)$  : temps de trajet sur un lien  $i$ , pour un individu qui entre sur le lien à l'instant  $t$ .

$tt_{i,w}^H(t)$  : temps de trajet calculé à partir des données historiques, à l'itération  $w$ , sur un lien  $i$ , pour un individu qui entre sur le lien à l'instant  $t$ .

$tt_{i,w}^S(t)$  : temps de trajet simulé, à l'itération  $w$ , sur un lien  $i$ , pour un individu qui entre sur le lien à l'instant  $t$ .

$t^a$  : heure désirée d'arrivée (ou de départ).

$\textcircled{R}$  : valeur de temps pour les transports individuels.

$\textcircled{-}$  : coût unitaire de délai d'arrivée en avance.

$\textcircled{\circ}$  : coût unitaire de délai d'arrivée en retard ( $\textcircled{\circ} > \textcircled{R}$ ).

$\textcircled{R}_{TC}$  : coût unitaire du temps de trajet en transports en commun (TC).

$tt_{TC}$  : temps de trajet entre une origine et une destination en TC (exogène).

$P$  : pénibilité constante associée au TC.

$\lambda_{td}^1$  : paramètre d'hétérogénéité du modèle de choix de l'heure de départ.

$\lambda_{mode}^1$  : paramètre d'hétérogénéité du modèle de choix de mode de déplacement.

$\mu_{td}$  : variable aléatoire, sur l'intervalle  $[0; 1]$ , dans la formulation du modèle de choix de l'heure de départ.

$\mu_{mode}$  : variable aléatoire, sur l'intervalle  $[0; 1]$ , dans la formulation modèle de choix de mode de déplacement.

$\lambda_{route}^1$  : paramètre d'hétérogénéité du modèle stochastique de choix de route.

$FR$  : heure du début de la simulation.

$LR$  : heure de ...n de la simulation.

$C_{O_i D}$  : coût généralisé de déplacement entre l'origine  $O$  et la destination  $D$  en VP.

$\alpha$  : paramètre de la fonction d'apprentissage.

$w$  : numéro de l'itération.

$t_a$  : heure d'arrivée d'un individu.

$t_{a,i}$  : heure d'arrivée de l'individu  $i$ .

$t_{a,i,w}^{est}$  : heure d'arrivée estimée (basée sur les données historiques) de l'individu  $i$ ; au début de l'itération  $w$ .

$t_{a,i,w}^S$  : heure d'arrivée simulée de l'individu  $i$ , à la ...n de l'itération  $w$ .

$t_d$  : heure de départ d'un individu.

$t_{d,i}$  : heure de départ de l'individu  $i$ .

$t_{d,i,w}^s$  : heure de départ simulée de l'individu  $i$ , à la ...n de l'itération  $w$ .

$I$  : nombre total des liens dans le réseau.

$N$  : nombre total d'utilisateurs.

$T$  : durée sur laquelle s'exécute la simulation.

$\phi_i(t)$  : flux entrant sur le lien  $i$  en  $t$ :

$SC_i(t; t^a)$  : coût de délai d'arrivée (départ) pour l'individu  $i$  partant en  $t$  avec l'heure désirée d'arrivée (ou départ)  $t^a$ :

$tt^0$  : temps de trajet à vide sur un lien donné.

$L$  : longueur d'un lien donné.