

ANNEXE 3
ETUDE DU BALLANT LIQUIDE



ANNEXE 3.1

DEPLACEMENTS TRANSVERSAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE D'UN FLUIDE CONTENU DANS UN RESERVOIR DE SECTION CIRCULAIRE.

Les paramètres sont :

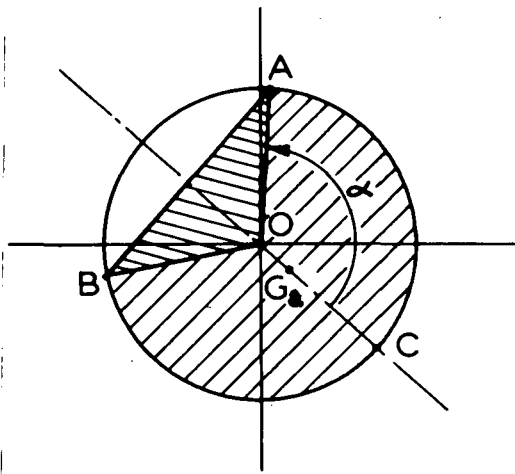
- le taux de remplissage τ
- l'accélération transversale $\Gamma\tau$
- l'angle de roulis θ

AB : intersection du plan de section avec la surface libre du liquide.

a : rayon de la section

τ : taux de remplissage = rapport de la section du segment circulaire ACB à la surface du cercle.

α : angle au centre \widehat{COA}



1. Taux de remplissage τ

$$S_{\text{triangle}} \text{ OAB} = a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$S_{\text{secteur}} \text{ BOA} = a^2 \cdot \alpha$$

Surface du segment circulaire : $a^2 \alpha - a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. pour α compris entre 0 et π c'est-à-dire pour τ compris entre 0 et 1.

Surface de la section circulaire : $\pi \cdot a^2$

$$(1) \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi}$$

La fonction $\tau = f(\alpha)$ prend lorsque α varie de 10 en 10° entre 0 et π les valeurs consignées dans le tableau suivant et représentées sur la figure 1.

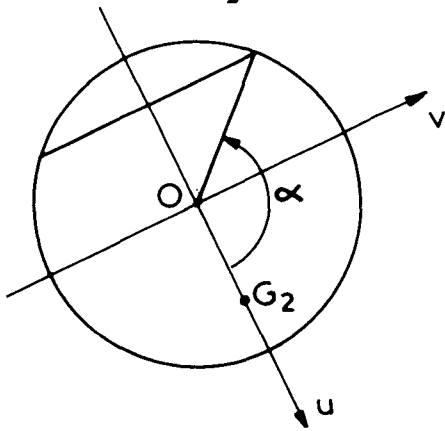
α (degré)	τ
0	0
10	0,00112
20	0,00881
30	0,02883
40	0,06549
50	0,12104
60	0,19550
70	0,28659
80	0,39001
90	0,50000
100	0,60999
110	0,71341
120	0,80450
130	0,87896
140	0,93451
150	0,97117
160	0,99119
170	0,99888
180°	1

Inversement la fonction $\alpha = g(\tau)$ prend, lorsque τ varie de $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{10}$ entre 0 et 1 les valeurs consignées dans le tableau suivant :

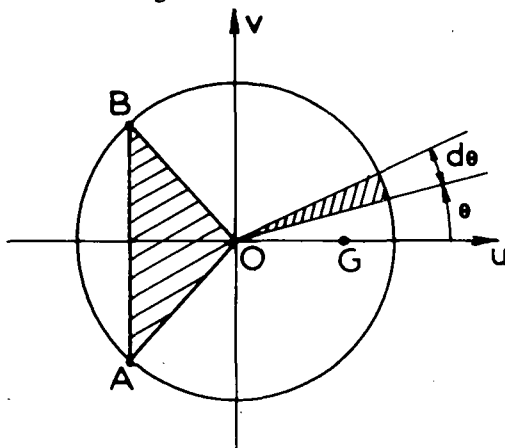
τ	$\alpha(\text{degré})$
0,10	46,603
0,20	60,536
0,30	71,356
0,40	80,925
0,50	90
0,60	99,076
0,70	108,644
0,80	119,463
0,90	133,397
1,0	180

2. Coordonnées polaires du centre de gravité

2.1 Module : distance OG_2



2.1.1. - Centre de gravité d'un secteur



Le secteur élémentaire d'ouverture $d\theta$ assimilable à un triangle a un centre de gravité \bar{g} dont les coordonnées sont :

$$\bar{g} \begin{cases} u_g = \frac{2}{3} a \cos \theta \\ v_g = \frac{2}{3} a \sin \theta \end{cases}$$

soit G le centre de gravité du secteur d'ouverture 2α

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{Og} d\theta}{2\alpha}$$

$$\text{d'où } u_G = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} a \cos \theta d\theta = \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$v_G = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} a \sin \theta d\theta = 0$$

$$\overline{OG} = \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

2.1.2. - Triangle OAB

Coordonnée du CG

$$OG_3 = \frac{2}{3} a \cos \alpha$$

2.1.3. - Coordonnée du centre de gravité du segment circulaire (OG_2)

On applique le théorème sur la composition des centres de gravité

$$\sum S_i \overline{OG_i} = S \cdot \overline{OG_2}$$

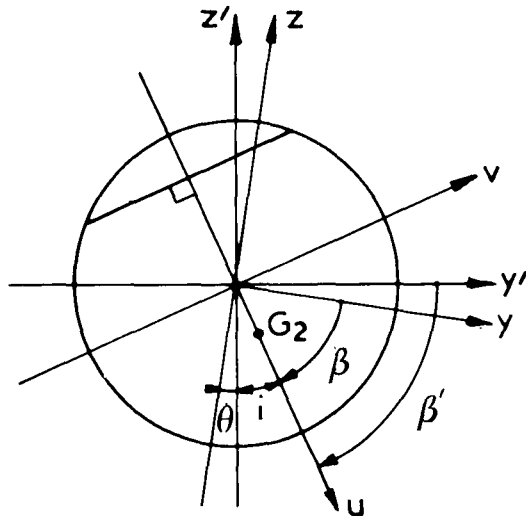
$$a^2 \alpha \times \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha} + a^2 \sin \alpha \cos \alpha \times \frac{2}{3} a \cos \alpha$$

$$= a^2 (a - \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \overline{OG_2}$$

(2) d'où

$$\boxed{\frac{\overline{OG_2}}{a} = \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}}$$

2.1.4. – Argument



Γ_T désignant l'accélération transversale, la tangente de l'angle d'inclinaison de la surface libre par rapport à l'horizontale a pour expression :

$$\text{tgi} = \frac{\Gamma_T}{g}$$

$$\theta \text{ étant l'angle de roulis, } \beta = \frac{\pi}{2} - i - \theta$$

$$\text{d'où } \text{tg } \beta = \text{cotg}(i + \theta) = \frac{1 - \text{tgi} \text{ tg} \theta}{\text{tgi} + \text{tg} \theta}$$

$$\text{d'où } \beta = \text{arctg} \frac{1 - \frac{\Gamma_T}{g} \text{ tg} \theta}{\frac{\Gamma_T}{g} + \text{tg} \theta}$$

3. Coordonnées cartésiennes du centre de gravité

$$y_G = OG_2 \cos \beta$$

$$= \frac{2}{3} \frac{a \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \times \text{Cos} \left[\text{arctg} \frac{1 - \frac{\Gamma_T}{g} \text{ tg} \theta}{\frac{\Gamma_T}{g} + \text{tg} \theta} \right]$$

$$(3) \quad z_G = OG_2 \sin \beta$$

$$= \frac{2}{3} \frac{a \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \times \text{Sin} \left[\text{arctg} \frac{1 - \frac{\Gamma_T}{g} \text{ tg} \theta}{\frac{\Gamma_T}{g} + \text{tg} \theta} \right]$$

4. Rayon de courbure de la trajectoire du centre de gravité

Dans le cas de la section circulaire la trajectoire du centre de gravité par rapport à un repère solide de la citerne est un arc de cercle de rayon OG_2 .

4.1. – Relation entre OG_2 et le taux de remplissage τ

$$(4) \quad \frac{OG_2}{a} = \frac{2}{3} \times \frac{\sin^3 \alpha}{\pi \tau}$$

α et τ étant liés par la relation (1).

L'exploitation numérique des relations (1), (2) et (4) a permis d'établir les résultats consignés dans les tableaux ci-dessous et représentés sur les figures 2 et 3.

α	$\frac{OG_2}{a}$
0	1
10	0,99209
20	0,96369
30	0,92008
40	0,86057
50	0,78812
60	0,70502
70	0,61441
80	0,51968
90	0,42441
100	0,33227
110	0,24682
120	0,17133
130	0,10853
140	0,06031
150	0,02731
160	0,00857
170	0,00111
180	000

τ	$\frac{OG_2}{a}$
0,10	0,81407
0,20	0,70030
0,30	0,60174
0,40	0,51084
0,50	0,42441
0,60	0,34056
0,70	0,25789
0,80	0,17508
0,90	0,09045
1,00	0,00000

5. Période propre d'oscillation transversale de la masse liquide

Le système constitué par la masse liquide oscillant à une distance fixe du centre géométrique de la vitesse est équivalent à un pendule.

Pour les fluides peu visqueux, la masse liquide est irrotationnelle et de ce fait la période propre du système est celle du pendule simple soit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ avec } \ell = OG_2$$

$$\text{soit : } \frac{T}{\sqrt{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{OG_2}{a}}$$

$$T = \sqrt{\frac{8\pi}{3g}} \cdot \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\tau}} \cdot \sqrt{a}$$

$$T = 0,924 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\tau}}$$

d'où : $\frac{T}{\sqrt{a}} = 0,924 \sqrt{\frac{\sin^3 \alpha}{\tau}}$ expression que l'on résoud

numériquement et qui fournit les résultats suivants illustrés par la figure 4.

τ	$\frac{T}{\sqrt{a}}$
0,10	1,81809
0,20	1,67876
0,30	1,55614
0,40	1,43380
0,50	1,30689
0,60	1,17069
0,70	1,01874
0,80	0,83939
0,90	0,60332

ANNEXE N° 3. 2.

DEPLACEMENTS TRANSVERSAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE D'UN FLUIDE CONTENU DANS UN RESERVOIR DE SECTION ELLIPTIQUE

1. Remarque préliminaire

Nous utiliserons la propriété de l'ellipse de dériver du cercle par affinité pour établir la formulation des coordonnées du centre de gravité du volume fluide.

$$z_{G_E} = z_{G_{\text{cercle}}} \times \frac{a}{a_1}, \quad \left[\frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{a} \right]$$

c'est-à-dire, en développant d'après les relations (3) de l'annexe n° 1 :

2. Données du problème

S = surface totale de la section elliptique ;

τ = taux de remplissage ;

a_1, b_1 , demi axes de l'ellipse ;

a = rayon du cercle de surface S ;

a_1 étant donné b_1 vérifie la condition :

$$\pi \cdot a^2 = \pi a_1 \cdot b_1$$

$$y_{G_E} = \frac{2}{3} a_1 \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \cos \left[\arctg \frac{1 - \frac{\Gamma_T}{g} \operatorname{tg} \theta}{\frac{\Gamma_T}{g} + \operatorname{tg} \theta} \right]$$

$$(1) \quad z_{G_E}$$

3. Coordonnées cartésiennes du centre de gravité

1ère transformation

On considère le cercle de rayon a et on réalise l'affinité d'axe Oy et de rapport

$$\frac{b_1}{a} = \frac{a}{a_1}, \quad \left[b_1 = \frac{a^2}{a_1} \right]$$

On obtient une ellipse E_0 de demi axes a et b_1

2ème transformation

On réalise l'affinité d'axe Oz et de rapport $\frac{a_1}{a}$: l'ellipse

E_0 est transformée en ellipse E de demi axes a_1, b_1 .

Notons que les affinités conservent le rapport de la surface du liquide à la surface de la section donc conservent le taux de remplissage.

Les coordonnées du centre de gravité de la section circulaire initiale subissent la transformation résultant du produit des deux affinités, d'où :

$$y_{G_E} = y_{G_{\text{cercle}}} \times \frac{a_1}{a}$$

$$z_{G_E} = -\frac{2}{3} b_1 \frac{\sin^3 \alpha}{a - \sin \alpha \cos \alpha} \sin \left[\arctg \frac{1 - \frac{\Gamma_T}{g} \operatorname{tg} \theta}{\frac{\Gamma_T}{g} + \operatorname{tg} \theta} \right]$$

4. Rayon de courbure de la trajectoire du centre de gravité

Remarquons que la trajectoire du centre de gravité du liquide contenu dans la section elliptique se déduit de la trajectoire (cercle) du centre de gravité du liquide contenu dans la section circulaire dont elle est issue, par la transformation présentée ci-dessus (produit d'affinité).

Le lieu cherché est donc une ellipse dont les demi axes sont :

$$a'_1 = OG_{2 \text{ cercle}} \times \frac{a_1}{a}$$

$$b'_1 = OG_{2 \text{ cercle}} \times \frac{b_1}{a}$$

Le rayon de courbure de l'ellipse sur son petit axe (vertical) résulte de la construction géométrique ci-contre, qui conduit aux relations :

$$\frac{\rho}{a'_1} = \frac{\alpha \beta}{\beta \Sigma} = \frac{\alpha \Sigma}{\Sigma \delta} = \frac{a'_1}{b'_1}$$

(triangles semblables $\alpha \beta \gamma$, $\alpha \beta \Sigma$, $\alpha \Sigma \delta$)

$$\text{soit : } \rho = \frac{a'_1{}^2}{b'_1} = \frac{[OG_2]^2}{[OG_2]} c \times \frac{a_1}{a} = [OG_2] c \times \frac{a_1}{b_1}$$

$$\rho = [OG_2] c \times \frac{a_1}{b_1}$$

ou encore $\frac{\rho}{a} = \left[\frac{OG_2}{a} \right] c \times \frac{a_1}{b_1}$

5. Période propre d'oscillation transversale de la masse liquide

Au voisinage de $\Gamma_T = 0$ la période propre d'oscillation est $T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g}}$

$$\text{soit } T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{a \times \frac{OG_2}{A} \times \frac{a_1}{b_1}}$$

$$\frac{T_E}{\sqrt{a \times \frac{a_1}{b_1}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{OG_2 c}{a}} = \text{fonction de } (\tau)$$

que l'on a calculé pour la citerne de section circulaire.

On a donc :

τ	$\frac{T_E}{\sqrt{a \times a_1/b_1}}$
0,1	1,81809
0,2	1,67876
0,3	1,55614
0,4	1,43380
0,5	1,30689
0,6	1,17069
0,7	1,01874
0,8	0,83939
0,9	0,60332
1,0	0

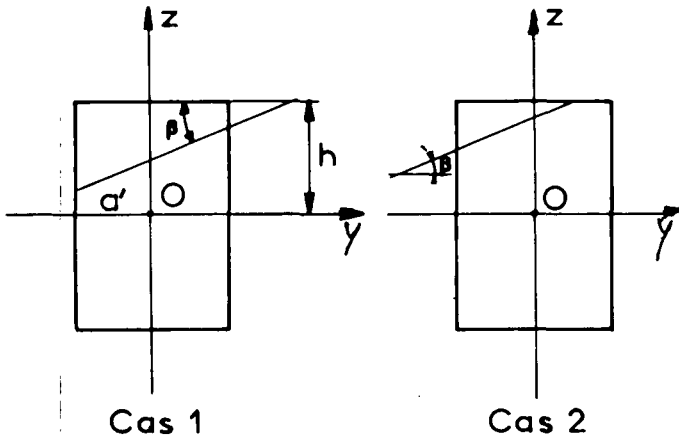
ANNEXE N° 3. 3.

DEPLACEMENTS TRANSVERSAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE D'UNE MASSE LIQUIDE DANS UN RESERVOIR DE SECTION RECTANGU- LAIRE OU CARREE

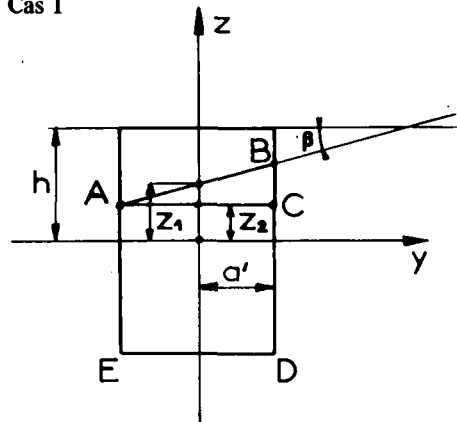
1. Remarque préliminaire

1.1. — Le cas de la section carrée sera traité comme cas particulier de l'étude de la section rectangulaire.

1.2. — Deux cas de figure seront à considérer selon que la surface libre intersecte (cas 2) ou non (cas 1) la surface supérieure du réservoir (voir remarque page 45).



2.1. — Cas 1



2.1.1. — Abscisse de $G_2 : y_G$

S_L = surface de la section liquide : $4 a' h \cdot \tau$

s : surface du triangle ABC = $2 a' \tau \text{tg} \beta$. $a' = 2 a'^2 \text{tg} \beta$

$S_L - s$ = surface du rectangle ACED

Nous appliquons le théorème de la composition des centres de gravité.

$$S_L \cdot y_G = (S_L - s) \cdot 0 + \frac{1}{3} a' \cdot s$$

$$y_G = \frac{1}{3} a' \cdot \frac{s}{S_L} = \frac{1}{3} a' \cdot \frac{2 a'^2 \text{tg} \beta}{4 a' h \tau} = \frac{\text{tg} \beta \cdot a'^2}{6 h \cdot \tau}$$

$$y_G = \frac{h}{6} \cdot \left[\frac{a'}{h} \right]^2 \cdot \frac{\text{tg} \beta}{\tau}$$

2.1.2. — Ordonnée de $G_2 : z_G$

$$S_L \cdot z_G = (S_L - s) z_G'2 + z_G'1$$

2. Section rectangulaire

Données

Section totale $S = 4 \cdot a' h$

a' : 1/2 largeur

h : 1/2 hauteur

O : centre du réservoir

Oy et Oz : axes orthogonaux de symétrie du réservoir

β : angle de la surface libre avec l'axe Oy

τ : taux de remplissage

avec :

$Z_{G'_1}$ = ordonnée du CG du triangle ABC

$Z_{G'_2}$ = ordonnée du CG du triangle ACDE

$$z_{G'_1} = z_2 + \frac{2}{3} \cdot a' \operatorname{tg} \beta = (z_1 - a' \operatorname{tg} \beta) + \frac{2}{3} a' \operatorname{tg} \beta =$$

$$z_1 - \frac{1}{3} a' \operatorname{tg} \beta$$

or :

$$h + z_1 = \tau \times 2h \text{ d'où } z_1 = h(2\tau - 1)$$

et

$$z_{G'_1} = h(2\tau - 1) - \frac{a'}{3} \operatorname{tg} \beta$$

$$z_{G'_2} = \frac{-h + z_2}{2} = -\frac{h}{2} + \frac{z_2}{2}$$

$$= -\frac{h}{2} + \frac{1}{2} [h(2\tau - 1) - a' \operatorname{tg} \beta]$$

$$= -h + h\tau - \frac{a' \operatorname{tg} \beta}{2}$$

$$= h(\tau - 1) - \frac{a' \operatorname{tg} \beta}{2}$$

$$S_L - s = 2a' [h + h(2\tau - 1) - a' \operatorname{tg} \beta]$$

$$2a' [2h\tau - a' \operatorname{tg} \beta]$$

$$4 a' h \cdot \tau \times z_G = 2a' [2h\tau - a' \operatorname{tg} \beta] [h(\tau - 1) - \frac{a' \operatorname{tg} \beta}{2}]$$

$$+ 2a'^2 \operatorname{tg} \beta [h(2\tau - 1) - \frac{a'}{3} \operatorname{tg} \beta]$$

$$4 a' h \tau \cdot z_G = 2a' \left[(2h\tau - a' \operatorname{tg} \beta) (h\tau - h - \frac{a' \operatorname{tg} \beta}{2}) \right]$$

$$+ a' \operatorname{tg} \beta (2h\tau - h - \frac{a' \operatorname{tg} \beta}{2})]$$

$$4 a' h \tau \cdot z_G = 2a' [2h^2 \tau^2 - 2h^2 \tau - a' h \tau \operatorname{tg} \beta$$

$$- a' h \tau \operatorname{tg} \beta + a' h \operatorname{tg} \beta + \frac{a'^2 \operatorname{tg} \beta^2}{2} + 2 a' h \tau \operatorname{tg} \beta$$

$$- a' h \operatorname{tg} \beta - \frac{a'^2 \operatorname{tg} \beta^2}{3}]$$

$$z_G \cdot 4a' h \tau = 2a' [2h^2 \tau (\tau - 1) + \frac{5}{6} a'^2 \operatorname{tg} \beta]$$

$$z_G \times 4a' h \tau = 2a' [2h^2 \tau (\tau - 1) + \frac{1}{6} a'^2 \operatorname{tg} \beta]$$

$$z_G = h \left[\tau - 1 + \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{a'}{h} \right]^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\tau} \right]$$

2.1.3. - Rayon de courbure ρ de la trajectoire du centre de gravité

Prenons $\operatorname{tg} \beta = t$ comme paramètre

Le rayon de courbure ρ a pour expression générale

$$\rho = \frac{[y'_G{}^2 + z'_G{}^2]^{3/2}}{y'_G \cdot z''_G - z'_G \cdot y''_G}$$

$$y'_G = \frac{a'^2}{6h\tau} \quad y''_G = 0$$

$$z'_G = \frac{a'^2}{6h\tau} \cdot t \quad z''_G = \frac{a'^2}{6h\tau}$$

$$\text{d'où } \rho = \frac{[\frac{a'^4}{36h^2\tau^2} (1 + t^2)]^{3/2}}{\frac{a'^4}{36h\tau^2}}$$

$$\text{soit } \rho = \frac{a'^2}{6h\tau} (1 + t^2)^{3/2}$$

$$\rho = \frac{a'^2}{6h\tau} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{3/2}$$

$$\rho = \frac{h}{6} \left[\frac{a'}{h} \right]^2 \cdot \frac{1}{\cos^3 \beta} \cdot \frac{1}{\tau}$$

2.1.4. - Période propre d'oscillation au voisinage de la position de repos.

Dans ce cas $\alpha \neq 0$, donc

$$\rho = \frac{a'^2}{6h\tau} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot \left(\frac{a'}{h} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tau}$$

La période a pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g}} = \frac{2\pi a'}{\sqrt{6gh\tau}}$$

$$\text{d'où } T = \frac{2\pi}{\frac{a'}{\sqrt{h}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6g}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{T}{\frac{a'}{\sqrt{h}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6g}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

Cette expression prend en fonction du taux de remplissage les valeurs numériques suivantes :

τ	$\frac{T_1}{a'\sqrt{h}}$
0,1	2,590
0,2	1,831
0,3	1,495
0,4	1,295
0,5	1,158
0,6	1,057
0,7	0,979
0,8	0,916
0,9	0,863
1,0	0,863

2.2. - Cas 2

s_0 = surface de la partie vide

y_{G_0} = abscisse du centre de gravité de s_0

$$s_0 = \frac{\ell \times \ell \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{\ell^2}{2} \operatorname{tg}\beta$$

$$y_{G_0} = -a' + \frac{1}{3} \ell$$

$$\tau = 1 - \frac{s}{S}$$

avec $S = 4a'h$

$$\tau = 1 - \frac{\ell^2 \operatorname{tg}\beta}{8a'h}$$

$$\ell = 2\sqrt{\frac{2a'h(1-\tau)}{\operatorname{tg}\beta}}$$

$$S_L = 4a'h \cdot \sigma$$

$$z_{G_0} = \text{ordonnée du CG de } s_0 = +h - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \ell \operatorname{tg}\beta$$

$$= +h - \frac{2}{3} \operatorname{tg}\beta \times \sqrt{\frac{2a'h(1-\tau)}{\operatorname{tg}\beta}}$$

2.2.1. - Abscisse du centre de gravité

$$y_G \times S_L + y_{G_0} \times s_0 = 0 \times S$$

$$y_G = -y_{G_0} \times \frac{s_0}{S_L} = - \left[a' + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2a'h(1-\tau)}{\operatorname{tg}\beta}} \right]$$

$$\times \frac{(1-\tau) \times 4a'h}{4a'h\tau}$$

$$y_G = h \left\{ \frac{1-\tau}{\tau} \left\{ \frac{a'}{h} - \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{a'}{h} \frac{1-\tau}{\operatorname{tg}\beta}} \right\} \right\}$$

2.2.2. - Ordonnée du centre de gravité

$$z_G \times S_L + z_{G_0} \times s_0 = 0 \times S,$$

$$z_G = z_{G_0} \times \frac{s_0}{S_L} = - \left(\frac{1-\tau}{\tau} \right) \cdot \left[h - \frac{2}{3} \operatorname{tg}\beta \right]$$

$$\sqrt{\frac{2a'h(1-\tau)}{\operatorname{tg}\beta}} \quad]$$

$$z_G = -h \left\{ \frac{1-\tau}{\tau} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{a'}{h} (1-\tau) \operatorname{tg}\beta} \right\} \right\}$$

2.2.3. - Rayon de courbure ρ de la trajectoire du centre de gravité

Posant $\operatorname{tg}\beta = t$

$$y'_G = + \frac{1-\tau}{\tau} \times \frac{1}{3} \sqrt{2a'h(1-\tau)} \cdot t^{-3/2}$$

$$= \frac{A}{3} t^{-3/2}$$

$$y''_G = -\frac{1-\tau}{\tau} \times \frac{1}{2} \sqrt{2 a' h (1-\tau)} \cdot t^{-5/2}$$

$$= -\frac{A}{2} t^{-5/2}$$

$$z'_G = +\frac{1-\tau}{\tau} \times \frac{1}{3} \sqrt{2 a' h (1-\tau)} \cdot t^{-1/2}$$

$$= \frac{A}{3} t^{-1/2}$$

$$z''_G = -\frac{1-\tau}{\tau} \times \frac{1}{6} \sqrt{2 a' h (1-\tau)} \cdot t^{-3/2}$$

$$= \frac{A}{6} t^{-3/2}$$

avec $A = \frac{1-\tau}{\tau} \sqrt{2 a' h (1-\tau)}$

$$\text{d'où } \rho = \frac{[y'_G{}^2 + z'_G{}^2]^{3/2}}{y'_G \cdot z''_G - y''_G \cdot y'_G}$$

$$= \frac{\left[\frac{A^2}{9}\right]^{3/2} [t^{-3} + t^{-1}]^{3/2}}{t^{-3} \left[-\frac{A^2}{18} + \frac{A^2}{6}\right]}$$

$$\rho = \frac{\left(\frac{A^3}{3}\right) t^{-3/2} [1 + t^{-2}]^{3/2}}{t^{-3} \times \frac{1}{9} A^2}$$

$$\rho = \frac{A}{3} \times [1 + t^{-2}]^{3/2} \times t^{-3/2}$$

$$\rho_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \sqrt{\frac{2 a'}{h} (1-\tau)} \times \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \beta}\right)^{3/2}$$

2.2.4 – Période propre d'oscillation

La période d'oscillation n'est pas définie, dans ce cas là, au voisinage de $\beta = 0$ puisque la surface libre ne coupe la face supérieure du réservoir.

Par contre lorsque l'accélération latérale est suffisante la période prend la valeur :

$$T \cong 2 \pi \sqrt{\frac{\rho_2}{g}}$$

3. Section carrée

Le côté du carré est a'' .

3.1. – 1er cas

3.1.1. – Abscisse et ordonnée de G_2

$$y_G = \frac{a''}{6} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\tau}$$

$$z_G = a'' \left[\tau - 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{12 \tau} \right]$$

3.1.2. – Rayon de courbure de la trajectoire de G_2

$$\rho_1 = \frac{a''}{6 \tau} \times \frac{1}{\cos^3 \beta}$$

3.1.3. – Période propre d'oscillation au voisinage de la position de repos.

$$\frac{T}{\sqrt{a''}} = \frac{2 \pi}{\sqrt{6g}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

prend en fonction de τ les valeurs numériques suivantes :

τ	$\frac{T}{\sqrt{a''}}$
0,1	2,590
0,2	1,831
0,3	1,495
0,4	1,295
0,5	1,158
0,6	1,057
0,7	0,979
0,8	0,916
0,9	0,863
1,0	0,863

3.2. – 2ème cas

3.2.1. – Abscisse et ordonnée de G_2

$$y_G = -a'' \times \frac{1 - \tau}{\tau} \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2(1 - \tau)}{\text{tg}\beta}} \right]$$

$$z_G = -a'' \times \frac{1 - \tau}{\tau} \left[1 - \frac{2}{3} \text{tg}\beta \sqrt{\frac{2(1 - \tau)}{\text{tg}\beta}} \right]$$

3.2.2. – Rayon de courbure ρ de la trajectoire du centre de gravité

$$\rho_2 = \frac{a''}{3} \frac{1 - \tau}{\tau} \sqrt{2(1 - \tau)} \left(\frac{1 + \text{tg}^2\beta}{\text{tg}\beta} \right)^{3/2}$$

3.2.3. – Période d'oscillation de la masse liquide pour $\text{tg}\beta \gg 0$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_2}{g}}$$

REMARQUE : Section rectangulaire


Dans le cas des réservoirs de faible rapport $\frac{h}{a'}$, un 3ème cas se présente correspondant au schéma :



On peut se ramener au cas 1 par une rotation de 90° ; de ce fait les formules deviennent :

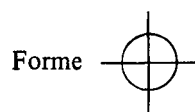
$$y = h \left[\frac{a'}{h} (\tau - 1) + \frac{1}{12} \frac{h}{a'} \frac{\text{cotg}^2\beta}{\tau} \right]$$

$$z = h \times \frac{1}{6} \frac{h}{a'} \times \frac{\text{cotg}\beta}{\tau}$$

Un 4ème cas () pourrait également être extrapolé assez facilement du cas 2.

ANNEXE 3.4

DEPLACEMENTS DU CENTRE DE GRAVITE DE LA REMORQUE



Nature du liquide	Densité t/m ³	a m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ m	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Propane liquide	0,510	1,15	2,40	1,7	6,7	1,11	8,4	2,139	23

τ	Γ	$\frac{y_G}{a}$	- z/a	YGR	ZGR	MR
0,5	3	0,14877	0,39748	0,099	2,026	
	3,5	0,16686	0,39022	0,111	2,031	19,900
	4	0,18404	0,38243	0,122	2,036	
0,6	3	0,11938	0,31895	0,085	2,073	
	3,5	0,13389	0,31312	0,096	2,077	22,200
	4	0,14768	0,30688	0,106	2,082	
0,7	3	0,09040	0,24153	0,068	2,128	
	3,5	0,10139	0,23711	0,077	2,131	24,500
	4	0,11183	0,23238	0,085	2,135	
0,8	3	0,06137	0,16397	0,048	2,189	
	3,5	0,06883	0,16097	0,054	2,191	26,800
	4	0,07592	0,15776	0,060	2,194	
0,9	3	0,03171	0,08471	0,026	2,255	
	3,5	0,03556	0,08316	0,029	2,257	29,100
	4	0,03922	0,08150	0,032	2,258	
0,10	3	0	0	0	2,325	
	3,5	0	0	0	2,325	31,400
	4	0	0	0	2,325	

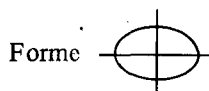
Nature du liquide	Densité t/m ³	a m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Fuel domestique	0,834	0,899	2,149	1,7	5,24	1,11	6,94	1,894	23

$\frac{y}{a}$ et $\frac{z}{a}$ identiques à $\frac{y}{a}$ et $\frac{z}{a}$ du propane liquide

τ	Γ	YGR	ZGR	MR
0,5	3	0,083	1,830	
	3,5	0,094	1,834	18,44
	4	0,103	1,839	
0,6	3	0,071	1,873	
	3,5	0,080	1,876	20,74
	4	0,088	1,880	
0,7	3	0,057	1,920	
	3,5	0,064	1,923	23,04
	4	0,070	1,926	
0,8	3	0,040	1,972	
	3,5	0,045	1,974	25,34
	4	0,050	1,976	
0,9	3	0,021	2,027	
	3,5	0,024	2,028	27,64
	4	0,026	2,030	
1,0	3	0	2,089	
	3,5	0	2,089	29,94
	4	0	2,089	

ANNEXE 3.5

DEPLACEMENTS DU CENTRE DE GRAVITE DE LA REMORQUE



Nature du liquide	Densité t/m ³	a ₁ m	b ₁ m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Propane liquide	0,510	1,24	1,067	2,317	1,7	6,7	1,11	8,4	2,072	23

$$\left[\frac{y_G}{a} \right]_{\text{ellipse}} = \left[\frac{y_G}{a} \right]_{\text{cercle}} \times \frac{a_1}{a}; \quad \left[\frac{z_G}{a} \right]_{\text{ellipse}} = \left[\frac{z_G}{a} \right]_{\text{cercle}} \times \frac{a}{a_1}$$

τ	Γ _T	YGR	ZGR	MR
0,5	3	0,107	1,969	
	3,5	0,120	1,973	19,9
	4	0,132	1,978	
0,6	3	0,092	2,013	
	3,5	0,103	2,017	22,2
	4	0,114	2,023	
0,7	3	0,073	2,064	
	3,5	0,083	2,067	24,5
	4	0,092	2,070	
0,8	3	0,052	2,120	
	3,5	0,058	2,122	26,8
	4	0,065	2,125	
0,9	3	0,028	2,182	
	3,5	0,031	2,183	29,1
	4	0,035	2,185	
1,0	3	0	2,252	
	3,5	0	2,252	31,4
	4	0	2,252	

Nature du liquide	Densité t/m ³	a ₁ m	h ₁ m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Fuel domestique	0,834	1,24	0,652	1,902	1,7	5,64	1,11	7,34	1,719	23

τ	Γ_T	YGR	ZGR	MR
0,5	3	0,113	1,673	
	3,5	0,126	1,675	18,84
	4	0,139	1,679	
0,6	3	0,097	1,703	
	3,5	0,108	1,705	21,14
	4	0,120	1,708	
0,7	3	0,077	1,737	
	3,5	0,086	1,739	23,44
	4	0,095	1,741	
0,8	3	0,054	1,773	
	3,5	0,061	1,775	25,74
	4	0,067	1,776	
0,9	3	0,029	1,813	
	3,5	0,033	1,184	28,04
	4	0,036	1,815	
1,0	3	0	1,858	
	3,5	0	1,858	30,34
	4	0	1,858	

ANNEXE 3.6
DEPLACEMENTS DU CENTRE DE GRAVITE DE LA REMORQUE

Forme

Nature du liquide	Densité t/m ³	a'' m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Propane liquide	0,510	1,019	2,269	1,70	7,56	1,11	9,26	2,056	23

τ	Γ_T	Forme type	y _G	-z _G	YGR	ZGR	MR
0,5	3	1	0,127	0,486	0,070	1,905	
	3,5	1	0,145	0,479	0,080	1,909	20,76
	4	1	0,164	0,470	0,091	1,914	
0,6	3	1	0,106	0,388	0,063	1,951	
	3,5	1	0,121	0,382	0,072	1,955	23,06
	4	1	0,136	0,375	0,081	1,959	
0,7	3	1	0,091	0,289	0,058	2,008	
	3,5	1	0,104	0,284	0,066	2,011	25,36
	4	1	0,117	0,278	0,074	2,015	
0,75	3	1	0,085	0,239	0,055	2,039	
	3,5	1	0,097	0,234	0,063	2,042	26,51
	4	1	0,109	0,229	0,071	2,046	
0,8	3	1	0,079	0,189	0,053	2,072	
	3,5	2	0,091	0,185	0,061	2,075	27,66
	4	2	0,100	0,180	0,067	2,078	
0,85	3	2	0,073	0,140	0,050	2,106	
	3,5	2	0,079	0,137	0,054	2,108	28,81
	4	2	0,085	0,134	0,058	2,110	
0,9	3	2	0,058	0,093	0,040	2,139	
	3,5	2	0,062	0,091	0,043	2,140	29,96
	4	2	0,065	0,090	0,045	2,141	
1,0	3	2	0	0	0	2,208	
	3,5	2	0	0	0	2,208	32,26
	4	2	0	0	0	2,208	

Nature du liquide	Densité t/m ³	a'' m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Fuel domestique	0,834	0,797	2,047	1,70	5,915	1,11	7,615	1,838	23

τ	Γ_T	y _G	-z _G	YGR	ZGR	MR
0,5	3	0,099	0,380	0,060	1,735	
	3,5	0,113	0,375	0,068	1,738	19,115
	4	0,128	0,368	0,077	1,742	
0,6	3	0,083	0,303	0,053	1,777	
	3,5	0,095	0,299	0,061	1,780	24,415
	4	0,106	0,293	0,068	1,786	
0,7	3	0,071	0,226	0,048	1,826	
	3,5	0,081	0,222	0,055	1,829	23,715
	4	0,092	0,217	0,062	1,833	
0,75	3	0,066	0,187	0,046	1,853	
	3,5	0,076	0,181	0,053	1,857	24,865
	4	0,085	0,179	0,059	1,859	
0,8	3	0,062	0,148	0,044	1,881	
	3,5	0,071	0,145	0,050	1,883	26,015
	4	0,078	0,141	0,055	1,886	
0,85	3	0,057	0,109	0,041	1,910	
	3,5	0,062	0,107	0,045	1,911	27,165
	4	0,066	0,105	0,047	1,913	
0,9	3	0,045	0,073	0,035	1,937	
	3,5	0,048	0,071	0,035	1,939	28,315
	4	0,051	0,070	0,037	1,940	
1,0	3	0	0	0	1,935	
	3,5	0	0	0	1,995	30,615
	4	0	0	0	1,995	

ANNEXE 3.7.

DEPLACEMENTS DU CENTRE DE GRAVITE DE LA REMORQUE

Forme

Nature du liquide	Densité t/m ³	a' m	h m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Propane liquide	0,510	1,24	0,838	2,088	1,7	7,71	1,11	9,41	1,911	23

τ	Γ_T	Forme type	y _G	-z _G	YGR	ZGR	MR
0,5	3	1	0,229	0,376	0,126	1,802	
	3,5	1	0,262	0,363	0,144	1,809	20,91
	4	1	0,295	0,348	0,162	1,817	
0,6	3	1	0,191	0,299	0,114	1,838	
	3,5	1	0,218	0,288	0,130	1,845	23,21
	4	1	0,245	0,276	0,146	1,852	
0,65	3	1	0,176	0,260	0,108	1,860	
	3,5	1	0,201	0,250	0,123	1,866	24,36
	4	2	0,226	0,239	0,139	1,873	
0,7	3	1	0,164	0,221	0,104	1,883	
	3,5	2	0,187	0,211	0,118	1,890	25,51
	4	2	0,206	0,203	0,130	1,895	
0,8	3	2	0,125	0,144	0,083	1,933	
	3,5	2	0,146	0,139	0,097	1,936	27,81
	4	2	0,155	0,135	0,103	1,939	
0,9	3	2	0,083	0,072	0,057	1,983	
	3,5	2	0,086	0,071	0,059	1,984	30,11
	4	2	0,089	0,070	0,061	1,985	
1,0	3	2	0	0	0	2,033	
	3,5	2	0	0	0	2,033	32,41
	4	2	0	0	0	2,033	

Nature du liquide	Densité t/m ³	a' m	h m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t
Fuel domestique	0,834	1,24	0,512	1,762	1,700	6,50	1,11	8,2	1,627	23

τ	Γ_T	Forme type	y_G	$-z_G$	YGR	ZGR	MR
0,4	3	1	0,468	0,220	0,247	1,582	
	3,5	1	0,535	0,193	0,283	1,596	17,4
	4	1	0,602	0,162	0,318	1,613	
0,45	3	1	0,416	0,204	0,232	1,589	
	3,5	1	0,476	0,180	0,266	1,602	18,55
	4	2	0,534	0,153	0,298	1,617	
0,5	3	1	0,375	0,186	0,219	1,597	
	3,5	2	0,428	0,165	0,250	1,609	19,70
	4	2	0,474	0,143	0,277	1,622	
0,6	3	2	0,309	0,148	0,194	1,619	
	3,5	2	0,342	0,134	0,215	1,628	22,00
	4	2	0,370	0,122	0,232	1,635	
0,7	3	2	0,243	0,112	0,161	1,642	
	3,5	2	0,262	0,104	0,174	1,648	24,30
	4	2	0,277	0,097	0,184	1,652	
0,8	3	2	0,173	0,077	0,120	1,667	
	3,5	2	0,182	0,073	0,126	1,670	26,60
	4	2	0,189	0,070	0,131	1,672	
0,9	3	2	0,095	0,041	0,068	1,694	
	3,5	2	0,097	0,040	0,069	1,695	28,90
	4	2	0,100	0,039	0,072	1,696	
1,0	3	2	0	0	0	1,727	
	3,5	2	0	0	0	1,727	31,20
	4	2	0	0	0	1,727	


ANNEXE 3.8
MOUVEMENTS OSCILLATOIRES TRANSVERSAUX

		Période propre d'oscillation transversale de la masse liquide pour $\Gamma_T \neq 0$							
Forme de la section →		circulaire		elliptique		carrée		rectangulaire	
a (m)		1,15	0,899						
a_1 (m)				1,24	1,24				
b_1 (m)				1,067	0,652				
a'' (m)						1,019	0,797		
a' (m)								1,24	1,24
h (m)								0,838	0,512
Nature du liquide →		P.L. ^x	F.D. ^x	P.L.	F.D.	P.L.	F.D.	P.L.	F.D.
$\tau \downarrow$									
0,7		1,092	0,966	1,178	1,332	0,988	0,874	1,326	1,697
0,8		0,900	0,796	0,970	1,098	0,925	0,818	1,241	1,587
0,9		0,647	0,572	0,697	0,789	0,871	0,770	1,169	1,496

^xP.L. = propane liquide
F.D. = fuel domestique

ANNEXE 3.9

DEPLACEMENTS LONGITUDINAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE DU LIQUIDE ET DE LA REMORQUE EN DECELERATION

Forme section : 

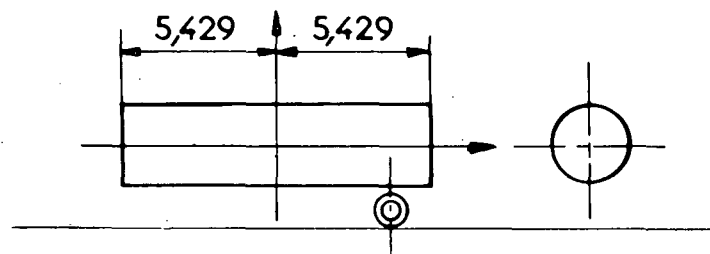
Nature du liquide	Densité t/m ³	a m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t	τ
Propane liquide	0,510	1,15	2,4	1,7	6,7	1,11	8,4	2,139	23	0,9

Décélération Γ _L m/s ²	-x _G	-z _G	XGR	ZGR	MR
0	0	0,104	4,750	2,251	29,1
2	0,308	0,080	4,442	2,268	29,1
4	0,367	0,065	4,383	2,278	29,1

Nature du liquide	Densité t/m ³	a m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t	τ
Fuel domestique	0,834	0,899	2,149	1,7	5,24	1,11	6,94	1,894	23	0,9


Décélération Γ _L m/s ²	-x _G	-z _G	XGR	ZGR	MR
0	0	0,081	4,750	1,923	29,1
2	0,314	0,058	4,436	1,939	29,1
4	0,341	0,048	4,409	1,946	29,1

Schéma :



ANNEXE 3.10

DEPLACEMENTS LONGITUDINAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE DU LIQUIDE ET DE LA REMORQUE EN DECELERATION

Forme section : 

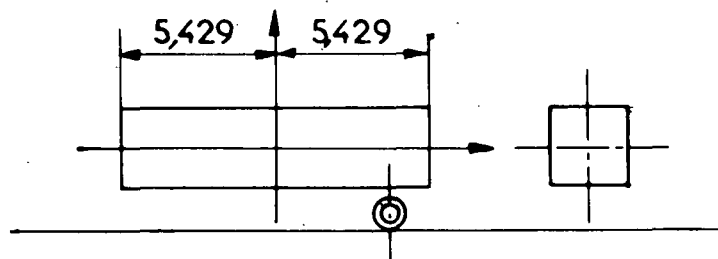
Nature du liquide	Densité t/m ³	a'' m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t	τ
Propane liquide	0,510	1,019	2,269	1,70	7,56	1,11	9,26	2,056	23	0,9

Décélération Γ _L m/s ²	-x _G	-z _G	XGR	ZGR	MR
0	0	0,102	4,750	2,133	29,96
2	0,431	0,078	4,452	2,149	29,96
4	0,481	0,063	4,418	2,160	29,96

Nature du liquide	Densité t/m ³	a'' m	z ₀ m	M' ₁ t	M'' ₁ t	z' ₁ m	M ₁ t	z ₁ m	M ₁₀₀ t	τ
Fuel domestique	0,834	0,797	2,047	1,7	5,915	1,11	7,615	1,836	23	0,9

Décélération Γ _L m/s ²	-x _G	-z _G	XGR	ZGR	MR
0	0	0,080	4,750	1,932	26,315
2	0,451	0,057	4,420	1,949	28,315
4	0,495	0,045	4,388	1,958	28,315

Schéma :



ANNEXE 3.11

DEPLACEMENTS LONGITUDINAUX, TRANSVERSAUX ET VERTICAUX DU CENTRE DE GRAVITE DE LA MASSE LIQUIDE (x, y, z) ET DU CENTRE DE GRAVITE DE LA REMORQUE EN FONCTION DE L'ACCELERATION TRANSVERSALE ET DE LA DECELERATION

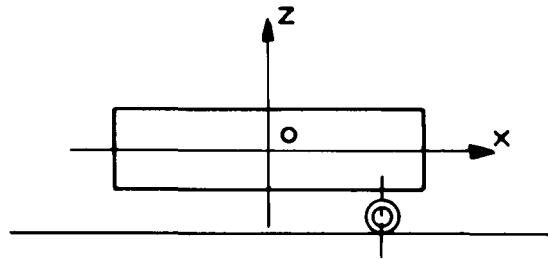
CITERNE CIRCULAIRE

Densité du fluide : 0,510 t/m³

Taux de remplissage citerne : 0,9







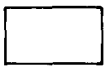
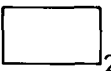
Γ_L	ρ	Γ_T	x	y	z	XGR	YGR	ZGR
2	0,0805	3	0,3082	0,028	0,075	4,442	0,020	2,271
		3,5	0,3082	0,032	0,074	4,442	0,023	2,272
		4,0	0,3082	0,035	0,073	4,442	0,025	2,273
4	0,065	3	0,3666	0,023	0,061	4,383	0,016	2,281
		3,5	0,3666	0,026	0,060	4,383	0,018	2,282
		4,0	0,3666	0,028	0,059	4,383	0,020	2,283

Schéma :



ANNEXE 3.12

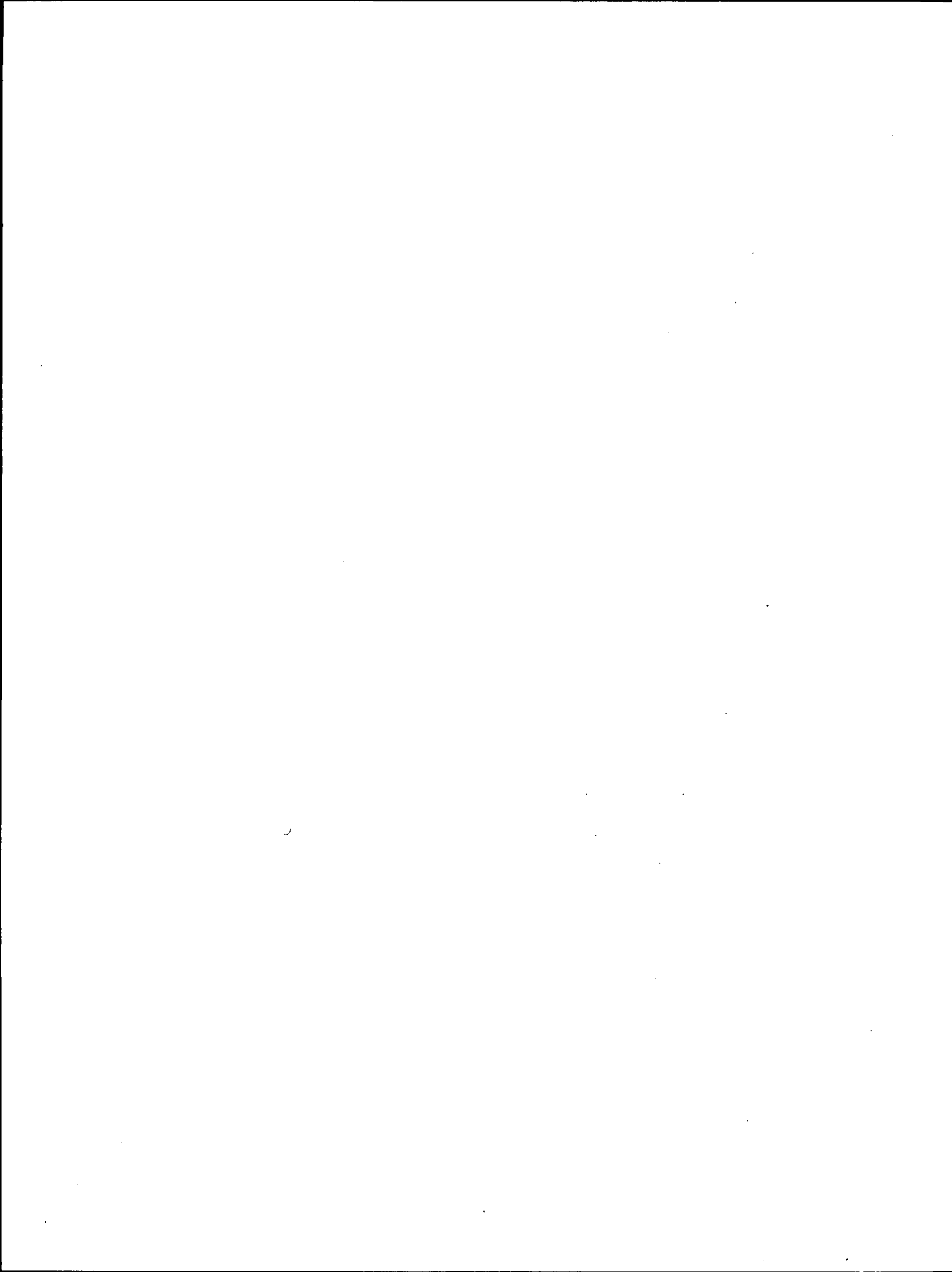
VALEURS DE γ_{c1} et γ_{c2}
 POUR DIFFERENTES VALEURS DU TAUX DE REMPLISSAGE,
 DIFFERENTES FORMES DE CITERNE ET POUR DEUX VOLUMES
 SPECIFIQUES DU LIQUIDE TRANSPORTE

τ	 1		 2		 1		 2		 1		 2		 1		 2	
	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}	γ_{c1}	γ_{c2}
0,4															3,368	4,642
0,45															3,413	4,651
0,50	3,324	4,518	3,761	5,122	3,381	4,595	3,919	5,310	3,655	4,861	4,078	5,448	3,549	4,731	3,455	4,669
0,60	3,282	4,385	3,722	4,978	3,350	4,478	3,928	5,217	3,582	4,713	4,009	5,286	3,523	4,641	3,551	4,810
0,65													3,504	4,590		
0,70	3,240	4,270	3,683	4,858	3,322	4,368	3,954	5,178	3,480	4,538	3,910	5,086	3,471	4,521	3,698	4,950
0,75									3,424	4,440	3,854	5,003				
0,80	3,202	4,173	3,647	4,741	3,299	4,297	3,991	5,159	3,360	4,338	3,802	4,913	3,455	4,440	3,895	5,120
0,85									3,311	4,285	3,762	4,864				
0,90	3,160	4,076	3,613	4,650	3,275	4,220	4,035	5,148	3,286	4,232	3,738	4,803	3,505	4,521	4,136	5,296
0,1	3,128	3,998	3,577	4,559	3,252	4,146	4,094	5,161	3,318	4,213	3,767	4,771	3,663	4,620	4,443	5,554
Indice 1 : fluide léger (0,510 t/m ³) – Indice 2 : fluide dense (0,83 t/m ³)																

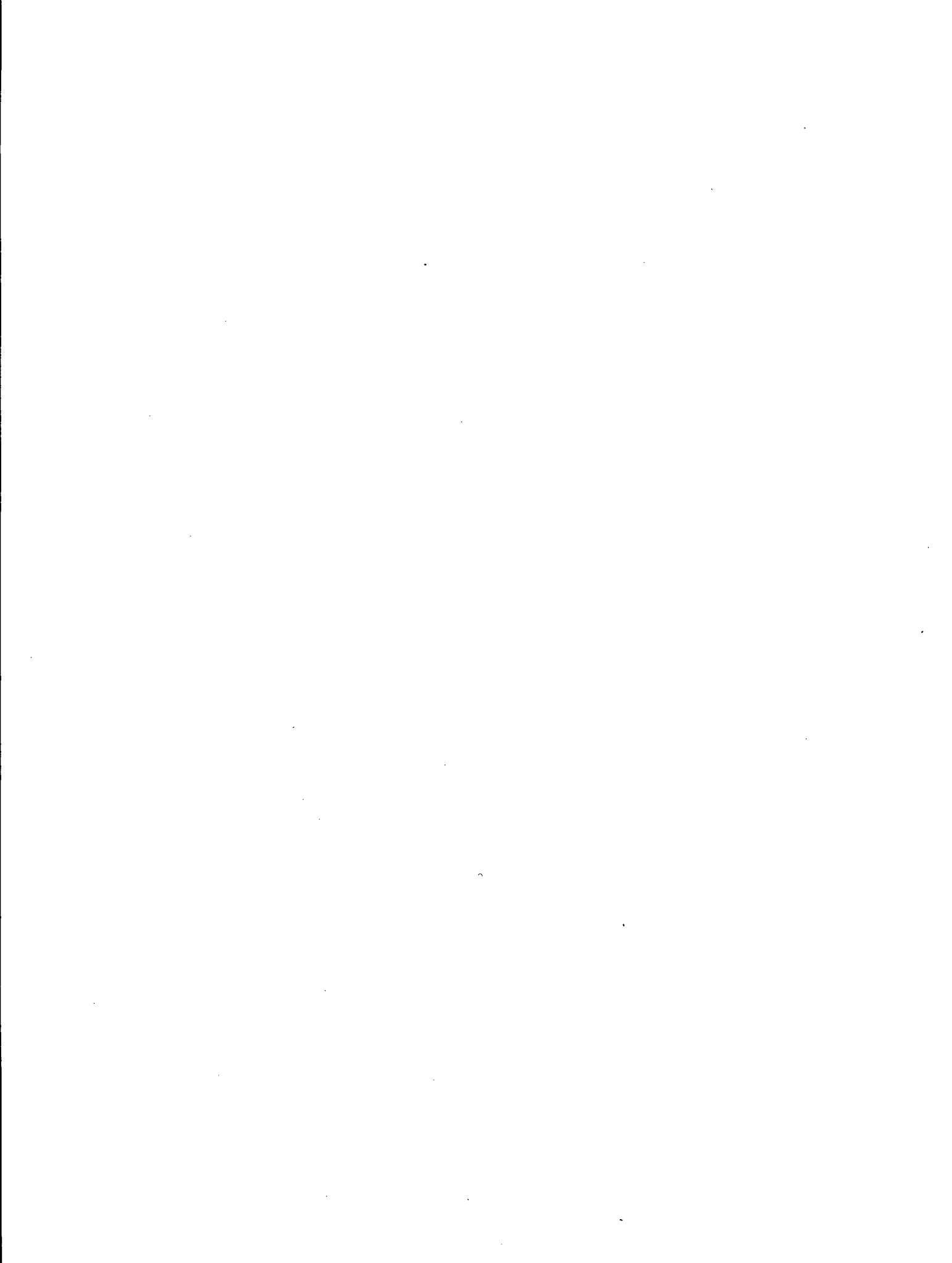
ANNEXE 3.13

VARIATION DES ACCELERATIONS TRANSVERSALES
 CRITIQUES γ_{c1} et γ_{c2} EN FONCTION DE LA DECELERATION
 DE FREINAGE POUR UNE CITERNE CIRCULAIRE
 ET UN TAUX DE REMPLISSAGE DE 0,9

		γ_{c1} m/s ²	γ_{c2} m/s ²
Γ_L m/s ²	0	3,160	4,076
	2	2,841	4,129
	4	2,654	4,188



ANNEXE 4
MODELE DYNAMIQUE



ANNEXE 4.1
DONNEES NUMERIQUES

MASSES NON SUSPENDUES					
N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
1	a_1	Distance horizontale entre point de contact pneu et centre instantané RC_i	m	+ lorsque RC_i du côté axe voiture par rapport à la roue	1,011
2	a_2	"	m	"	0,937
3	a_3	"	m	"	1,020
4	a_4	"	m	"	1,020
5	a_5	"	m	"	1,020
6	a'_1	Distance horizontale entre cg g'_i du 1/2 essieu et centre instantané RC.	m	+ lorsque RC du côté intérieur voiture par rapport à cg. g'_i	0,800
7	a'_2	"	m	"	0,550
8	a'_3	"	m	"	0,800
9	a'_4	"	m	"	0,800
10	a'_5	"	m	"	0,800

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
11	a''_1	$a''_1 = a'_1 - a_i$	m	Résulte de définition	- 0,211
12	a''_2	"	m	"	- 0,387
13	a''_3	"	m	"	- 0,220
14	a''_4	"	m	"	- 0,220
15	a''_5	"	m	"	- 0,220
16	b_1	Distance verticale entre RC_i et $cg\ g'_i$	m	+ $q\delta\ g'_i$ au dessus de RC_c	- 0,020
17	b_2	"	m	"	- 0,190
18	b_3	"	m	"	- 0,130
19	b_4	"	m	"	- 0,130
20	b_5	"	m	"	- 0,130
21	d_1	Hauteur de RC_i par rapport au sol	m	+ si RC_i au dessus du sol	0,500
22	d_2	"	m	"	0,690
23	d_3	"	m	"	0,610
24	d_4	"	m	"	0,610
25	d_5	"	m	"	0,610
26	D_1	Rigidité de dérive essieu i	N/rad	+	440.610
27	D_2	"	"	+ "	1.184.140
28	D_3	"	"	+ "	617.440
29	D_4	"	"	+ "	617.440
30	D_5	"	"	+ "	617.440

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
31	e_1	Voie de l'essieu i	m	+	2,022
32	e_2	"	m	+	1,874
33	e_3	"	m	+	2,040
34	e_4	"	m	+	2,040
35	e_5	"	m	+	2,040
36	E_1	$\frac{\partial Y_i}{\partial Z_i}$ d'un essieu présentant un carrossage et un pincement initial	S.D.	$\partial Z_i > 0 =$ augmentation de réaction du sol sur roue du côté droit + ou - selon le cas	0
37	E_2	"	S.D.	"	0
38	E_3	"	S.D.	"	0
39	E_4	"	S.D.	"	0
40	E_5	"	S.D.	"	0
41	F_1	$F_i = \frac{\partial Y_i}{\partial c_i}$	N/rad	+ ou - selon le cas	- 8.992
42	F_2	"	"	"	- 23.218
43	F_3	"	"	"	- 11.761
44	F_4	"	"	"	- 11.761
45	F_5	"	"	"	11.761
46	h_1	Hauteur par rapport au sol du cg g_i	m	+	0,480
47	h_2	"	m	+	0,500
48	h_3	"	m	+	0,480
49	h_4	"	m	+	0,480
50	h_5	"	m	+	0,480

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
51	i_{01}	Moment d'inertie de rotation des roues d'un essieu	kg x m ²	+	9
52	i_{02}	"	"	+	16
53	i_{03}	"	"	+	10
54	i_{04}	"	"	+	10
55	i_{05}	"	"	+	10
56	K_1	Raideur transversale de l'ensemble des pneumatiques de l'essieu	N/m	+	0,297.10 ⁶
57	K_2	"	"	+	0,767.10 ⁶
58	K_3	"	"	+	0,388.10 ⁶
59	K_4	"	"	+	0,388.10 ⁶
60	K_5	"	"	+	0,388.10 ⁶
61	$L_{\varphi 1}$	Raideur antiroulis des pneumatiques de l'essieu i	m.N/rad	+	149,215 x 10 ⁴
62	$L_{\varphi 2}$	"	"	+	261,106 x 10 ⁴
63	$L_{\varphi 3}$	"	"	+	184,960 x 10 ⁴
64	$L_{\varphi 4}$	"	"	+	184,960 x 10 ⁴
65	$L_{\varphi 5}$	"	"	+	184,960 x 10 ⁴
66	$L_{\Phi 1}$	Raideur antiroulis de la suspension de l'essieu i	m.N/rad	+	9,474 x 10 ⁴
67	$L_{\Phi 2}$	"	"	+	81,545 x 10 ⁴
68	$L_{\Phi 3}$	"	"	+	234,578 x 10 ⁴
69	$L_{\Phi 4}$	"	"	+	234,578 x 10 ⁴
70	$L_{\Phi 5}$	"	"	+	234,578 x 10 ⁴

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
71	$L\Phi_1$	Constante d'amortissement de roulis de l'essieu i	$\frac{m \cdot N}{\text{rad/s}}$	+	7,058 ($\epsilon_v = 0,4$)
72	$L\Phi_2$	"	"	+	39,382 ($\epsilon_v = 0,4$)
73	$L\Phi_3$	"	"	+	66,758 ($\epsilon_v = 0,4$)
74	$L\Phi_4$	"	"	+	66,758 ($\epsilon_v = 0,4$)
75	$L\Phi_5$	"	"	+	66,758 ($\epsilon_v = 0,4$)
76	m_1	Masse non suspendue de l'essieu i	kg	+	300
77	m_2	"	"	+	630
78	m_3	"	"	+	370
79	m_4	"	"	+	370
80	m_5	"	"	+	370
81	r_1	Rayon de roulement de l'essieu i	m	+	0,500
82	r_2	"	m	+	0,500
83	r_3	"	m	+	0,500
84	r_4	"	m	+	0,500
85	r_5	"	m	+	0,500
86	x_1	Abscisse de l'essieu i par rapport à G_1 xyz	m	$\perp = +$	+ 0,958
87	x_2	"	m	$\perp = -$	- 2,242
88	x_3	Abscisse de l'essieu i par rapport à G_2 xyz	m	+ ou - selon le cas	- 1,640
89	x_4	"	m	"	- 2,790
90	x_5	"	m	"	- 3,940

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
91	x_1'	Abscisse du point d'application de la poussée latérale de guidage de l'essieu i par rapport à G_1 xyz	m	$\perp = +$	+0,938
92	x_2'	"	m	$\perp = -$	- 2,262
93	x_3'	Abscisse du point d'application de la poussée latérale de guidage de l'essieu i par rapport à G_2 xyz	m	+ ou - selon le cas	- 1,660
94	x_4'	"	m	"	- 2,810
95	x_5'	"	m	"	- 3,960
96	x_1''	Abscisse du cg g_i par rapport au trièdre G_1 xyz	m	$\perp = +$	+0,958
97	x_2''	"	m	$\perp = -$	- 2,242
98	x_3''	Abscisse du cg g_i par rapport au trièdre G_2 xyz	m	+ ou - selon le cas	- 1,640
99	x_4''	"	m	"	- 2,790
100	x_5''	"	m	"	- 3,940
101	z_1'	Ordonnée du centre roulis de l'essieu i par rapport à G_1 xyz	m	En général négatif	- 0,443
102	z_2'	"	m	"	- 0,253
103	z_3'	Ordonnée du centre roulis de l'essieu i par rapport à G_2 xyz	m	"	- 1,529
104	z_4'	"	m	"	- 1,529
105	z_5'	"	m	"	- 1,529

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
106	Z_{01}	Réaction statique verticale sous la roue de droite de l'essieu i	N	+	22.480
107	Z_{02}	"	"	+	58.046
108	Z_{03}	"	"	+	29.402
109	Z_{04}	"	"	+	29.402
110	Z_{05}	"	"	+	29.402
111	ρ_{1c}	Rayon de giration de carrossage d'un demi essieu par rapport à g_i	m	+	0,32
112	ρ_{2c}	"	m	+	0,35
113	ρ_{3c}	"	m	+	0,32
114	ρ_{4c}	"	m	+	0,32
115	ρ_{5c}	"	m	+	0,32
116	$\frac{\partial C_1}{\partial \Phi_1}$	Taux de variation de carrossage en fonction de l'angle de roulis relatif Φ_i entre la masse suspendue et l'essieu i	S.D.	+ ou - selon le cas	0
117	$\frac{\partial C_2}{\partial \Phi_2}$	"	S.D.	"	0
118	$\frac{\partial C_3}{\partial \Phi_3}$	"	S.D.	"	0
119	$\frac{\partial C_4}{\partial \Phi_4}$	"	S.D.	"	0
120	$\frac{\partial C_5}{\partial \Phi_5}$	"	S.D.	"	0

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
121	$\frac{\partial \delta_1}{\partial \Phi_1}$	Taux de braquage induit des roues de l'essieu i en fonction de l'angle de roulis relatif Φ i entre la masse suspendue et l'essieu i	S.D.	+ ou - selon le cas	- 0,05
122	$\frac{\partial \delta_2}{\partial \Phi_2}$	"	S.D.	"	+0,02
123	$\frac{\partial \delta_3}{\partial \Phi_3}$	"	S.D.	"	+0,02
124	$\frac{\partial \delta_4}{\partial \Phi_4}$	"	S.D.	"	+0,02
125	$\frac{\partial \delta_5}{\partial \Phi_5}$	"	S.D.	"	+0,02
126	$\frac{\partial X_1}{\partial Z_1}$	Taux d'augmentation de la résistance au roulement en fonction de la charge	S.D.	+	0,008
127	$\frac{\partial X_2}{\partial Z_2}$	"	S.D.	+	0,008
128	$\frac{\partial X_3}{\partial Z_3}$	"	S.D.	+	0,008
129	$\frac{\partial X_4}{\partial Z_4}$	"	S.D.	+	0,008
130	$\frac{\partial X_5}{\partial Z_5}$	"	S.D.	+	0,008

DIRECTION

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
131	q	$q = \frac{n_1 \Phi''}{m_1}$	m ²	+ ou - selon le cas	+0,0016
132	i_{1Z}	Moment d'inertie de lacet des 2 roues AV par rapport à leur centre de pivotement	kg . m ²	+	24,728
133	$\frac{\partial n_1}{\partial Z_1}$	Variation du moment de lacet de direction en fonction du transfert de charge	m	+ ou - selon le cas	+0,010
134	$\frac{\partial n_1}{\partial u_1}$	Variation du moment de lacet de direction en fonction de la flexion latérale des pneus AV	N	+ ou - selon la géométrie	10,989
135	$\frac{\partial n_1}{\partial \Delta}$	Rappel élastique en direction des roues AV	m.N/rad	+	10 ⁶
135 bis	ℓ	Déport de pivot au niveau du centre de roue	m	+ pour système conventionnel	0,150
135 ter	sin j	j = angle de pivot	S.D.	+ pour système conventionnel	0,100
135.4	$\frac{\partial u_1}{\partial \Delta'}$	Amortissement du rappel élastique en direction des roues AV		+	100

MASSE OSCILLANTE

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
136	m_F	Masse oscillante	kg	+	18.400
137	I_{zF}	Moment d'inertie de l'acet de la masse oscillante par rapport à F	kg . m ²	+	225.400
138	x_{2F}	Abscisse du pt F de la masse oscillante par rapport à G ₂ xyz	m	+ ou - selon le cas	0
139	z_{2F}	Ordonnée - idem -	m	+ ou - selon le cas	+0,506
140	v	Rayon d'oscillation de la masse oscillante	m	+	0,200

MASSES SUSPENDUES

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
141	$\frac{\partial L_F}{\partial F'}$	Variation du couple de frottement de roulis de la masse oscillante en fonction de la vitesse angulaire F'	m.N/rad/S	+	2.062
142	I_{1x}	Moment d'inertie de la masse suspendue du tracteur par rapport à G_{1x}	kg.m ²	+	3.342
143	I_{2x}	Moment d'inertie de la masse suspendue de la remorque par rapport à G_{2x}	"	+	10.164
144	I_{1z}	Moment d'inertie de la masse suspendue du tracteur par rapport à G_{1z}	"	+	5.570
145	I_{2z}	Moment d'inertie de la masse suspendue de la remorque par rapport à G_{2z}	"	+	102.900
146	I_{1xz}	Produit d'inertie de la masse suspendue du tracteur par rapport à G_{1xyz}	kg . m ²	+	0
147	I_{2xz}	Produit d'inertie de la masse suspendue de la remorque par rapport à G_{2xyz}	"	+	0
148	I'_{1z}	Moment d'inertie des masses non suspendues du tracteur par rapport à G_{1z}	"	+	3.930
149	I'_{2z}	Moment d'inertie des masses non suspendues de la remorque par rapport à G_{2z}	"	+	10.365
150	J_1	Longueur de référence du tracteur pour moments aérodynamiques	m	+	3,20

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
151	J_2	Longueur de référence de la semi-remorque pour moments aérodynamiques	m	+	7,54
152	M_{T1}	Masse totale du tracteur	kg	+	6.500
153	M_{T2}	Masse totale de la remorque, masse oscillante non comprise	kg	+	9.500
154	S_1	Maître couple du tracteur	m ²	+	8
155	S_2	Maître couple de la remorque	m ²	+	8
156	x_{1s}	Abscisse de la sellette par rapport à G_1 xyz	m	+ ou - selon le cas	- 1,962
157	x_{2s}	Abscisse de la sellette par rapport à G_2 xyz	m	"	+4,750
158	z_{1s}	Ordonnée de la sellette par rapport à G_1 xyz	m	"	+0,207
159	z_{2s}	Ordonnée de la sellette par rapport à G_2 xyz	m	"	- 0,989
160	$\frac{\partial C_{y1}}{\partial A_1}$	Taux de variation du C_y du tracteur en fonction de son angle de dérive A_1	degré ⁻¹	- lorsque la force est dans le sens du vent relatif	- 0,040

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
161	$\frac{\partial C_{y2}}{\partial A_2}$	Taux de variation du C_y de la remorque en fonction de son angle de dérive A_2	degré ⁻¹	- lorsque la force est dans le sens du vent relatif	- 0,060
162	$\frac{\partial C_{\ell_1}}{\partial A_1}$	Taux de variation du C_{ℓ} du tracteur en fonction de son angle de dérive A_1	degré ⁻¹	Conforme aux conventions sur le moment L et l'angle A En général +	+0,010
163	$\frac{\partial C_{\ell_2}}{\partial A_2}$	Taux de variation du C_{ℓ} de la remorque en fonction de son angle de dérive A_2	degré ⁻¹	"	+4,64 x 10 ⁻⁴
164	$\frac{\partial C_{n_1}}{\partial A_1}$	Taux de variation du C_n du tracteur en fonction de son angle de dérive A_1	degré ⁻¹	Conforme aux conventions sur le moment N et l'angle A + ou - selon le cas	- 0,0125
165	$\frac{\partial C_{n_1}}{\partial A_2}$	Taux de variation du C_n de la remorque en fonction de son angle de dérive A_2	degré ⁻¹	"	0,0080

DONNEES GENERALES

N°	Symbole	Définition	Unité	Convention de signe	Valeur numérique
166	g	Accélération de la pesanteur	m/s ²	+	9,81
167	V	Vitesse de translation du véhicule	m/s	+	16,666

ANNEXE 4-2

ETABLISSEMENT DU MODELE DYNAMIQUE

4.2.1.- DEFINITIONS

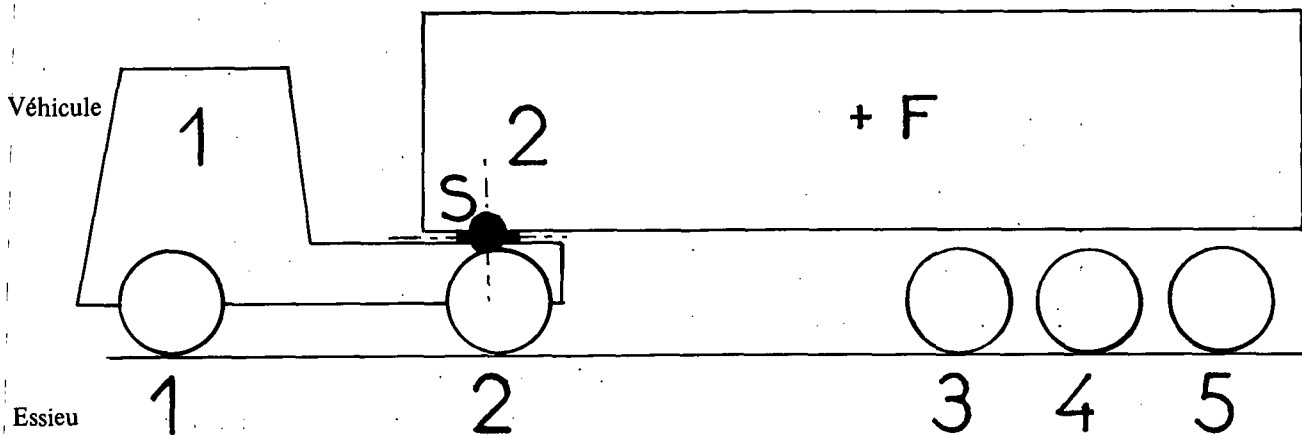
Pour des raisons de simplification des processus de calcul le problème sera étudié comme étant celui du comportement de deux véhicules (véhicule I = tracteur, véhicule II = semi-remorque) rendus solidaires par une liaison ayant les propriétés habituelles de celles des véhicules semi-remorques c'est-à-dire par un joint de cardan.

4.2.1.1. - Système d'axes

Précisons d'abord que le plan de roulement de l'ensemble semi-remorque, est horizontal.

DEFINITIONS PRELIMINAIRES

- Ce qui est lié au repère terrestre est indicé t (exemple : Ox_t)
- Ce qui est relatif au tracteur est indicé 1 (exemple : G_1)
- Ce qui est relatif à la remorque est indicé 2 (exemple : G_2)
- Les 5 essieux sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5 d'avant en arrière :



- Ce qui est relatif au système oscillant est indicé F (exemple : m_F)

- Ce qui est relatif à la sellette S est indicé S (exemple : Y_S)

DEFINISSONS LES CENTRES DE GRAVITE SUIVANTS

Non du centre de gravité	Relatif à la masse
G_1	suspendue du tracteur
G_2	suspendue de la remorque
g_1	non suspendue de l'essieu 1
g_2	non suspendue de l'essieu 2
g_3	non suspendue de l'essieu 3
g_4	non suspendue de l'essieu 4
g_5	non suspendue de l'essieu 5
g_F	oscillante
g_1'	non suspendue du demi-essieu indicé 1
g_2'	non suspendue du demi-essieu indicé 2
g_3'	non suspendue du demi-essieu indicé 3
g_4'	non suspendue du demi-essieu indicé 4
g_5'	non suspendue du demi-essieu indicé 5

Nom du point	Définition
RC_i	Centre instantané de rotation roue/châssis
P_i	Point d'application de la force de guidage du sol sur le(s) pneumatique(s) pour le demi-essieu i. Ce point est le barycentre des poussées élémentaires en chaque point de l'(des) aire(s) de contact pneu(s) - sol du demi-essieu i.
S	sellette : point d'articulation tracteur remorque
F	Point projection du centre de gravité de la masse oscillante g_F sur son axe d'oscillation.

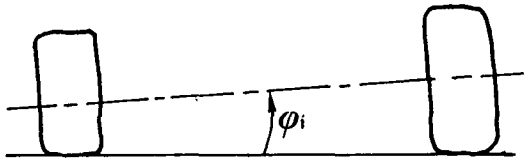
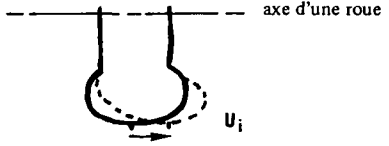
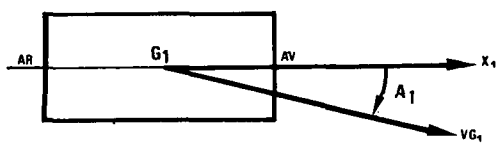
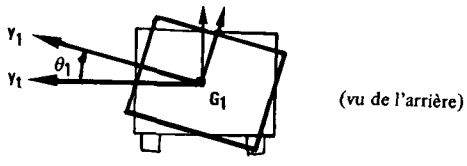
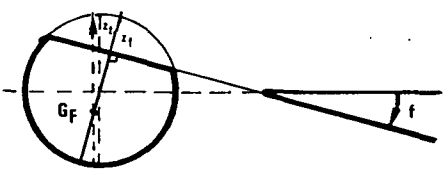
$Ox_t y_t z_t$ est un repère galiléen, lié à la terre, trirectangle direct, et tel que Oz_t est perpendiculaire au plan de roulement.

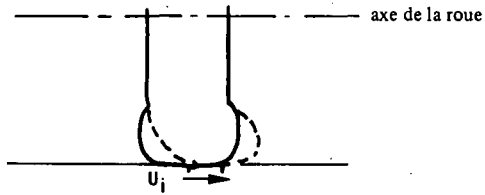
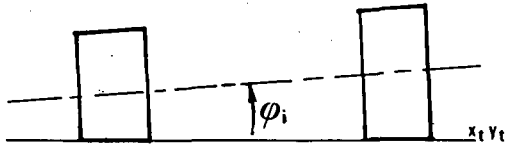

$O_1 x_1 y_1 z_1$ (Resp. : $G_2 x_2 y_2 z_2$) est un repère lié à la masse suspendue du tracteur (resp. de la remorque) et tel que :

- $G_1 x_1$ (resp. $G_2 x_2$) est horizontal et dans le plan de symétrie du tracteur (resp. de la remorque) et dirigé vers l'avant.
- $G_1 y_1$ (resp. $G_2 y_2$) est dirigé vers la gauche.
- $G_1 z_1$ (resp. $G_2 z_2$) est dans le plan de symétrie du tracteur (resp. de la remorque) et dirigé vers le haut.

4.2.1.2. - Degré de liberté

Nous avons retenu 16 degrés de liberté et 3 variables complémentaires pour simuler le comportement du véhicule semi-remorque. Le nombre de variables annexes, non toutes indépendantes (puisque certaines reliées entre elles par des équations) est de 10. Définissons-les.

N° de la variable	Nom de la variable	Définition	
1	Δ	angle de braquage élastique des roues directrices, à direction bloquée.	
2	φ_1	roulis de l'essieu 1 (respectivement 2) = angle de la droite joignant les centres de roues de l'essieu 1 (resp. 2) par rapport au sol.	
3	φ_2		
4	u_1	déplacement latéral des pneumatiques de l'essieu 1 (resp. 2) par rapport à leur position statique	
5	u_2		
6	A_1	angle de route de la masse suspendue du tracteur = angle $(\vec{G}_1 x_1, \vec{V}_{G_1})$	
7	ψ_1	angle de lacet de la masse suspendue du tracteur = angle $(\vec{Ox}_t, \vec{G}_1 x_1)$	
8	θ_1	angle de roulis de la masse suspendue du tracteur = angle $(\vec{G}_1 z_t, \vec{G}_1 z_1)$	
9	Y_S	force latérale à la sellette, exercée par la remorque sur le tracteur	
10	L_S	couple de roulis transmis par la sellette de la remorque au tracteur	
11	f	angle d'inclinaison de la masse oscillante = angle $(\vec{G}_F z_F, \vec{G}_F z_t)$	
12	ψ_2	angle de lacet de la masse suspendue de la remorque = angle $(\vec{Ox}_t, \vec{G}_2 x_2)$	
13	A_2	angle de route de la masse suspendue de la remorque = angle $(\vec{G}_2 x_2, \vec{V}_{G_2})$	

N° de la variable	Nom de la variable	Définition	
14 15 16	u_3 u_4 u_5	déplacement latéral des pneumatiques de l'essieu 3 (resp. 4, resp. 5). [valeur moyenne des déplacements latéraux de chaque pneumatique].	
17 18 19	φ_3 φ_4 φ_5	roulis de l'essieu 3 (resp. 4, resp. 5)	
Variables annexes	ψ_{21}	angle de cap relatif entre les masses suspendues du tracteur et de la remorque = (G_1x_1, G_2x_2)	
	θ_2	roulis de la masse suspendue de la remorque : $\theta_2 = \theta (= \theta_1)$	
	Y_F	force latérale transmise de la masse oscillante à la masse suspendue de la remorque	
	L_F	couple de roulis transmis de la masse oscillante à la masse suspendue de la remorque	
	N_F	couple de lacet transmis de la masse oscillante à la masse suspendue de la remorque	
	C_i	carrossage de l'essieu i	
	α_i	angle de dérive des pneumatiques de l'essieu i	
	Z_i	charge verticale (suivante OZ_t) sur les pneumatiques de l'essieu i	
	\mathcal{F}	angle relatif de la masse oscillante et de la masse suspendue de la remorque	
ϕ_i	angle relatif de roulis entre la masse suspendue du véhicule correspondant à l'essieu i, et l'essieu i.		

4.2.1.3. - Equations

Pour pouvoir déterminer le comportement dans le temps de ces 19 variables, nous sommes amenés à écrire 19 équations indépendantes.

Nous avons :

- 6 sous-systèmes solides :
 - la masse suspendue du tracteur,
 - la masse suspendue de la remorque (masse oscillante exclue),
 - les 4 essieux non directeurs,
- 1 sous-système considéré comme solide :
 - la masse oscillante.

Dans cette étude, la masse liquide est représentée comme un système pendulaire non rotationnel en roulis, possédant les propriétés d'inerties d'une masse rigide dans les mouvements de lacet.

Pour faire cette approximation, nous avons défini le centre d'oscillation qui est le centre de courbure de la trajectoire du centre de gravité de la section liquide (Cf. Chapitre 8).

- 6 systèmes déformables :
 - les 5 trains de pneumatiques,
 - l'essieu directeur, qui peut prendre un braquage élastique.

Il est évident que nous n'avons pas $13 \times 6 = 78$ équations indépendantes puisque d'une part, des degrés de liberté sont bloqués, d'autre part, les liaisons entre ces 13 sous-systèmes réduisent ce nombre. Cependant, nous pouvons écrire 19 équations qui assurent la détermination des 19 variables.

4.2.1.4. - Définition des équations

Numéro de l'équation	Nom de l'équation	Définition
1	n_1	Equilibre de la direction, en rotation autour des pivots dans le repère $G_1x_t y_t z_t$
2	ϱ_1	Equilibre, en roulis, de l'essieu 1 (resp. 2) autour de RC_1x_1 (resp. RC_2x_2)
3	ϱ_2	
4	Y_{11}	Equilibre latéral des pneumatiques de l'essieu 1 (resp. 2) dans le repère $g_1x_1 y_1 z_1$ (resp. $g_2x_1 y_1 z_1$)
5	Y_{12}	
6	Y_1	Equilibre latéral d'ensemble du tracteur (dans le repère $Ox_t y_t z_t$)
7	N_1	Equilibre de lacet du tracteur (repère $G_1x_t y_t z_t$)
8	L_1	Equilibre de roulis du tracteur (dans le repère $G_1x_t y_t z_t$)
9	ϱ_f	Equilibre de roulis de la masse oscillante (repère $G_2x_2 y_2 z_2$)
10	$V_{1ys} = V_{2ys}$	Egalité des vitesses de la sellette d'une part considérée comme appartenant à la masse suspendue du tracteur, d'autre part considérée comme appartenant à la masse suspendue de la remorque, vitesses calculées dans le repère $(Ox_t y_t z_t)$.
11	L_2	Equilibre de roulis de la remorque (repère $G_2x_t y_t z_t$)
12	N_2	Equilibre de lacet de la remorque (repère $G_2x_t y_t z_t$)
13	Y_2	Equilibre latéral d'ensemble de la remorque (repère $Ox_t y_t z_t$)
14	Y_{23}	Equilibre latéral des pneumatiques de l'essieu 3 (resp. 4, resp. 5) dans le repère $(g_3x_2 y_2 z_2)$ (resp. $g_4x_2 y_2 z_2$) resp. $(g_5x_2 y_2 z_2)$
15	Y_{24}	
16	Y_{25}	
17	ϱ_3	Equilibre en roulis, de l'essieu 3 (resp. 4, resp. 5) dans le repère $(g_3x_2 y_2 z_2)$ resp. $(G_4x_2 y_2 z_2)$ resp. $(g_5x_2 y_2 z_2)$, autour de RC_3 (resp. RC_4 , resp. RC_5)
18	ϱ_4	
19	ϱ_5	

4.2.1.5. - Hypothèses restrictives

Comme dans toute modélisation, de nombreuses hypothèses simplificatrices ont été faites, pour permettre la mise en équation du système :

- continuité des phénomènes dans le domaine d'étude,
- assimilation du frottement solide à un frottement visqueux,
- blocage des degrés de liberté non pris en compte,
- réduction du fret liquide à un pendule simple,
- découplage de la dynamique longitudinale de transversale,
- sol horizontal et plan,
- linéarisation de toutes les équations.

Ces hypothèses demandent à être explicitées et justifiées.

- Continuité des phénomènes dans le domaine d'étude.

Les phénomènes sur un véhicule réel ne sont pas tous continus. Par exemple, lors d'un virage négocié à accélération transversale très élevée, il peut y avoir décollement d'une roue. De même peut-il y avoir un blocage de débattement d'une roue en fin de course par une butée? Ces discontinuités n'ont pas été prises en compte pour des raisons de simplification, et cette hypothèse est valide dans un très grand domaine d'étude.

Pour l'exemple du décollement de la roue, le modèle mathématique décrit le phénomène de façon correcte jusqu'à l'instant de décollement. On notera donc que cette étude est plus une étude de tendance au renversement qu'une étude de renversement. Mais le décollement de la roue précédant, chronologiquement et logiquement, le renversement, il semble raisonnable de penser qu'une amélioration du comportement vis-à-vis du premier phénomène entraîne une amélioration du comportement vis-à-vis du deuxième : il ne saurait y avoir renversement s'il n'y a plus décollement de la roue.

- Assimilation des frottements solides/visqueux

Dans un véhicule réel, des frottements solides existent (exemple : dans les lames de ressorts de suspension, dans les pivots de direction, etc...). Pour une formulation mathématique plus simple, il est courant de les assimiler à des frottements visqueux. Cependant que cette assimilation, pour courante qu'elle soit, n'est pas totalement satisfaisante (d'autant moins que la vitesse du phénomène est grand).

- Blocage des degrés de liberté non pris en compte

La prise en compte de 16 degrés de liberté indépendants peut paraître importante, mais l'étude n'en ait pas moins très simplifiée. Les degrés de liberté non pris en compte sont évidemment bloqués, et, par exemple, toutes les déformations élastiques (sauf suspension en vertical - pneumatique - direction) ont été négligées.

Ces dispositions ont des ordres de grandeur faible, et leur influence est inférieure au deuxième ordre.

- Réduction du fret liquide à un pendule simple

Cette réduction a été traitée dans le chapitre 8. Nous rappellerons les résultats obtenus :

Taux de remplissage	Rayon de courbure : v
	rayon interne
0,1	0,814
0,2	0,700
0,3	0,602
0,4	0,511
0,5	0,424
0,6	0,341
0,7	0,258
0,8	0,175
0,9	0,090
1,0	0,000

v : rayon de courbure de la trajectoire du centre de gravité de la masse liquide.

Le système constitué par une masse liquide oscillant à une distance fixe v du centre géométrique de la citerne est équivalent à un pendule. Pour les fluides peu visqueux, la masse liquide est irrotationnelle en roulis et de ce fait, on peut l'assimiler à un pendule simple de longueur v.

- Découplage des dynamiques longitudinale/transversale

Pour un véhicule non articulé, on peut considérer séparément les deux dynamiques sous certaines conditions (couplage aérodynamique - par exemple variation d'efforts longitudinaux avec le paramètre z - faible) que l'on admet couramment. Dans le cas d'un véhicule articulé, il faut en plus supposer qu'il n'y a pas de couplage longitudinal/transversal à la sellette du fait de l'angle relatif des deux véhicules : ψ_{21} . Ceci revient à négliger l'angle ψ_{21} , et l'on vérifie, a posteriori, que cela est admissible.

- Sol horizontal et plan

Si l'horizontalité du sol est fréquente, sa planéité, en revanche n'est jamais parfaite. Dans le cas de profil de chaussée non identique sur les roues droites et gauches on peut avoir des vitesses de roulis induites par cette dissymétrie de chaussée. Ces termes pourraient modifier la réponse du système.

Cependant, ces profils aléatoires pouvant avoir de façon équiprobable un effet stabilisant ou destabilisant, l'étude n'en tient pas compte.

Cette étude ne tient pas compte non plus de l'influence de la variation des paramètres (par exemple taux d'amortissement) sur le niveau d'adhérence au sol du véhicule, dans le cas d'une route présentant des ondulations non négligeables. Ce phénomène mériterait d'être apprécié dans une étude future.

— Linéarisation des équations

— Principe de la linéarisation

Cette linéarisation consiste à approximer la valeur d'une fonction f , dans le voisinage de la valeur de la variable x , par les deux premiers termes du développement en série dans la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

avec :

h : accroissement de la variable x
 f' f'' f''' ... dérivées successives de f

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{1} f'(x)$$

La qualité de cette approximation dépend de l'ordre de grandeur de f' , f'' etc..., mais l'erreur est d'autant plus faible que h est petit.

— Adaptation au problème

Il s'agit de savoir si notre problème conduit à des valeurs de « h » suffisamment faible pour que la linéarisation ne soit pas aberrante.

Les fonctions f que l'on linéarise sont :

1 — les fonctions trigonométriques de tous les angles, soit apparaissant dans la liste des variables, soit étant des variables intermédiaires.

2 — des courbes expérimentales concernant :
 les pneumatiques :

- poussée latérale fonction de l'angle de dérive,
- résistance au roulement fonction de la charge,
- force élastique verticale fonction de l'écrasement du pneumatique,
- force transversale fonction de la déformation élastique latérale du pneumatique,
- moment de lacet de direction fonction de la charge, fonction de la flexion latérale des pneumatiques.

l'aérodynamique :

- forces et moments C_y , C_z , C_n fonction de l'angle de dérive pour chaque véhicule,

les amortissements et les élasticités :

- couple de rappel de roulis fonction de l'angle de roulis,

- couple d'amortissement de roulis fonction de la vitesse de roulis,
- couple d'amortissement du braquage des roues directrices fonction de la vitesse de braquage,
- couple d'amortissement du roulis de la masse oscillante fonction de la vitesse de roulis relatif,
- couple de rappel de braquage en fonction du braquage élastique

les géométries de suspension :

- carrossage fonction du roulis relatif masse suspendue/essieu,
- braquage induit par le roulis fonction du roulis relatif.

Nous constatons que :

- tous angles apparaissant dans les équations ont des valeurs absolues qui restent faibles dans le domaine d'étude : courbe à grand rayon avec accélération transversale modérée, le plus grand vaut 15° au soulèvement d'une roue c'est-à-dire à la limite de validité du système. Les erreurs relatives à la linéarisation, sur sinus, cosinus, tangente, sont respectivement 1,1 — 2,4 et 3,4 %, ce qui est acceptable.
- toutes les courbes expérimentales admettent la linéarisation dans le domaine d'étude, c'est-à-dire de la ligne droite («zéro») au soulèvement d'une roue, avec une précision satisfaisante.

Dans le cas du braquage simple où le véhicule se stabilise sur une courbe, la vitesse de lacet tend à prendre une vitesse constante et, par suite, lorsque le temps augmente, l'angle de lacet prend des valeurs incompatibles avec les hypothèses.

Par exemple à 60 km/h, avec un braquage dont l'amplitude induit un transfert de charge correspondant à la limite de décollement d'une roue, le véhicule a effectué un demi-tour au bout de 17 secondes environ.

L'étape du calcul où l'on passe du repère lié au véhicule au repère fixe n'est correcte que pour des angles de lacet faibles, c'est-à-dire pour des valeurs du temps faibles. Or nous cherchons à étudier le comportement dynamique du véhicule, c'est-à-dire la phase transitoire, puisque c'est elle qui est critique pour le renversement.

Les valeurs extrêmes des variables sont obtenues pour des temps inférieurs à 3 secondes, alors l'angle de lacet est faible et la précision du calcul est très satisfaisante.

Dans le cas du braquage simple, jusqu'au décollement de la roue, et pour des valeurs faibles du temps, le modèle mathématique représente le comportement du véhicule réel avec une précision acceptable.

Dans le cas du braquage alterné, l'angle de lacet reste toujours faible quelle que soit la valeur du temps, il n'y a plus de limite de validité sur le temps, et la modélisation est très satisfaisante.

4.2.1.6. - Attitude de référence

A l'instant origine le véhicule roule soit en ligne droite, soit en courbe à grand rayon.

Lorsqu'il roule en ligne droite, les déplacements $A_1, A_2, \psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2, u_1$ à u_5, ϕ_1 à ϕ_5 sont nuls à l'instant 0 ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

Lorsqu'il roule dans une courbe à grand rayon ces mêmes déplacements ont des valeurs semi permanentes non nulles que l'on précise par l'indice o. Les symboles A_1, A_2, \dots représentent alors les variations des déplacements, A_1, A_2, \dots par rapport à cet état d'équilibre semi-permanent.

4.2.2. - EQUILIBRE DYNAMIQUE

4.2.2.1. - Equilibre dynamique général du système étudié

Le système étudié est constitué de trois sous systèmes couplés entre eux selon une chaîne linéaire ouverte :

- le tracteur avec la semi-remorque,
- la semi-remorque avec la masse oscillante.

Ces couplages sont mis en évidence sur le tableau synoptique des équations différentielles linéaires décrivant l'équilibre dynamique du système.

Le tracteur découplé est décrit par 8 équations linéaires du second ordre et la semi-remorque découplée par 9 équations du second ordre.

Le couplage géométrique entre le tracteur et la semi-remorque s'exprime par une équation du premier ordre tandis que les mouvements de la masse oscillante sont représentés par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

4.2.2.2. - TABLEAU SYNOPTIQUE DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

		N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		Définition	Braquage élastique de la direction	Roulis essieu 1	Roulis essieu 2	Déplacement latéral pneus essieu 1	Déplacement latéral pneus essieu 2	Angle de route $= (V/G_1 \cdot G_1 \cdot X_1)$	Angle de lacet $= (G_1 \cdot X_1 \cdot OX_1)$	Roulis tracteur	Force latérale à la sellette	Couple de roulis à la sellette	Roulis masse oscillante	Angle de lacet remorque	Angle de route remorque	Déplacement latéral pneus essieu 3	Déplacement latéral pneus essieu 4	Déplacement latéral pneus essieu 5	Roulis essieu 3	Roulis essieu 4	Roulis essieu 5.
N°	Définition		Δ	φ_1	φ_2	u_1	u_2	A_1	ψ_1	θ	Y_s	L_s	r	ψ_2	A_2	u_3	u_4	u_5	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
1	Equilibre de la direction	n_1																			
2	Equilibre de roulis essieu 1	ρ_1																			
3	Equilibre de roulis essieu 2	ρ_2																			
4	Equilibre latéral pneus essieu 1 (resp. essieu 2)	Y_{11} Y_{12}																			
5	Equilibre d'ensemble tracteur	Y_1																			
6	Equilibre lacet tracteur	N_1																			
7	Equilibre roulis tracteur	L_1																			
8	Equilibre roulis masse oscillante	ρ_f																			
9	Egalité vitesses sellette	V_{ys}																			
10	Equilibre roulis remorque	L_2																			
11	Equilibre lacet remorque	N_2																			
12	Equilibre ensemble remorque	Y_2																			
13	Equilibre latéral pneus essieu 3	Y_{23}																			
14	Equilibre latéral pneus essieu 4	Y_{24}																			
15	Equilibre latéral pneus essieu 5	Y_{25}																			
16	Equilibre roulis essieu 3	ρ_3																			
17	Equilibre roulis essieu 4	ρ_4																			
18	Equilibre roulis essieu 5	ρ_5																			

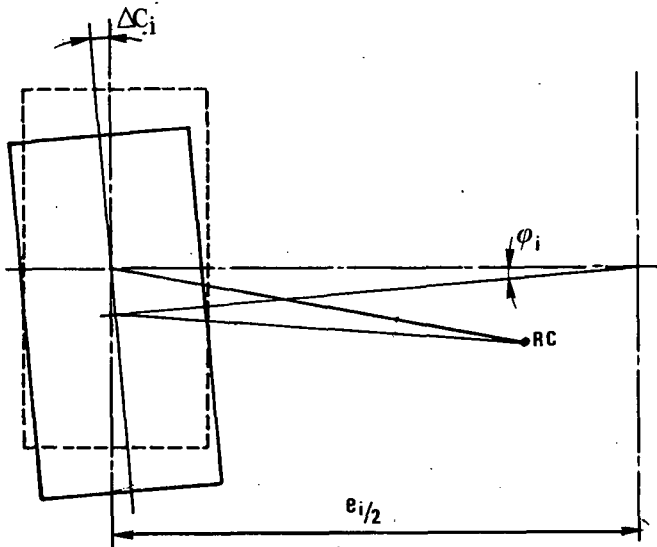
L'équation d'équilibre de la direction, s'écrit donc, pour une entrée nulle :

$$\begin{aligned}
 & -i_{1z} \Delta'' - \frac{\partial n_1}{\partial \Delta} \Delta + [qm_1 + i_{1z} \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1}] \varphi_1'' \\
 & + \left[-i_{o1} \frac{V}{r_1} \frac{e_1}{2a_1} + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \right] \theta \\
 & + \frac{\partial n_1}{\partial z_1} \cdot \frac{L\phi_1}{e_1} \varphi_1 + \frac{\partial n_1}{\partial u_1} u_1 - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} i_{1z} \theta'' \\
 & + \left[-i_{o1} \frac{V}{r_1} \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \right] \theta \\
 & - i_{1z} \psi_1'' = 0
 \end{aligned}$$

4.2.2.3. Equilibre de roulis de l'essieu 1

φ_1 est l'angle par rapport au sol de la droite joignant les centres des roues droite et gauche. Il résulte de la flexion différentielle des pneumatiques.

Cette flexion a pour conséquence une rotation des masses non suspendues (droite et gauche) autour des axes instantanés de rotation RC_1 des roues de l'essieu par rapport au châssis.



Le moment de roulis (inertie comprise) appliqué à l'essieu en RC_1 est désigné par ℓ_1 .

Son expression générale est de la forme :

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= \ell_{1\Delta}'' \cdot \Delta'' + \ell_{1\Delta}' \cdot \Delta' + \ell_{1\Delta} \cdot \Delta \\
 &+ \ell_{1\phi}'' \cdot \phi'' + \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Les coefficients des variables et de leurs dérivées premières et secondes sont les dérivées de stabilité.

Le développement de ℓ_1 contient au maximum 3 (degrés) x 8 (variables) = 24 dérivées de stabilité. Déterminons celles qui ne sont pas identiquement nulles.

4.2.2.3. Equations d'équilibre dynamique du tracteur

4.2.2.3.1. Equilibre de la direction (n_1)

Les dérivées de stabilité sont :

• Variable Δ

$$n_{1\Delta}'' = -i_{1z}$$

$$n_{1\Delta}' = -\frac{\partial n_1}{\partial \Delta'}$$

$$n_{1\Delta} = -\frac{\partial n_1}{\partial \Delta}$$

• Variable φ_1

$$n_{1\varphi_1}'' = qm_1 + i_{1z} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1}$$

$$n_{1\varphi_1}' = -i_{o1} \frac{V}{r_1} \frac{e_1}{2a_1} + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1}$$

$$n_{1\varphi_1} = \frac{\partial n_1}{\partial z_1} \frac{L\phi_1}{e_1}$$

• Variable u_1

$$n_{1u_1}'' = 0$$

$$n_{1u_1}' = 0$$

$$n_{1u_1} = \frac{\partial n_1}{\partial u_1}$$

• Variable θ

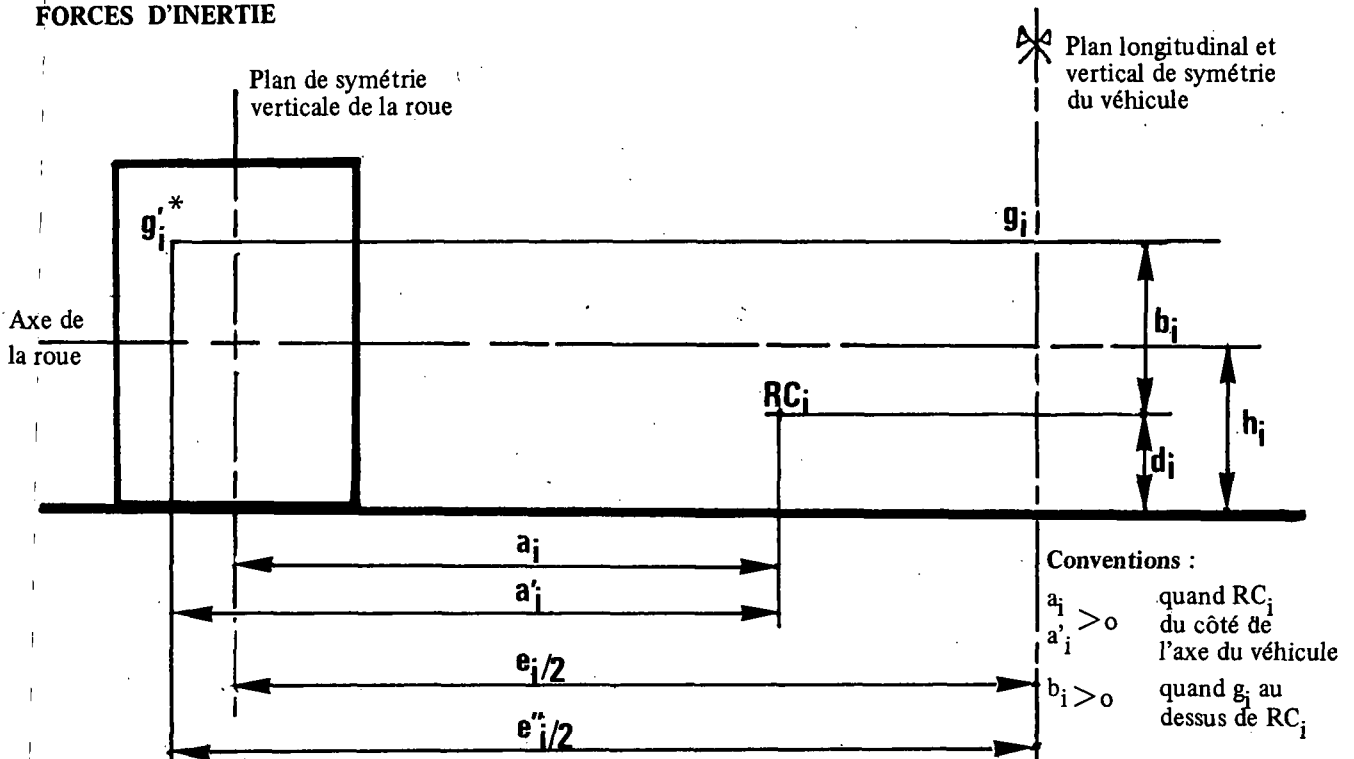
$$n_{1\theta}' = -i_{o1} \frac{V}{r_1} \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \Delta'}$$

$$n_{1\theta}'' = -\frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \cdot i_{1z}$$

• Variable ψ_1

$$n_{1\psi_1}'' = -i_{1z}$$

FORCES D'INERTIE



Variable φ_1

$$C_1 = \frac{e_1}{2a_1} \cdot \varphi_1$$

$$\ell_{1\varphi_1}'' = -m_1 \left[(a'_1)^2 \cdot \frac{e_1}{2a_1} - m_1 \times (b_1)^2 \times \frac{e_1}{2a_1} \right]$$

$$-I_{1c} \frac{e_1}{2a_1}$$

$$I_{1c} = m_1 \rho_{1c}^2$$

$$\ell_{1\varphi_1}'' = -m_1 \frac{e_1}{2a_1} (a_1'^2 + b_1^2 + \rho_{1c}^2)$$

Variable A_1

$$\ell_{1A_1}'' = V \cdot m_1 \cdot b_1$$

Variable ψ_1

$$\ell_{1\psi_1}'' = V \cdot m_1 \cdot b_1 + i_{o1} \frac{V}{r_1}$$

$$\ell_{1\psi_1}'' = x_1'' \cdot m_1 \cdot b_1$$

Variable θ

$$\ell_{1\theta}'' = -m_1 \left[z_1' b_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \varphi_1} (h_1 b_1 + a_1'' a_1' + \rho_{1c}^2) \right]$$

* g'_i centre de gravité d'un demi-essieu

FORCES D'AMORTISSEMENTS

Variable θ

$$\ell_{1\theta}'' = L_{\varphi_1}' \frac{2a_1}{e_1}$$

Variable φ_1

$$\ell_{1\varphi_1}' = -L_{\varphi_1}' \cdot \frac{2a_1}{e_1}$$

Variable Δ

$$\ell_{1\Delta}' = i_{o1} \frac{V}{r_1}$$

Variable A_1

$$\ell_{1A_1}' = V m_1 b_1$$

Variable ψ_1

$$\ell_{1\psi_1}' = V m_1 b_1 + i_{o1} \frac{V}{r_1}$$

FORCES ELASTIQUES

Variable θ

$$\ell_{1\theta} = +L_{\varphi_1} \cdot \frac{2a_1}{e_1} + \frac{\partial C_1}{\partial \varphi_1} [(h_1 - d_1) u_1 g + 2 d_1 Z_{o1}]$$

Variable φ_1

$$\ell_{1\varphi_1} = \frac{2a_1}{e_1} [(h_1 - d_1) m_1 g - L_{\varphi_1} - L_{\varphi_1} + 2 d_1 Z_{o1}]$$

Variable u_1

$$\ell_{1u_1} = -K_1 \cdot d_1$$

d'où l'équation d'équilibre de l'essieu 1, les termes étant classés en fonction des variables $\varphi_1, u_1, A_1, \psi_1, \theta$:

$$\begin{aligned}
 & i_{o1} \frac{V}{r_1} \underline{\Delta} \\
 & - m_1 \frac{e_1}{2a_1} (a_1'^2 + b_1'^2 + \rho_{1c}^2) \varphi_1'' \\
 & - L_{\phi_1}' \cdot \frac{2a_1}{e_1} \cdot \varphi_1' \\
 & - \frac{2a_1}{e_1} [(h_1 - d_1) m_1 g - L_{\phi_1} - L_{\phi_1}' + 2 d_1 Z_{o1}] \varphi_1 \\
 & - K_1 \cdot d_1 \cdot u_1 \\
 & + V \cdot m_1 \cdot b_1 \cdot A_1' \\
 & + x_1'' \cdot m_1 b_1 \cdot \psi_1'' + (V \cdot m_1 b_1 + i_{o1} \frac{V}{r_1}) \psi_1' \\
 & - m_1 [z_1' b_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} (h_1 b_1 + a_1' a_1 + \rho_{1c}^2)] \theta'' + L_{\phi_1}' \frac{2a_1}{e_1} \theta' \\
 & + \left\{ L_{\phi_1} \frac{2a_1}{e_1} + \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} [(h_1 - d_1) m_1 g + 2 d_1 Z_{o1}] \right\} \theta = 0
 \end{aligned}$$

4.2.2.3.2. Equilibre de roulis de l'essieu 2 (ℓ_2)

L'équation d'équilibre de roulis de l'essieu 2 a une forme identique à la précédente. Il suffit de remplacer l'indice $i = 1$ par l'indice $i = 2$.

4.2.2.3.3. Equilibre latéral des pneumatiques de l'essieu 1 (u_1)

La force latérale Y_1 est appliquée par le sol à l'aire de contact pneu/sol. En valeur absolue, elle a pour expression $K_1 u_1$.

Cette force est fonction :

- de l'angle de dérive α_1
- de l'angle de carrossage C_1
- de la charge Z_1

Précisons les conventions : on calcule la force Y_1 relative à l'ensemble des pneumatiques d'un essieu. D'autre part les indices o font référence à l'attitude statique. Enfin, on convient que :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha_1 \partial Z_1} > 0 \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial C_1 \partial Z_1} > 0 \quad \text{et} \quad \alpha < 0 : \text{pincement.}$$

Les variations de α_1, C_1 et Z_1 engendrent une variation de Y_1 égale à :

$$\Delta Y_1 = - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \alpha_1 \partial Z_1} \alpha_o \cdot \Delta Z_1 - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \alpha_1 \partial Z_1} Z_o \Delta \alpha_1$$

$$- \frac{\partial^2 Y_1}{\partial C_1 \partial Z_1} C_o \Delta Z_1 - \frac{\partial^2 Y_1}{\partial C_1 \partial Z_o} Z_o \Delta C_1$$

que l'on écrira sous forme simplifiée (suppression des Δ)

$$Y_1 = - E_1 \cdot Z_1 - D_1 \cdot \alpha_1 - F_1 \cdot C_1$$

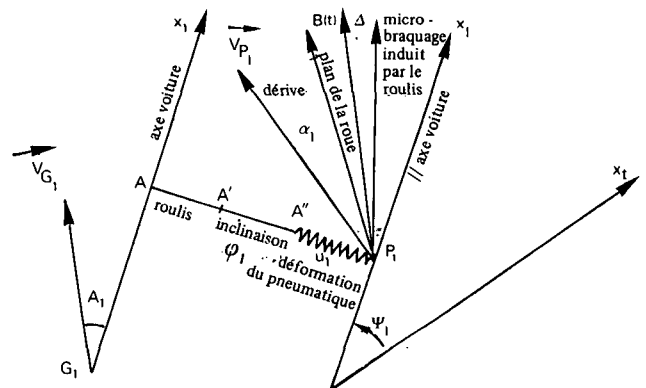
Explicitons Z_1, α_1, C_1 en fonction des variables $\Delta_1, \varphi_1, \dots, \theta$.

- Calcul de Z_1

$$Z_1 = L_{\phi_1} \cdot \frac{\varphi_1}{e_1} = \frac{L_{\phi_1}}{e_1} \varphi_1$$

- Calcul de α_1

Relation entre $u_1, A_1, \psi_1, \theta, \varphi_1$ et α_1 :



Δ braquage élastique de la roue à volant bloqué

α_i dérive des pneumatiques de l'essieu i

A_1 dérive du véhicule 1 (angle de route)

$B(t)$ braquage commandé par le volant

ψ_1 angle de lacet

B_1 = centre de l'aire de contact

O = centre du repère origine

$$\vec{Op}_1 = \vec{OG} + \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{A'A''} + \vec{A''P_1}$$

avec AA' = effet du roulis θ

$A'A''$ = effet de l'inclinaison φ_1

$A''P_1$ = déformation élastique du pneumatique

La vitesse transversale de B_1 est égale à :

$$V_{t,P_1} = V_{t,G} + V_{t,A/G} + V_{t,A'/A} + V_{t,A''/A'} + V_{t,P_1/A''}$$

d'où en posant $u_1 = \overline{P_1 A''}$

$$V_{t,P_1} = (A_1 + \psi_1) V + \psi_1' x_1 - \theta' z_1' + \varphi_1' \frac{e_1}{2a_1} d_1 - u_1'$$

La direction de la trajectoire de p_1 en repère absolu fait

avec Ox_t un angle γ_1 tel que $\gamma_1 = \frac{V_{tp}}{V}$

$$\text{soit : } \gamma_1 = A_1 + \psi_1 + \psi_1' \frac{x_1}{V} - \theta' \frac{z_1'}{V} + \varphi_1' \frac{e_1}{2a_1} \frac{d_1}{V} - \frac{u_1'}{V}$$

L'angle W_1 de la trajectoire de P_1 par rapport à l'axe du tracteur est égal à :

$$W_1 = \gamma_1 - \psi_1 = A_1 + \psi_1' \frac{x_1}{V} - \theta' \frac{z_1'}{V} + \varphi_1' \frac{e_1}{2a_1} \frac{d_1}{V} - \frac{u_1'}{V}$$

L'angle de dérive α_1 de l'essieu est égal à l'angle de la vitesse de P_1 par rapport au plan des roues, soit :

$\alpha_1 = W_1$ - braquage induit par le roulis - braquage élastique Δ - angle de braquage B_1 .

$$\alpha_1 = W_1 - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} - \Delta = W_1 - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} (\theta - \varphi_1) - \Delta - B$$

$$\alpha_1 = -\Delta + A_1 + \psi_1' \frac{x_1}{V} - \theta' \frac{z_1'}{V} + \varphi_1' \frac{e_1}{2a_1} \frac{d_1}{V} - \frac{u_1'}{V}$$

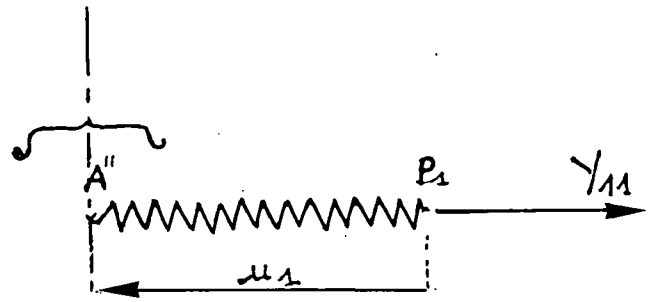
$$- \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} (\theta - \varphi_1) - B$$

- Calcul de C_1

$$C_1 = \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \phi_1 + \varphi_1$$

$$= \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} (\theta - \varphi_1) + \varphi_1 = \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \theta + (1 - \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) \varphi_1$$

- Equation d'équilibre latéral des pneumatiques de l'essieu i :



Y_{11} : réaction transversale du sol sur l'aire de contact

u_1 : compté positivement de l'aire à la jante, cad $u_1 < 0$ dans un virage à gauche

Y_{11} est la relation transversale du sol sur l'aire de contact

u_1 est le déplacement latéral, compté positivement de l'aire à la jante, c'est-à-dire $u_1 < 0$ pour un virage à gauche.

L'équilibre de l'aire de contact s'écrit :

$$K_1 u_1 + Y_{11} = 0$$

soit en développant :

$$K_1 u_1 - E_1 \left[\frac{L\varphi_1}{e_1} \cdot \varphi_1 \right] - D_1 \left[-\Delta + \frac{e_1}{2a_1} \frac{d_1}{V} \varphi_1' + \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \varphi_1 - \frac{u_1'}{V} - B(t) + A_1 + \frac{x_1}{V} \psi_1' - \frac{z_1'}{V} \theta' - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \theta \right] - F_1 \left[\left(1 - \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}\right) \varphi_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \theta \right] = 0$$

et, en ordonnant, avec entrée $B(t)$:

$$D_1 \Delta - \left[D_1 \frac{e_1}{2a_1} \frac{d_1}{V} \right] \varphi_1' + \left[-D_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} - F_1 \left(1 - \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}\right) - E_1 \frac{L\varphi_1}{e_1} \right] \varphi_1 + \left[\frac{D_1}{V} \right] u_1' + K_1 u_1 - D_1 A_1 - \left[D_1 \frac{x_1}{V} \right] \psi_1' + \left[D_1 \frac{z_1'}{V} \right] \theta' + \left[D_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} - F_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right] \theta = 0$$

4.2.2.3.4. Equilibre latéral des pneumatiques de l'essieu 2

Equation identique à la précédente sauf indice 1 remplacé par indice 2, sauf variable Δ supprimée.

4.2.2.3.5. Equilibre latéral d'ensemble du tracteur

Etudions la contribution des différentes variables.

Variable φ_1

$$Y_1 \varphi_1'' = m_1 \frac{b_1 e_1}{2a_1}$$

$$Y_1 \dot{\varphi}_1 = 0$$

$$Y_1 \varphi_1 = 0$$

Variable φ_2

$$Y_1 \varphi_2'' = m_2 \cdot \frac{b_2 e_2}{2a_2}$$

$$Y_1 \dot{\varphi}_2 = 0$$

$$Y_1 \varphi_2 = 0$$

Variable u_1

$$Y_1 u_1'' = 0$$

$$Y_1 \dot{u}_1 = 0$$

$$Y_1 u_1 = -K_1$$

Variable u_2

$$Y_1 u_2'' = 0$$

$$Y_1 \dot{u}_2 = 0$$

$$Y_1 u_2 = -K_2$$

Variable A_1

$$Y_1 A_1'' = 0$$

$$Y_1 A_1' = -M_{T1} \cdot V$$

$$Y_1 A_1 = -\frac{1}{2} \rho S_1 V^2 \frac{\partial C_{y1}}{\partial A_1} \cdot 57,3$$

$$= -\frac{57,3 \times 9,81}{16} S_1 V^2 \frac{\partial C_{y1}}{\partial A_1}$$

Variable ψ_1

$$Y_1 \psi_1'' = -m_1 x_1'' - m_2 x_2''$$

$$Y_1 \dot{\psi}_1 = -\dot{M}_{T1} \cdot V$$

$$Y_1 \psi_1 = 0$$

Variable θ

$$Y_1 \theta'' = m_1 [z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}] + m_2 [z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2}]$$

$$Y_1 \dot{\theta} = 0$$

$$Y_1 \theta = 0$$

Variable Y_s

Y_s est l'action selon S_y en S de la semi-remorque sur le tracteur.

Sa réduction dans G_1xyz est toujours Y_s d'où $Y_1 \gamma_s = +1$

Variable L_s

La réduction dans le trièdre $G_1x_1y_1z_1$ n'engendre aucune force complémentaire.

L'équation d'équilibre latéral du tracteur est donc (entrée supposée nulle) :

$$m_1 \frac{b_1 e_1}{2a_1} \varphi_1'' + m_2 \frac{b_2 e_2}{2a_2} \varphi_2'' - K_1 u_1 - K_2 u_2$$

$$- M_{T1} \cdot V A_1' - \frac{57,3 \times 9,81}{16} S_1 \cdot V^2 \frac{\partial C_{y1}}{\partial A_1} A_1$$

$$- (m_1 x_1'' + m_2 x_2'') \psi_1'' - M_{T1} V \dot{\psi}_1$$

$$+ [m_1 (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) + m_2 (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2})] \theta'' + Y_s = 0$$

4.2.2.3.6 Equilibre de lacet du tracteur

Déterminons les dérivées de stabilité :

Variable Δ

$$N_1 \Delta'' = 0$$

$$N_1 \Delta' = + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'}$$

$$N_1 \Delta = \frac{\partial n_1}{\partial \Delta}$$

Variable φ_1

$$N_1 \varphi_1'' = m_1 x_1'' \frac{b_1 e_1}{2a_1}$$

$$N_1 \varphi_1' = -\frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1}$$

$$N_1 \varphi_1 = -\frac{\partial X_1}{\partial Z_1} L \varphi_1$$

Variable φ_2

$$N_1 \varphi_2'' = m_2 x_2'' \frac{b_2 e_2}{2a_2}$$

$$N_1 \varphi_2' = -i_{o2} \frac{V}{r_2} \frac{e_2}{2a_2}$$

$$N_1 \varphi_2 = -\frac{\partial X_2}{\partial Z_2} L \varphi_2$$

Variable u_1

$$N_1 u_1'' = 0$$

$$N_1 u_1' = 0$$

$$N_1 u_1 = -K_1 x_1'$$

Variable u_2

$$N_1 u_2'' = 0$$

$$N_1 u_2' = 0$$

$$N_1 u_2 = -K_2 x_2'$$

Variable ψ_1

$$N_1 \psi_1'' = -(L_{z1} + I_{z1})$$

$$N_1 \psi_1' = -V (m_1 x_1'' + m_2 x_2'')$$

$$N_1 \psi_1 = 0$$

Variable θ

$$N_1 \theta'' = m_1 x_1'' (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) + m_2 x_2'' (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2})$$

$$N_1 \theta' = -V \frac{i_{o2}}{r_2} \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1}$$

$$N_1 \theta = 0$$

Variable A_1

$$N_1 A_1'' = 0$$

$$N_1 A_1' = -V (m_1 x_1'' + m_2 x_2'')$$

$$N_1 A_1 = -\frac{57,3 \times 9,81}{16} \cdot S_1 J_1 \frac{\partial C_{N1}}{\partial A_1} V^2$$

Variable Y_s

Y_s donne lieu en G_1 à un couple de lacet $x_{1s} \cdot Y_s$
d'où $N_1 Y_s = x_{1s}$

L'équation d'équilibre de lacet est donc (avec entrée supposée nulle) :

$$\frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \Delta' + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta} \Delta + m_1 x_1'' \frac{b_1 e_1}{2a_1} \varphi_1''$$

$$- \frac{\partial u_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \varphi_1' - \frac{\partial X_1}{\partial Z_1} L \varphi_1$$

$$+ m_2 x_2'' \frac{b_2 e_2}{2a_2} \varphi_2'' - \frac{V}{r_2} \frac{e_2}{2a_2} \varphi_2' - \frac{\partial X_2}{\partial Z_2} L \varphi_2$$

$$- K_1 x_1' u_1 - K_2 x_2' u_2 - V (m_1 x_1'' + m_2 x_2'') A_1'$$

$$- \frac{57,3 \times 9,81}{16} S_1 J_1 \frac{\partial C_{N1}}{\partial A_1} V^2 A_1 - (L_{z1} + I_{z1}') \psi_1''$$

$$- V (m_1 x_1'' + m_2 x_2'') \psi_1' + \left\{ I_{1xz} + m_1 x_1'' (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) \right.$$

$$\left. + m_2 z_2'' (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} - \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} i_{1z}) \right\} \theta'' + \left\{ -V \frac{i_{o2}}{r_2} x \right.$$

$$\left. \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} + \frac{\partial u_1}{\partial \Delta'} \cdot \frac{\partial \delta_1}{\partial \phi_1} \right\} \theta' + x_{1s} Y_s = 0$$

4.2.2.3.7. Equilibre de roulis du tracteur (L_1)

Les dérivées de stabilité ont pour expression :

Variable φ_1

$$L_1 \varphi_1'' = -m_1 \frac{e_1}{2a_1} \left[z_1' b_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} h_1 b_1 + a_1' a_1 + \rho_{1c}^2 \right]$$

$$L_1 \varphi_1' = L \varphi_1'$$

$$L_1 \varphi_1 = L \varphi_1 + \frac{2a_1}{e_1} \left[(h_1 - d_1) m_1 g + 2 d_1 Z_{o1} \right]$$

Variable φ_2

$$L_1 \varphi_2'' = -m_2 \frac{e_2}{2a_2} \left[z_2' b_2 + \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} (h_2 b_2 + a_2'' a_2' + \rho_{2c}^2) \right]$$

$$L_1 \varphi_2' = L \phi_2'$$

$$L_1 \varphi_2 = L \phi_2 + \frac{2a_2}{e_2} [(h_2 - d_2) m_2 g + 2 d_2 Z_{02}]$$

Variable u_1

$$L_1 u_1'' = 0$$

$$L_1 u_1' = 0$$

$$L_1 u_1 = z_1' K_1$$

Variable u_2

$$L_1 u_2'' = 0$$

$$L_1 u_2' = 0$$

$$L_1 u_2 = z_2' K_2$$

Variable A_1

$$L_1 A_1'' = 0$$

$$L_1 A_1' = V \left[m_1 (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) + m_2 (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2}) \right]$$

$$L_1 A_1 = 35,132 \cdot S_1 \cdot J_1 \frac{\partial C_{L2}}{\partial A_1} V^2$$

Variable ψ_1

$$L_1 \psi_1'' = I_{1xz} + m_1 x_1'' (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1})$$

$$+ m_2 x_2'' (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2})$$

$$L_1 \psi_1' = V \left[\frac{i_{01}}{r_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \phi} + \frac{i_{02}}{r_2} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} + m_1 (z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}) + m_2 (z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2}) \right]$$

$$L_1 \psi_1 = 0$$

Variable Δ

$$L_1 \Delta' = i_{01} \frac{V}{r_1} \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1}$$

Variable θ

$$L_1 \theta'' = - \left\{ I_{1x} + m_1 \left[(z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1})^2 + a_1''^2 + \rho_{1c}^2 \left(\frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right)^2 \right] + m_2 \left[(z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2})^2 + a_2''^2 + \rho_{2c}^2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right)^2 \right] \right\}$$

$$L_1 \theta' = - [L \phi_1' + L \phi_2']$$

$$L_1 \theta = \left\{ - [L_{\theta 1} + L_{\theta 2} + 2 Z_{01} z_1' + 2 Z_{02} z_2'] + m_1 g \left[z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right] + m_2 g \left[z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right] - Z_s z_1' \right\}$$

Variable Y_s

Y_s induit en G_1 un couple de roulis égal à :

$$-z_{1s} \cdot Y_s \text{ d'où } L_1 Y_s = z_{1s}$$

Variable L_s

L_s induit en G_1 un couple de roulis L_s

$$\text{d'où } L_1 L_s = +1$$

d'où l'équation de roulis du tracteur (ℓ_1) pour une entrée nulle :

$$\left[i_{01} \frac{V}{r_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right] \Delta' - m_1 \frac{e_1}{2a_1} \left[z_1' b_1 + \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} h_1 b_1 + a_1'' a_1' + \rho_{1c}^2 \right] \varphi_1'' + L \phi_1' \varphi_1' + \left\{ L \phi_1 + \frac{2a_1}{e_1} [(h_1 - d_1) m_1 g + 2 d_1 Z_{01}] \right\} \varphi_1 - m_2 \frac{e_2}{2a_2} \left[z_2' b_2 + \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} h_2 b_2 + a_2'' a_2' + \rho_{2c}^2 \right] \varphi_2'' + [L \phi_2'] \varphi_2' + \left\{ L \phi_2 + \frac{2a_2}{e_2} [(h_2 - d_2) m_2 g + 2 d_2 Z_{02}] \right\} \varphi_2 + [z_1' K_1] u_1$$

$$\begin{aligned}
& + [z_2' K_2] u_2 + V \left[m_1 \left(z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right) + m_2 \left(z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right) \right] A_1' \\
& + \left[35,132 S_1 J_1 \frac{\partial C_{L2}}{\partial A_2} V^2 \right] A_1 \\
& + \left\{ I_{1xz} + m_1 x_1'' \left(z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right) \right. \\
& + m_2 x_2'' \left(z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right) \left. \right\} \psi_1'' + V \left\{ \frac{i_{o1}}{r_1} \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} + \frac{i_{o2}}{r_2} \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right. \\
& + m_1 \left(z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right) + m_2 \left(z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right) \left. \right\} \psi_1' \\
& - \left\{ I_{1x} + m_1 \left[\left(z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right)^2 + a_1'^2 + \rho_{1c}^2 \left(\frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right)^2 \right] \right. \\
& + m_2 \left[\left(z_2' + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right)^2 + (a_2')^2 + \rho_{2c}^2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \right)^2 \right] \left. \right\} \theta'' \\
& - [L_{\theta 1}' + L_{\theta 2}'] \theta' + \left\{ - [L_{\theta 1} + L_{\theta 2} + 2 Z_{o1} z_1' \right. \\
& + 2 Z_{o2} z_2'] + m_1 g \left[z_1' + h_1 \frac{\partial C_1}{\partial \phi_1} \right] + m_2 g \left[z_2' \right. \\
& + h_2 \frac{\partial C_2}{\partial \phi_2} \left. \right] - Z_s z_{1s} \left. \right\} \theta = 0
\end{aligned}$$

4.2.2.4. EQUATIONS D'EQUILIBRE DYNAMIQUE DE LA REMORQUE

4.2.2.4.1. Equations d'équilibre découplées

Le système des équations d'équilibre de la semi-remorque diffère de celui du tracteur par :

1. la suppression des mouvements de braquage élastique d'un des essieux ;
2. l'introduction d'un essieu supplémentaire d'où le nombre d'équations :

$$8 \text{ (système 1)} - 1 \text{ (direction)} + 1 \text{ (1 essieu)} \times 2 \text{ (variables } \varphi_3 \text{ et } u_3) = 9.$$

Les équations s'obtiennent donc, en ce qui concerne la semi-remorque découplée, après suppression de l'équation de direction par le remplacement des indices 1 du tracteur, par l'indice 2 de la semi-remorque et les indices 1 et 2 de repère des essieux du tracteur par les indices 3, 4 et 5 de repère des essieux de la semi-remorque.

4.2.2.4.2. Couplage avec le tracteur

En ce qui concerne le couplage avec le tracteur par les variables Y_s et L_s , les dérivées doivent être changées de signe d'où :

$$\begin{aligned}
Y_2 Y_s &= -1 \\
N_2 Y_s &= -x_{2s} \\
L_2 Y_s &= +z_{2s} \\
L_2 L_s &= -1
\end{aligned}$$

4.2.2.4.3. Couplage avec la masse oscillante

Examinons le couplage avec la masse oscillante.

F étant la projection de G_F sur l'axe d'oscillation, l'action de la masse oscillante sur la partie suspendue de la remorque est représentée par un torseur dont les composantes dans le référentiel F_{xyz} tel que F_z soit vertical et F dans le plan de symétrie de la semi-remorque dont : Y_F, Z_F, L_F, N_F .

Les coordonnées de F dans le repère G_2xyz étant x_{2F}, z_{2F} , les composantes du torseur dans ce référentiel sont :

$$\begin{aligned}
Y_{2F} &= Y_F \\
L_{2F} &= L_F - Y_F \cdot z_{2F} \\
N_{2F} &= N_F + Y_F \cdot x_{2F}
\end{aligned}$$

et par suite les dérivées de stabilité correspondantes sont :

$$\begin{aligned}
Y_2 Y_F &= +1 \\
L_2 Y_F &= -z_{2F} \\
L_2 L_F &= +1 \\
N_2 Y_F &= x_{2F} \\
N_2 N_F &= +1
\end{aligned}$$

4.2.2.5. EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE DE LA MASSE OSCILLANTE

4.2.2.5.1. Masse oscillante découplée

La masse oscillante découplée est un pendule simple.

Dans les hypothèses de linéarité, vraies pour les petits angles on a l'équation d'oscillation en roulis (en posant $\mathcal{F} = f - \theta_2$)

$$m_F v f'' + \frac{\partial L_F}{\partial \mathcal{F}} f' + m_F v g f = 0$$

4.2.2.5.1. Masse oscillante couplée

. Equilibre latéral

l'accélération de G_F s'écrit

$$\delta_{G_F} = (A_2' + \psi_2') V + \psi_2'' \cdot x_{2F} + v f' - \theta'' \cdot z_{2F}$$

d'où l'équation :

$$m_F [(A_2' + \psi_2') V + \psi_2'' \cdot x_{2F} + f' v - \theta'' z_{2F}] + Y_F = 0$$

. Equilibre de roulis

$\frac{\partial L_F}{\partial \theta'}$: coef. de frottement visqueux *

$$L_F = \frac{\partial L_F}{\partial \theta'} = \frac{\partial L_F}{\partial \theta'} f' - \theta'$$

d'où l'équation :

$$\frac{\partial L_F}{\partial \theta'} (\theta' - f') + L_F = 0$$

$$m_F [(A_2' + \psi_2') V + \psi_2'' x_{2F} + f' \cdot v - \theta'' z_{2F}]$$

$$+ v \cdot g \cdot m_F \cdot f + L_F = 0$$

Ainsi on peut éliminer L_F entre les 2 équations d'équilibre de la masse oscillante, ce qui nous donne l'équation θ_f .

. Equilibre de lacet

Si I_{zF} est le moment d'inertie de lacet de m_F par rapport à l'axe vertical passant par F :

$$N_F + I_{zF} \psi_2'' = 0$$

* L'origine de ce frottement visqueux est le frottement de la masse liquide sur les points de la cuve.

4.2.2.6. PROPRIETES DES LIAISONS TRACTEUR - REMORQUE ET MASSE OSCILLANTE - REMORQUE

4.2.2.6.1. Liaison tracteur-remorque

La liaison géométrique entre le tracteur et la remorque s'exprime par 2 conditions.

$$1) \theta_1 - \theta_2 = 0$$

en effet la liaison ne permet pas d'avoir un roulis relatif. Cette égalité permet de simplifier d'une colonne les matrices : $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$2) V_{1y_s} = V_{2y_s}$$

Cette équation représente l'égalité des vitesses transversales absolues de la sellette, calculée de deux façons différentes : d'une part comme point de la masse suspendue du tracteur, et, d'autre part, comme point de la masse suspendue de la remorque. Cette égalité s'écrit (équation n° 10 du tableau synoptique).

$$(\psi_1 + A_1) V + \psi_1' x_{1s} - (A_2 + \psi_2) V - \psi_2' x_{2s} + \theta' (z_{2s} - z_{1s}) = 0$$

4.2.2.6.2. Liaison masse oscillante-remorque

Au moment du couplage de la masse oscillante sur la remorque, il faut ajouter un terme complémentaire dans la matrice correspondant à la remorque découplée, qui représente le moment de roulis complémentaire dû à la masse oscillante m_F . Il a pour valeur $m_F Z_F \theta$, que l'on rajoute dans la dérivée $L_{2\theta}$.

4.2.3. LES ENTREES / SORTIES

4.2.3.1. Les termes du deuxième membre

Les termes du deuxième membre sont les entrées, et simulent les actions extérieures sur le véhicule. Ils dépendent du temps.

La référence $t = 0$ est prise à l'instant de début du signal $B(t)$.

A partir de l'instant $t = 0$ le conducteur affiche au volant un angle de braquage $B_V(t)$ se traduisant au niveau de la commande des roues directrices (essieu 1) par un angle de braquage $B(t)$, fonction donnée du temps. $B(t)$ et $B_V(t)$ sont homothétiques, dans un report constant qui est le rapport de démultiplications de la direction.

Pour prendre en compte les forces et les moments extérieurs résultant de ce braquage des roues directrices, les termes à ajouter au second membre des équations d'équilibre sont :

* pour l'équilibre de la direction (équation n° 1 : n_1) :

$$i_{1z} B''(t) + \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot B'(t)$$

* pour l'équilibre latéral de l'essieu 1 (équation n° 4 : Y_1) :

$$- D_1 \cdot B(t)$$

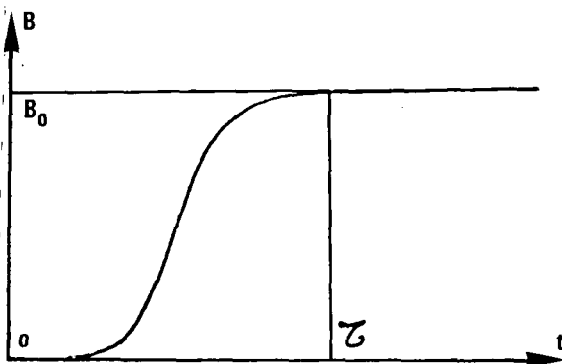
* pour l'équilibre de lacet du tracteur (équation n° 7 : N_1) :

$$- \frac{\partial n_1}{\partial \Delta'} \cdot B'(t)$$

4.2.3.2. Choix des entrées / sorties

4.2.3.2.1. Nous envisageons différentes lois de braquage $B(t - t_0)$

* 1 braquage simple



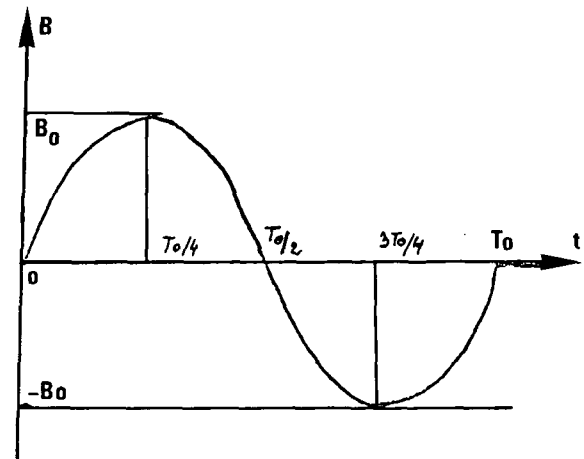
B_0 est tel que le pic d'accélération de la masse suspendue du tracteur (γG_{1max}) soit égal à 0,35 g.

La constante de temps τ est prise égale à 0,1 seconde. La loi B est une cubique. -

* 1 braquage alterné, en «S»

B_0 est tel que le pic d'accélération de la masse suspendue du tracteur (γG_{1max}) soit égal à 0,35 g.

T_0 la période prendra les valeurs 0,3 1 et 2 secondes.



4.2.3.2.2. On notera cependant que dans les deux cas du fait des hypothèses de linéarité, les réponses des variables sont proportionnelles aux entrées, c'est-à-dire au braquage.

Pour d'autres grandeurs comme γG_1 , combinaison linéaire des variables et de leurs dérivées, c'est encore vrai.

Par contre, des grandeurs tels les coefficients d'amplification qui sont le rapport de valeurs de variables (ou de combinaisons linéaires de variables), sont indépendantes de l'amplitude des entrées.

4.2.3.2.3. Du fait du caractère sous-vireur du véhicule, la loi $[B(\frac{1}{V})] \gamma G_1 = 0,35 g$: braquage fonction de la vitesse à accélération transversale constante, est au dessus de la parabole théorique.

L'obtention de l'accélération transversale $\gamma G_1 = 0,35 g$ nécessite donc, pour chacune des vitesses étudiées, une valeur B_0 du braquage qui n'est pas calculable facilement. De plus, le critère intéressant étant le pic d'accélération transversale, ce braquage dépend de l'amortissement des mouvements de roulis. La connaissance des valeurs $B_{V,\xi}$ nécessite donc deux étapes.

- on envoie en entrée, une valeur $B_{V,\xi}$ on calcule la valeur $(\gamma G_1)_{max}$,

— le braquage désiré est donc

$$B_{V, \varepsilon} \times \frac{0,35 g}{\gamma_{G1} \max},$$

et ce, pour chaque couple (V, ε).

Il est clair que ce calcul de $B_{V, \varepsilon}$ n'est valable que pour un B (t) donné : lorsqu'on change la fréquence d'entrée du braquage, on change la réponse donc (γ_{G1}) max. Dès lors il apparaît nécessaire de calculer $B_{V, \varepsilon}$, B (t) pour chaque [V, ε, B (t)] en deux étapes. Cela revient donc à doubler les calculs.

4.2.3.2.4. Choix de sorties

Aussi nous sommes nous ramenés à des critères qui sont des coefficients d'amplification égaux au quotient de la valeur maximale de la sortie par sa valeur de référence qui, comme nous l'avons signalé plus haut, sont indépendants de l'amplitude de l'entrée.

Dans le cas du braquage en S, on prend, comme « valeur de référence » la valeur qu'aurait la sortie pour un braquage simple de même amplitude, pour la même vitesse V, à un coefficient numérique près.

4.2.3.3. Critères d'optimisation

Le but de cette étude est d'optimiser le dosage de l'amortissement pour améliorer la tenue au versement latéral.

Il nous a paru intéressant d'étudier également la tenue de cap du véhicule.

Cela nous a conduit à définir a priori 5 critères pour l'optimisation du taux d'amortissement :

Critère n° 1. la tenue au versement latéral, que l'on a caractérisé par la grandeur de sortie $\frac{\Delta Z_i}{Z_{oi}}$ c'est-à-dire par

la variation relative de charge sur la roue intérieure de l'essieu i.

Cette sortie vaut 0, en attitude statique.

Cette sortie vaut + 1 à l'instant du décollement de la roue intérieure.

critère n° 2. les variations relatives de poussées latérales, de l'essieu i enregistrées par la sortie $\frac{u_i K_i}{2 Z_{oi}}$ (analogue à un coefficient de frottement).

Critère n° 3. les variations d'accélération du centre de l'essieu i enregistrées par la sortie γ_{ci} .

Critère n° 4. les variations de l'angle relatif entre le tracteur et la remorque, enregistrées par la sortie ψ_{21} .

Critère n° 5 les variations de l'angle de roulis θ de la masse suspendue de l'ensemble tracteur-remorque.

Précisons les définitions des grandeurs utilisées :

+ ΔZ_i : Variation de la charge verticale sur la roue intérieure et - ΔZ sur la roue extérieure, de l'essieu i :

$$\frac{\Delta Z_i}{Z_{oi}} = \frac{L \varphi_i}{e_i} \cdot \frac{\varphi_i}{Z_{oi}}$$

+ Z_{oi} : Réaction statique verticale du sol sur une roue de l'essieu i.

+ u_i : Valeur moyenne de déplacements latéraux élastiques des pneumatiques de l'essieu i, compté positivement de l'aire à la jante, c'est-à-dire négatif pour un virage à gauche.

+ K_i : Raideur transversale globale des pneumatiques à l'essieu i.

+ $u_i K_i$: Poussée transversale de l'ensemble des pneumatiques de l'essieu i.

$u_i K_i$ est donc négatif pour un virage à gauche.

+ γ_{ci} : accélération transversale du centre géométrique de l'essieu i.

$$\gamma_{ci} = \left[\frac{d}{dt} [A_j + \psi_j] V - (z_i^2 - r_i \frac{\partial C_i}{\partial \phi_i}) \theta' - \frac{e_i (r_i - d_i)}{2a_i} \phi_i' \right]$$

qui, dans le cas étudié, avec

$$z_i^2, r_i, \frac{\partial C_i}{\partial \phi_i}, \ell_i, r_i, d_i, a_i \text{ et } V$$

indépendants du temps, se simplifie :

$$\gamma_{ci} = - (z_i^2 + r_i \frac{\partial C_i}{\partial \phi_i}) \theta - \frac{e_i (r_i - d_i)}{2a_i} \phi_i$$

$$+ V \frac{d}{dt} (A_j + \psi_j)$$

$$\text{avec } \begin{matrix} i \text{ indice d'essieu} & 12 \\ j \text{ indice de véhicule} & 1 \quad 345 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Nous avons défini 5 groupes de sorties.

Plutôt que d'effectuer les enregistrements des réponses des grandeurs de sortie dans un nombre très limité de cas, nous avons mis au point un algorithme.

On remarque que, dans les 3 premiers critères, les sorties sont indicées i .

1. Pour un critère donné, on calcule les variations, fonction du temps, des i sorties.

2. On définit les i coefficients d'amplification dynamique, égaux aux quotients des valeurs maximales atteintes par les valeurs de référence.

On appelle coefficient d'amplification dynamique critique le coefficient d'amplification correspondant à la valeur maximale la plus grande.

3. On trace la courbe représentant les variations du coefficient d'amplification dynamique critique, en fonction de l'amortissement ε_v .

4. On recommence les points 1 - 2 - 3 avec le critère suivant.

On obtient donc des courbes nous permettant de juger de l'influence de l'amortissement ε_v suivant les différents critères.

Ces courbes sont au nombre de : 5 critères x 3 vitesses x 4 lois de braquage = 60 au maximum.

En effet, on se réserve le droit de supprimer un ou plusieurs critères si ceux-ci apparaissent comme peu intéressants.

en ayant une courbe plate, en fonction de ε ,

en ne se différenciant pas d'un autre critère (courbes homothétiques).

4.2.4. TESTS DE FONCTIONNEMENT

— Une série de contrôles a été effectuée pour vérifier l'exactitude des équations et du programme.

4.2.4.1. Vérification équation par équation

En procédant au découplage du reste du système, dans les cas où l'équilibre considéré conserve un sens physique.

Ces vérifications ont été faites pour les équations 1, 2, 3, 9, 17, 18, 19 qui traduisent les mouvements vibratoires des roues directrices, de roulis des essieux et de la masse oscillante.

4.2.4.2. Vérification par groupe d'équations couplées

Ceci a été réalisé :

* pour l'ensemble des équations 1 et 2 découplées de l'ensemble du système.

Les conditions de stabilité du sous système correspondant au degré de liberté Δ et φ_1 ont été étudiées et ont conduit, pour éviter toute instabilité de forme oscillatoire, à introduire un léger amortissement dans la liaison des roues directrices au châssis ;

* pour l'ensemble des équations 4, 5, 6, 7 et 8, en procédant à un changement des valeurs numériques, on a pu ainsi comparer les résultats obtenus à ceux d'un programme de calcul antérieur traduisant les mouvements d'un véhicule à 5 degrés de liberté : ce test n'a pas révélé d'écart appréciable entre les résultats obtenus dans les 2 cas ;

* pour l'ensemble des 2 éléments de véhicules, les masses non suspendues et les degrés de liberté correspondants, ayant été supprimés (c'est-à-dire : test des équations 4 à 16) ceci a permis de contrôler le couplage des deux véhicules ainsi que les réactions de la masse pendulaire.

4.2.4.3. Vérifications de l'ensemble du système

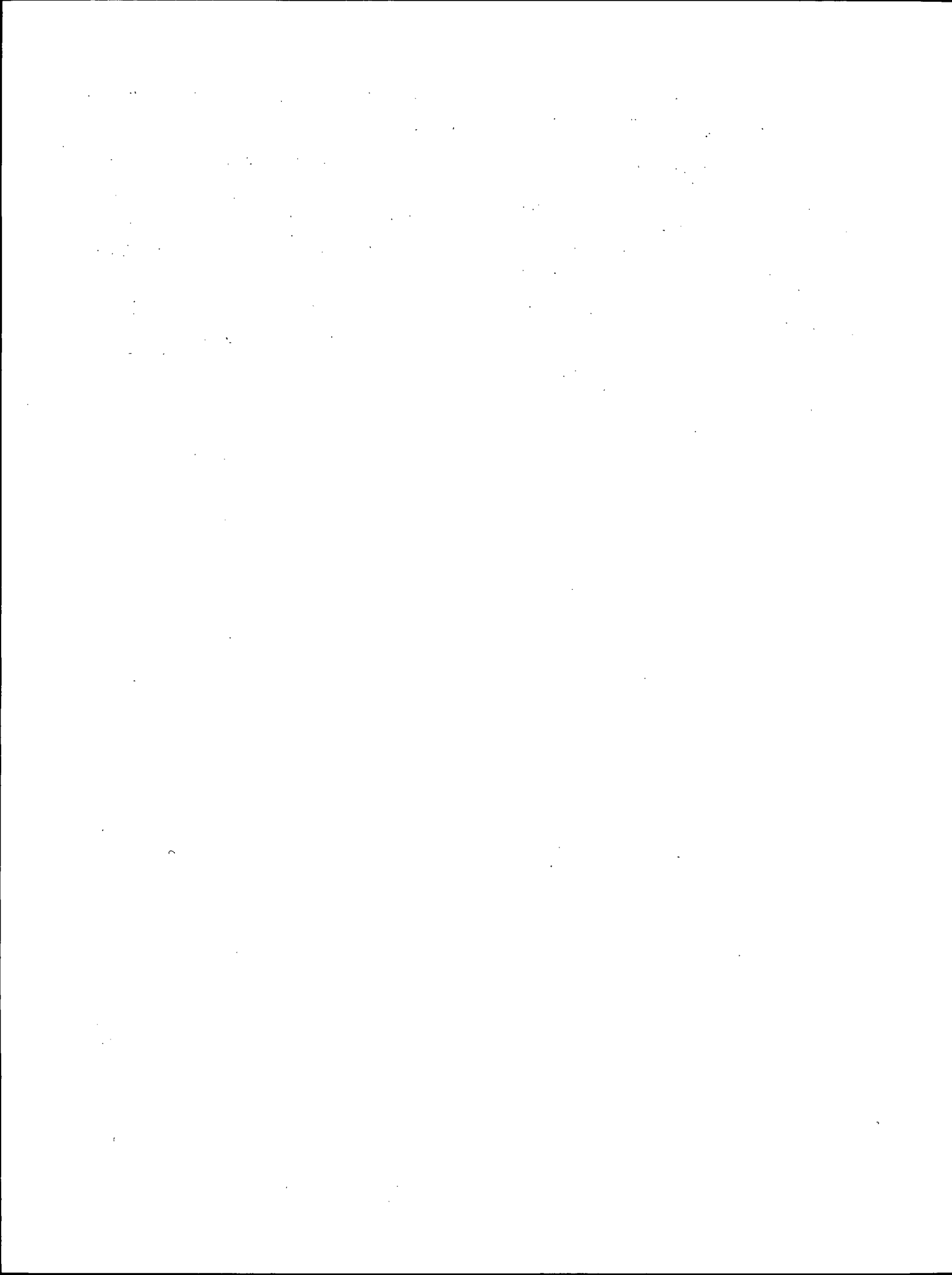
Trois sortes de tests ont été réalisées :

— On a comparé les valeurs staticodynamiques de l'angle de roulis et des transferts de charges obtenus après stabilisation du système (au bout de 10 secondes) à celles résultant d'un calcul direct en appliquant les lois de la statique.

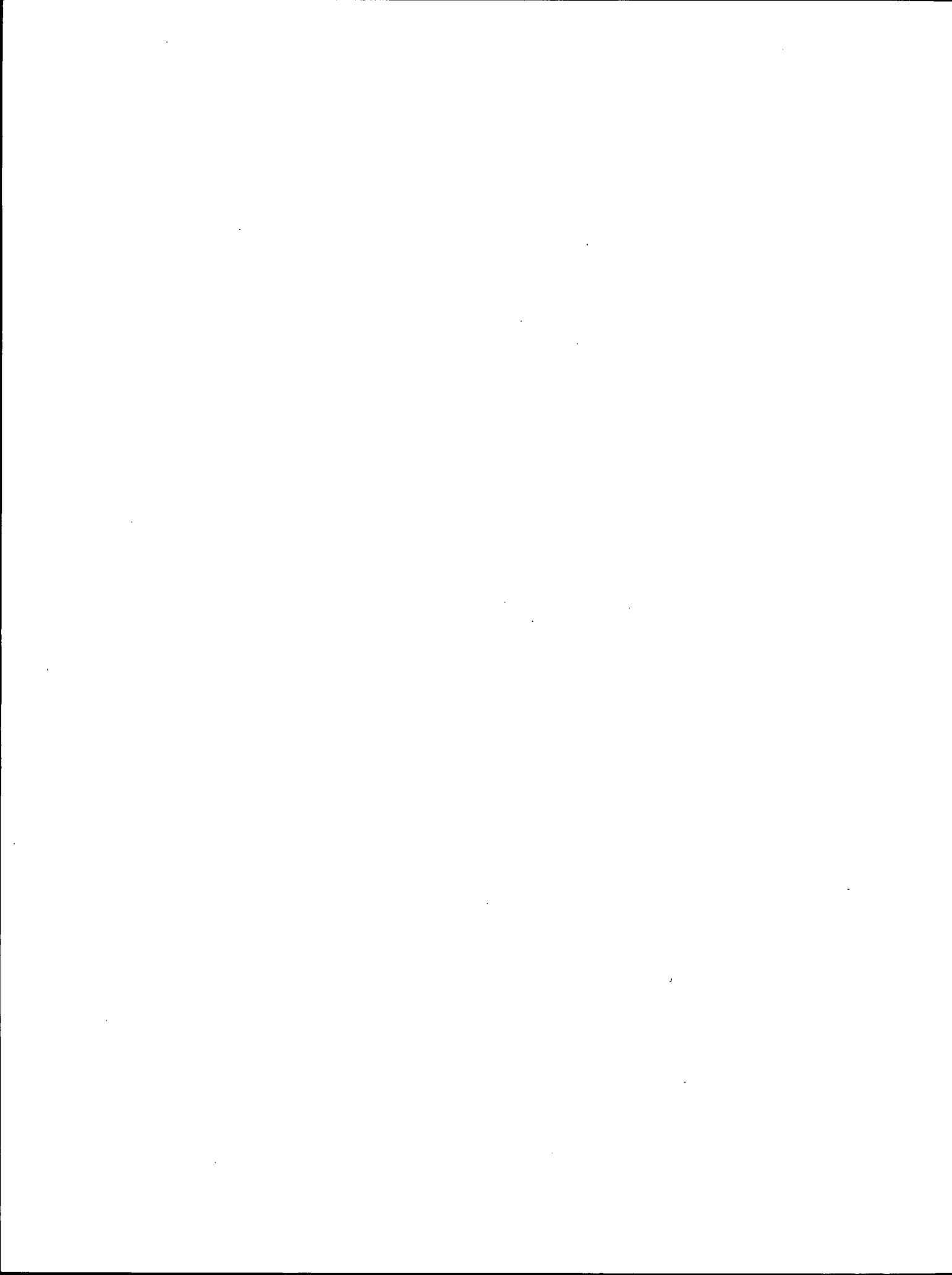
— On a vérifié que, lorsque le système a atteint son équilibre statico-dynamique, les normales aux trajectoires des centres des aires de contact des roues convergent vers un centre instantané de rotation. Ceci a souligné, selon les cas de vitesse, l'inégalité des poussées latérales de dérive pour des essieux aux propriétés identiques.

— On a procédé à des applications numériques particulières et vérifié que le système répond qualitativement, ou quantitativement lorsque cela était possible, comme il est attendu : ainsi, par exemple, les rigidités de dérive ont été multipliées par le facteur 100 dans un test, l'amortissement de la masse oscillante par un facteur 10^5 dans un autre.

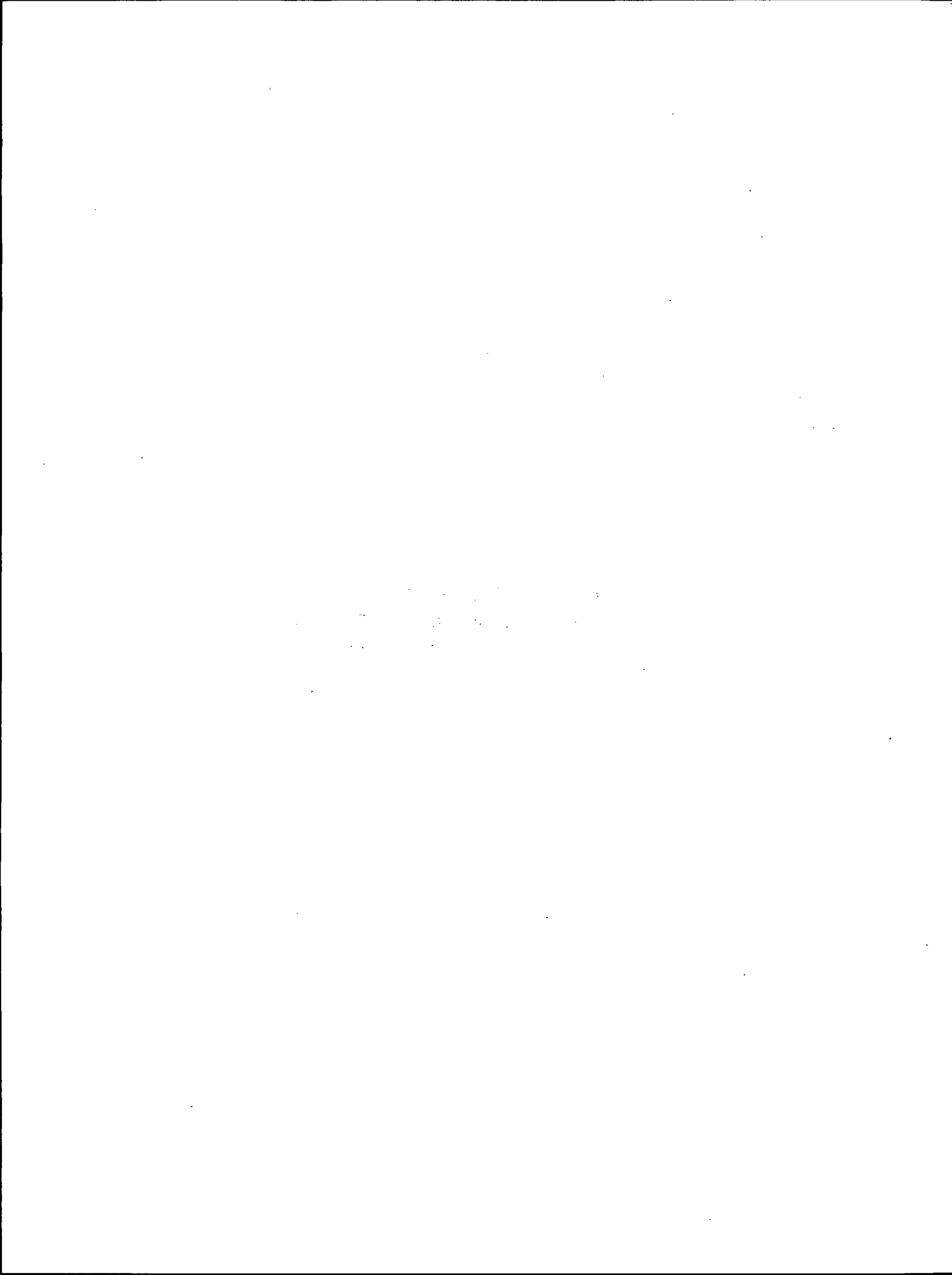
L'ensemble de ces tests a permis de mettre progressivement au point le programme de calcul et garantit son exactitude pour la prise en compte des paramètres du système ayant sur le comportement une influence du 1er et du 2e ordre.



FIGURES



**1 – FIGURES DES MODELES UTILISES
PAR LES AUTEURS DES TEXTES
FIGURANT DANS LA BIBLIOGRAPHIE**



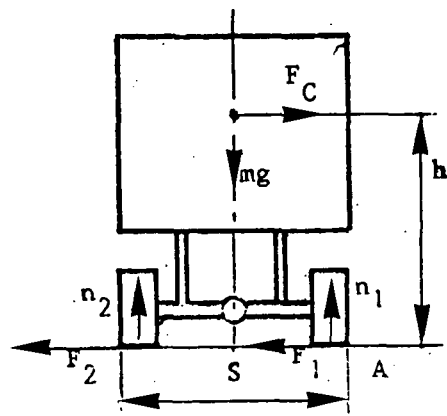


Figure 1.1 - Modèle sans suspension

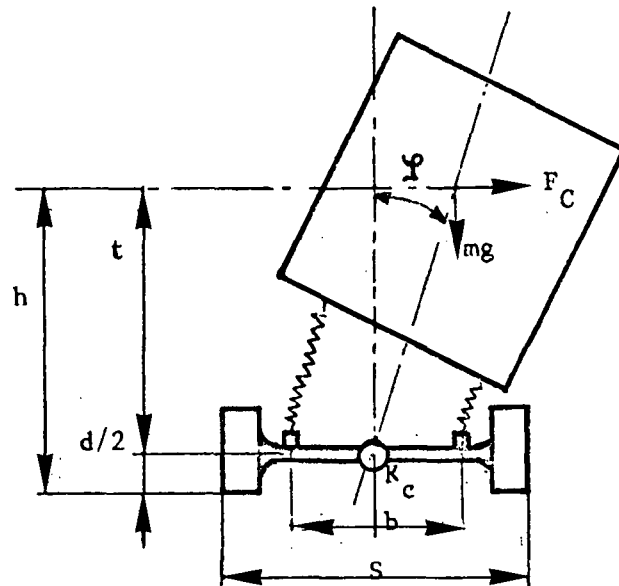


Figure 1.2 - Modèle avec suspension

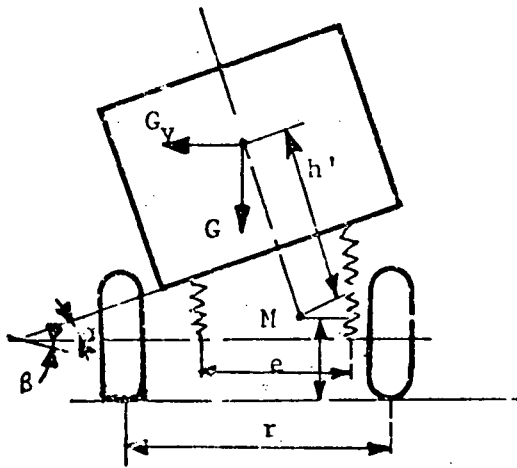


Figure 1.3 - Modèle transversal suspendu avec flexibilité des pneumatiques

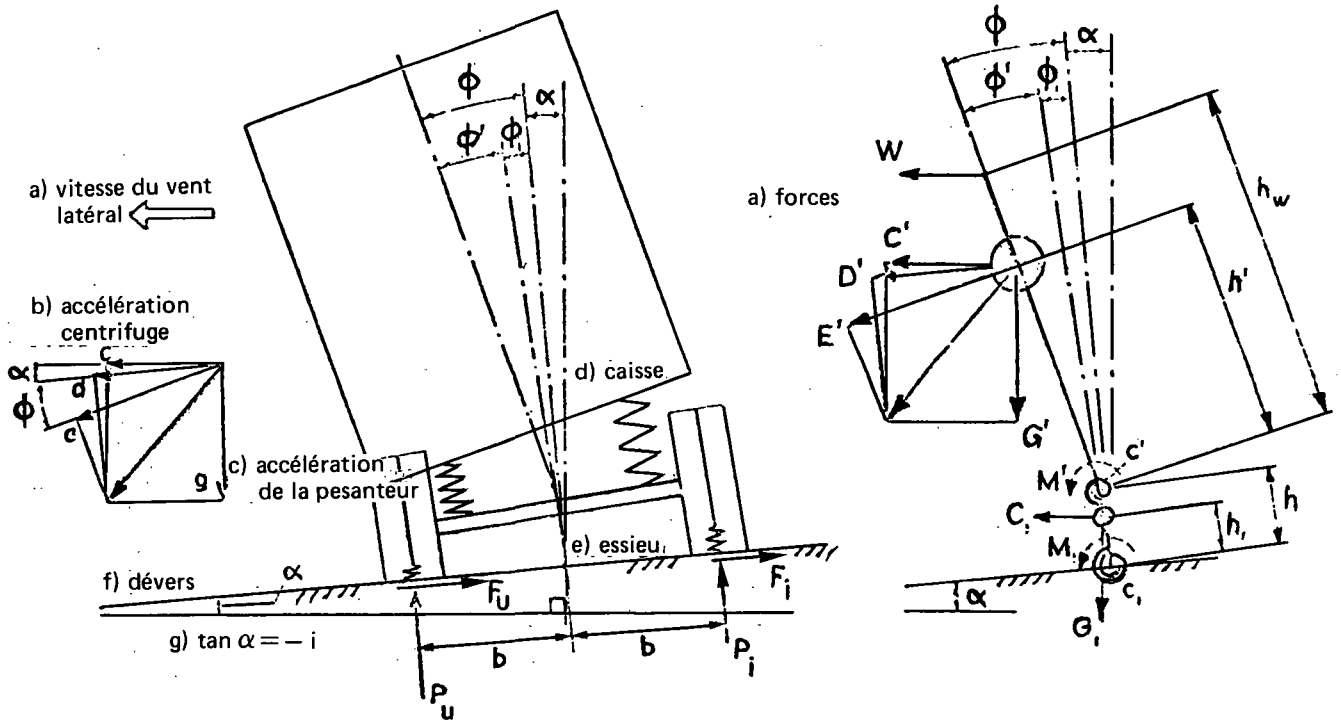
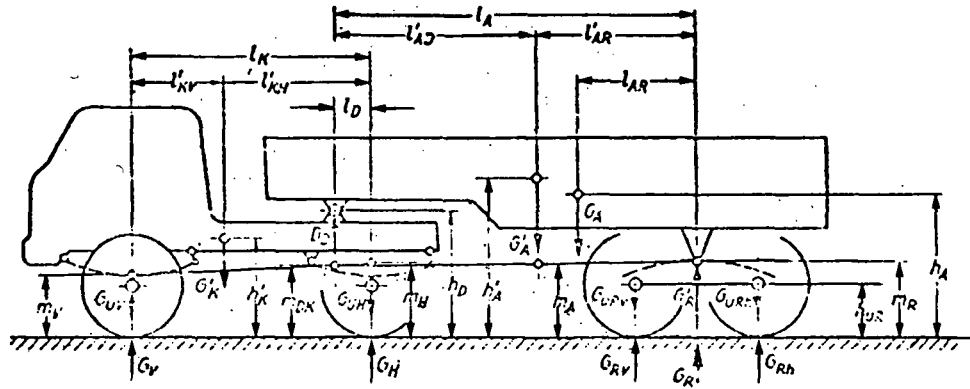
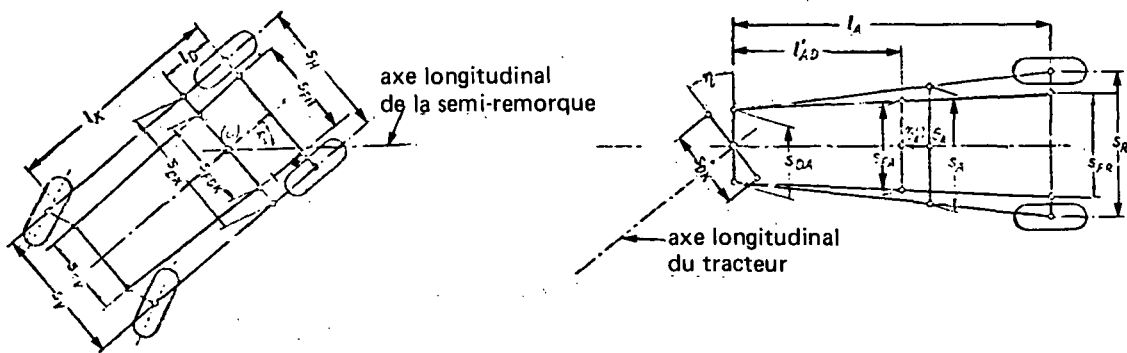


Figure 1.4 - a) Modèle de véhicule utilisé

- b) Modèle de remplacement



Désignations sur un véhicule semi-remorque



Voie effective d'un véhicule

Figure 1.5 - Modèle utilisé par Görge

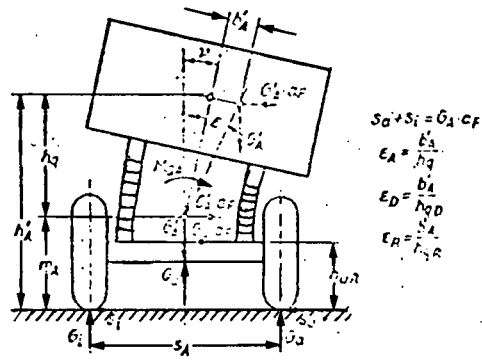


Figure 1.6 - Variations de charge de roue lors d'une inclinaison

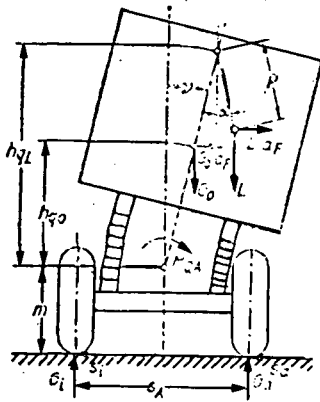


Figure 1.7 - Variations de la charge de roue avec charge suspendue

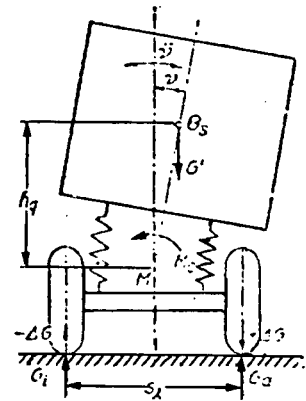


Figure 1.8 - Variations de la charge oscillation de roulis

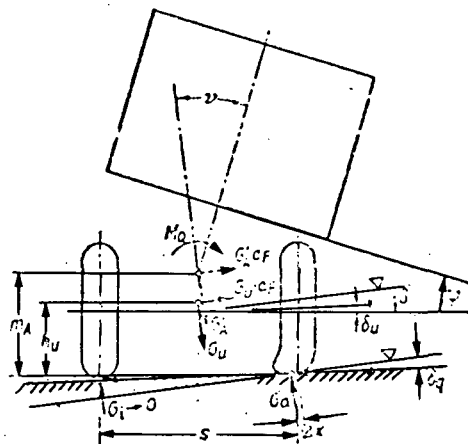


Figure 1.9 - Influence de l'inclinaison de l'essieu due à l'écrasement du pneu et à la déclivité de la chaussée

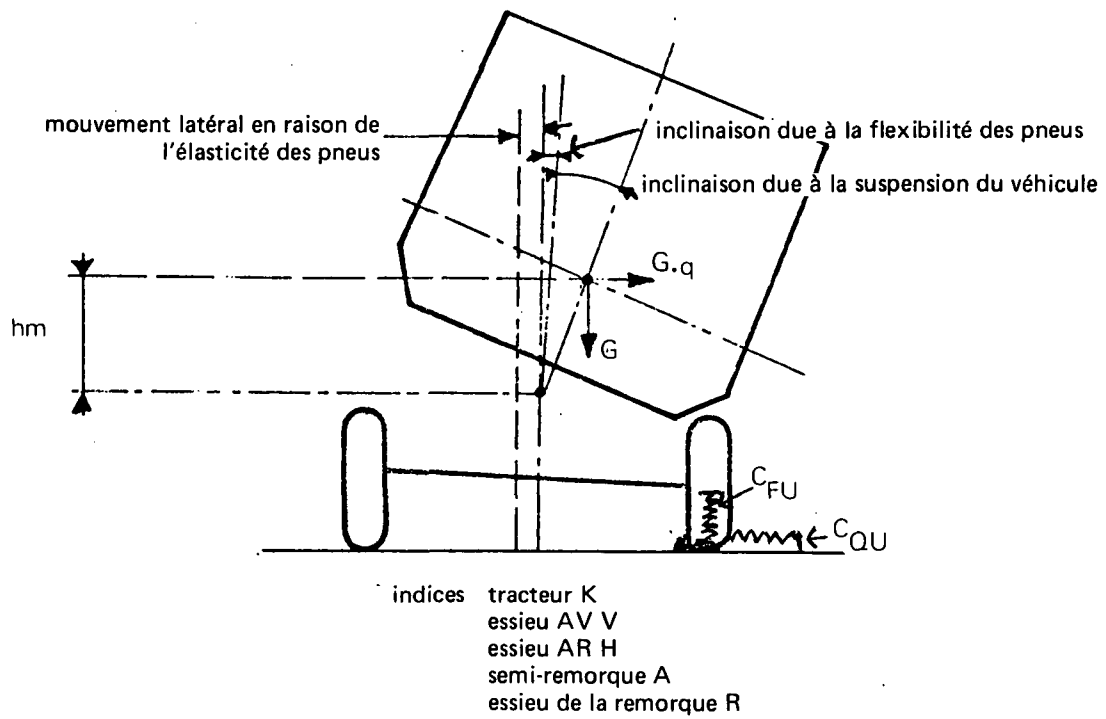


Figure 1.10 - Système de simulation à deux dimensions pour le calcul du renversement.

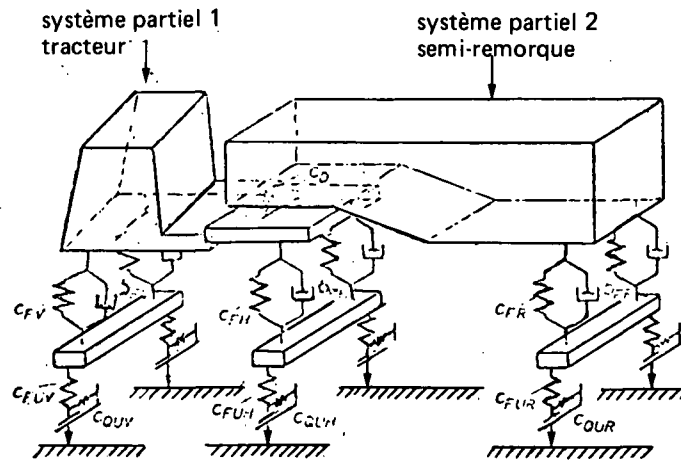


Figure 1.11 - Modèle de simulation spatial

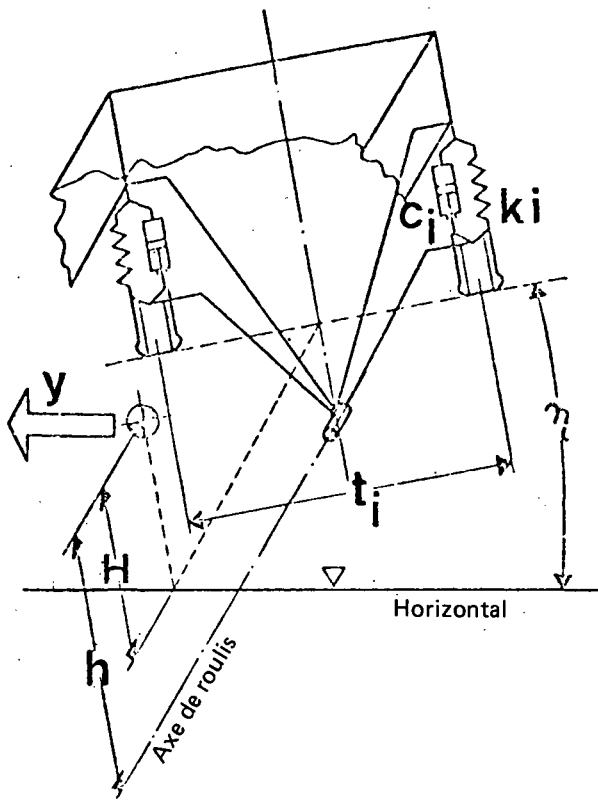


Figure 1.12

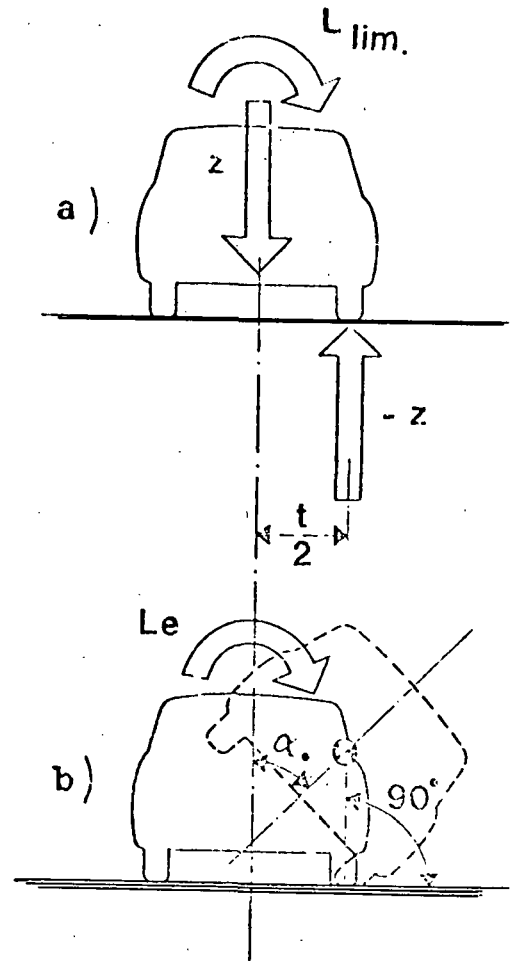


Figure 1.13

Figure 1.14

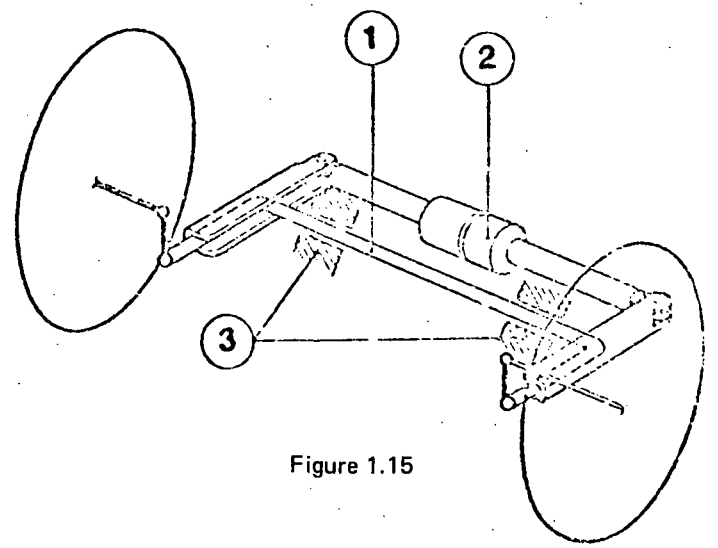
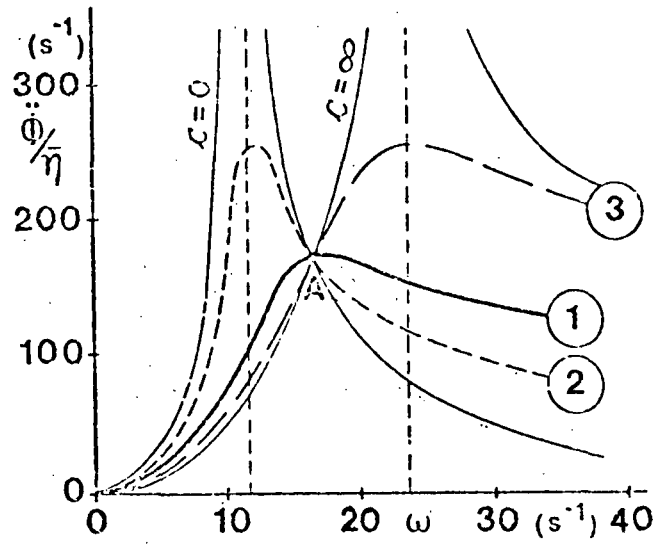


Figure 1.15

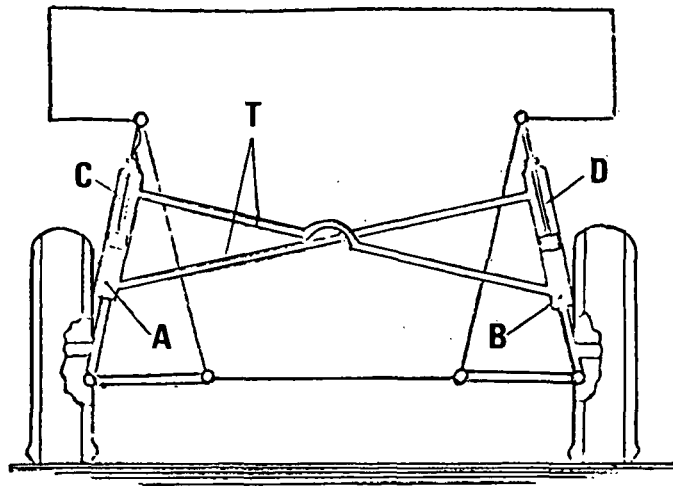


Figure 1.16

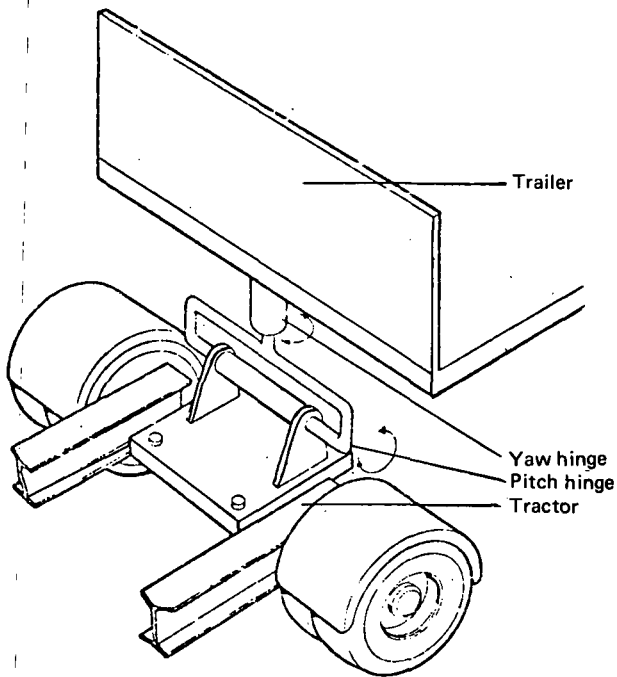


Figure 1.17 - Couplage normal : positions respectives des articulations de lacet et de tangage

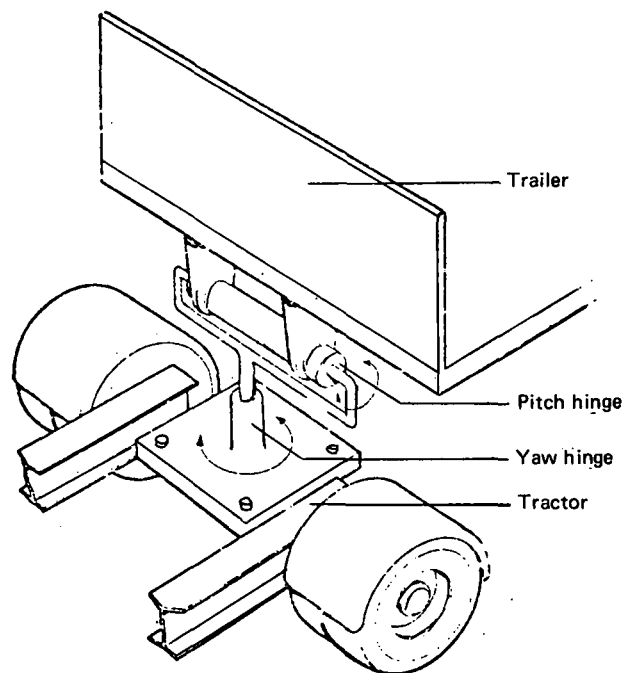
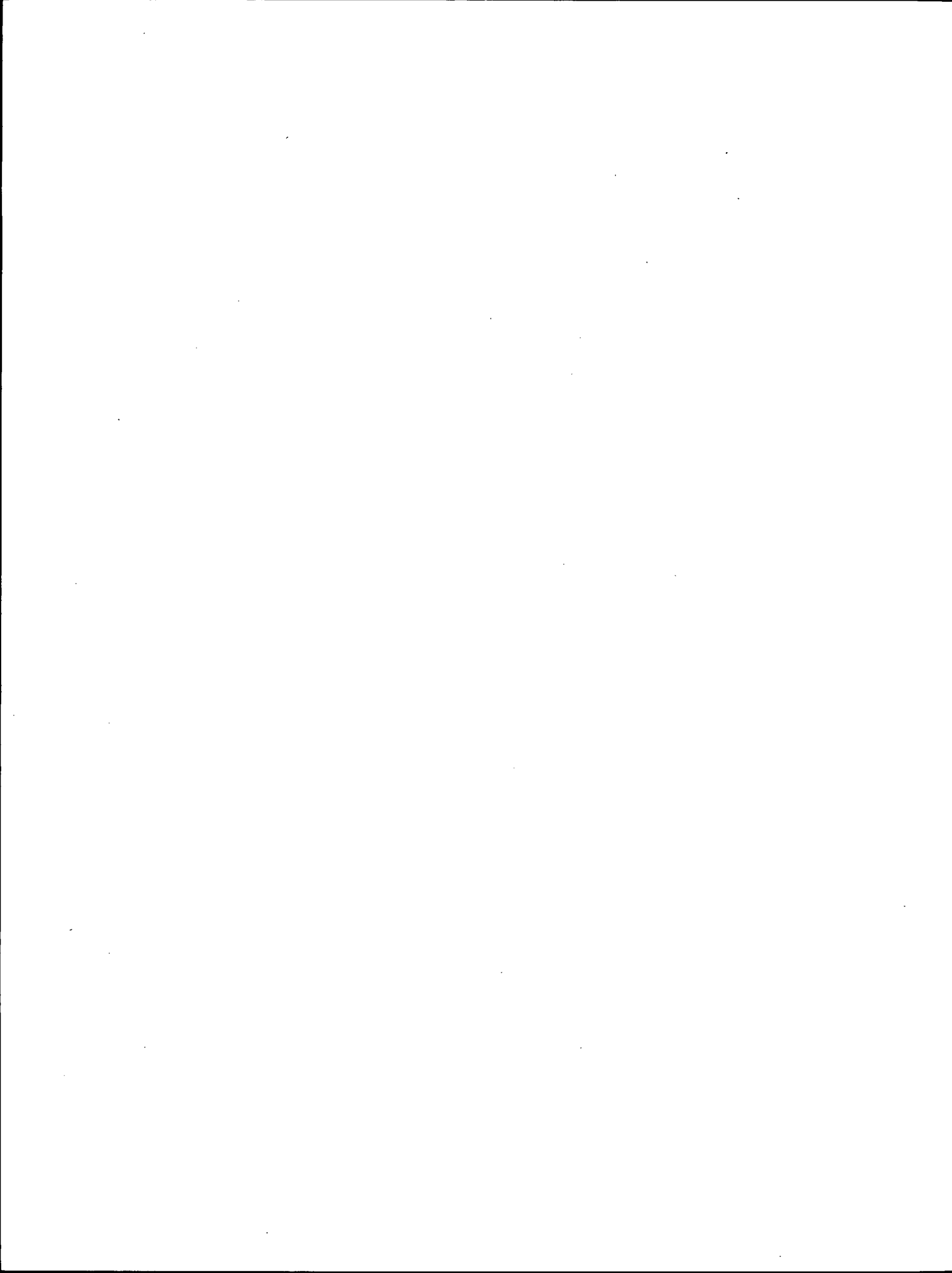


Figure 1.18 - Couplage inversé : positions respectives des articulations de lacet et de tangage



**2 – FIGURES CORRESPONDANT AU MODELE
STATICO-DYNAMIQUE**



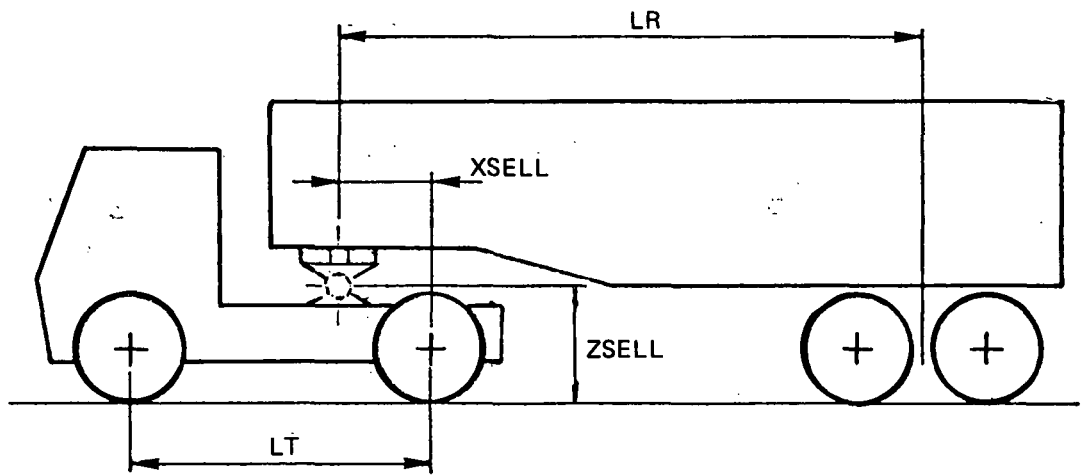


Figure 2.1 - Vue longitudinale schématique d'un véhicule semi-remorque

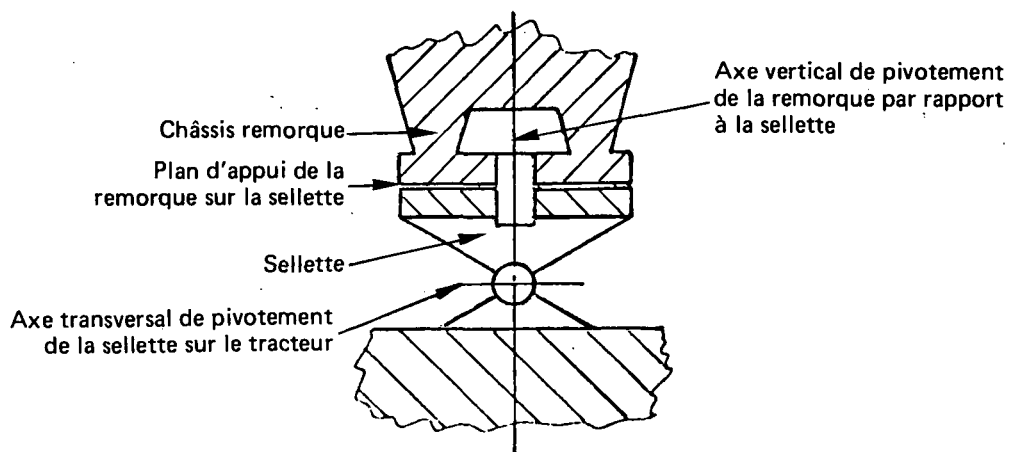
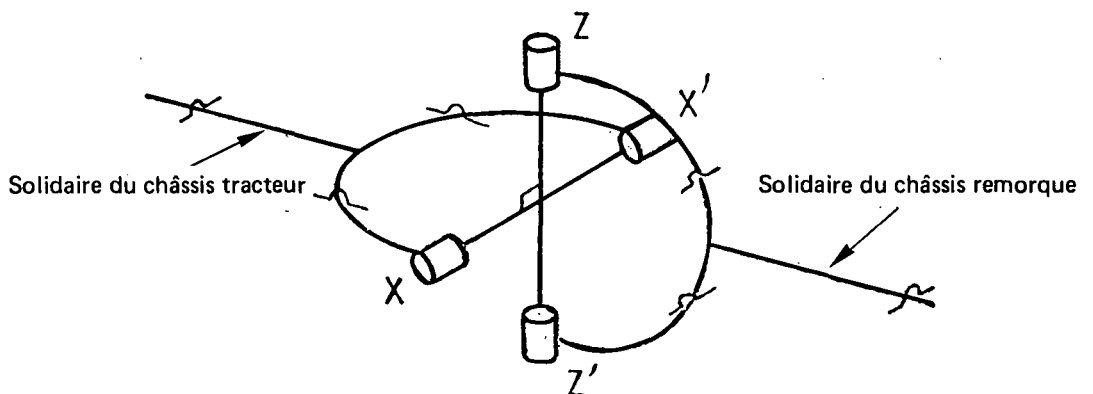
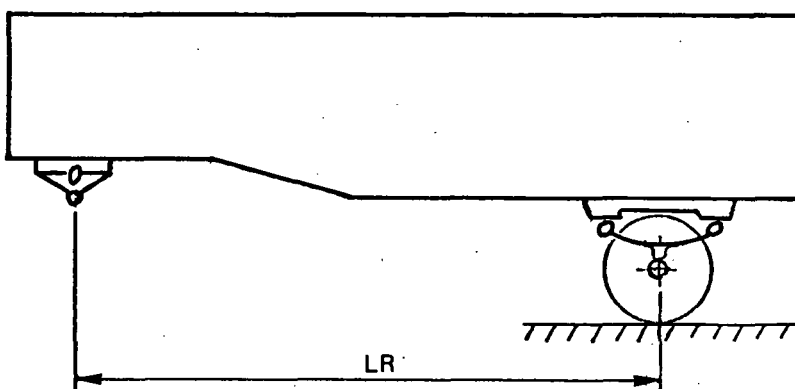
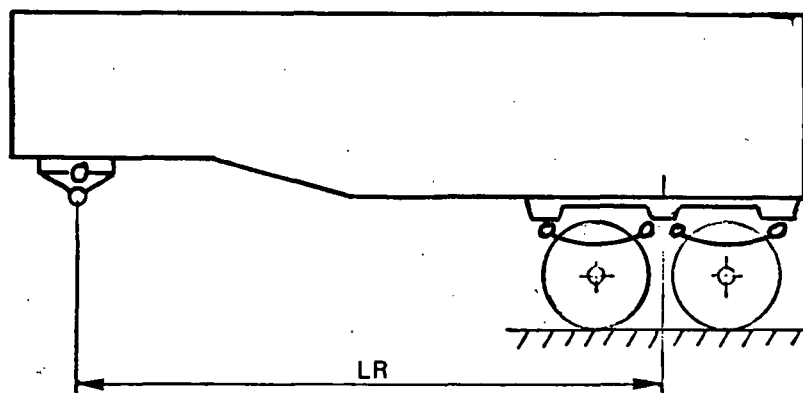


Figure 2.2 - Schéma de la liaison tracteur - semi-remorque



Equivalent à un joint de Hooke





Schématisé sous la forme :

Figure 2.3 - Schématisation du double essieu de la remorque

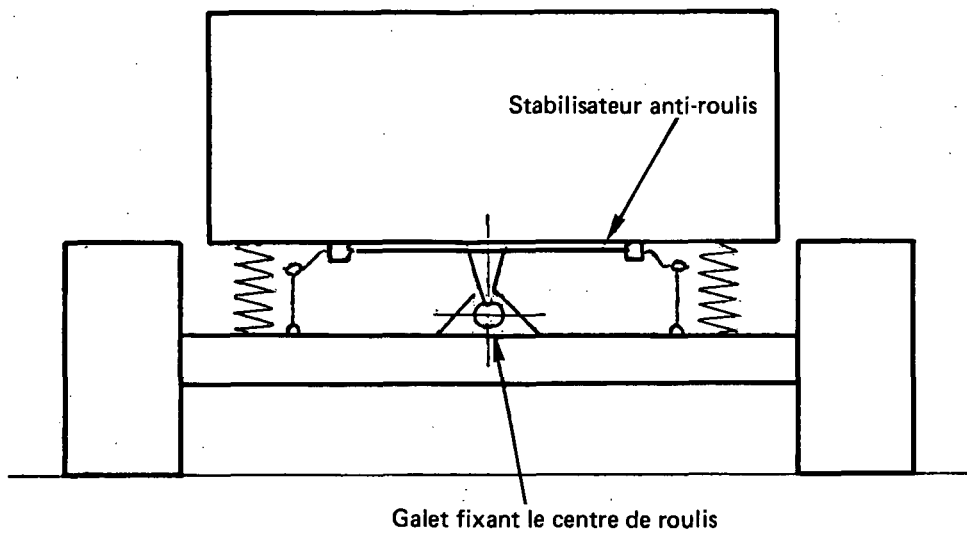


Figure 2.4 - Schéma équivalent de liaison essieu-châssis

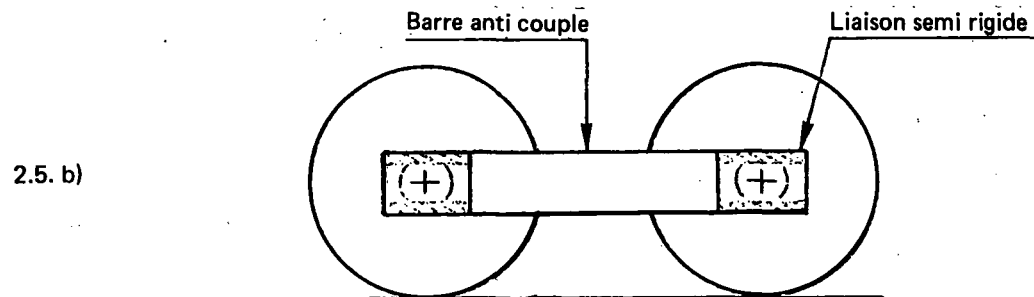
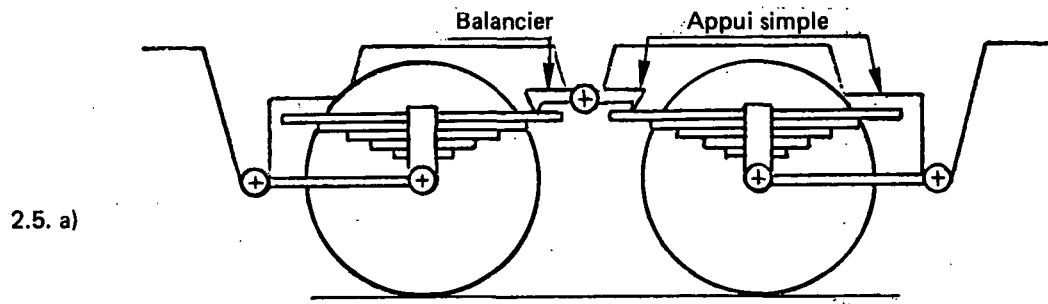


Figure 2.5 - Liaison longitudinale des essieux de la semi-remorque entre eux et avec le châssis

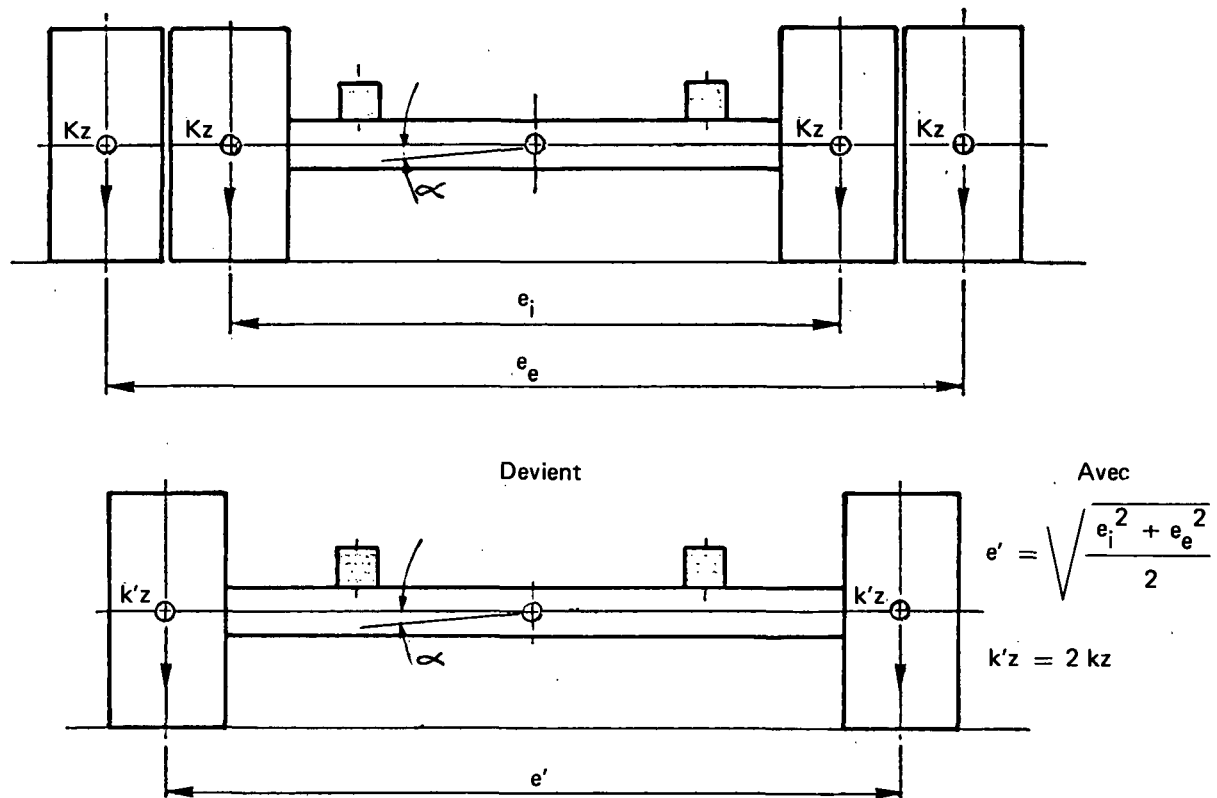
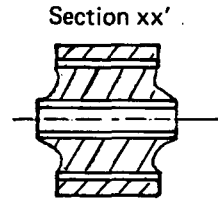
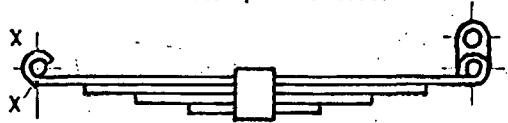
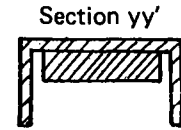
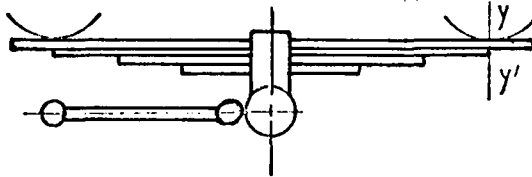


Figure 2.6 - Schématisation d'un essieu à roues jumelées

2.7. a) – Liaison ressorts châssis par silenblocs



2.7. b₁) – Liaison ressorts châssis par appui simple dans une gouttière



2.7. b₂) – Représentation schématique

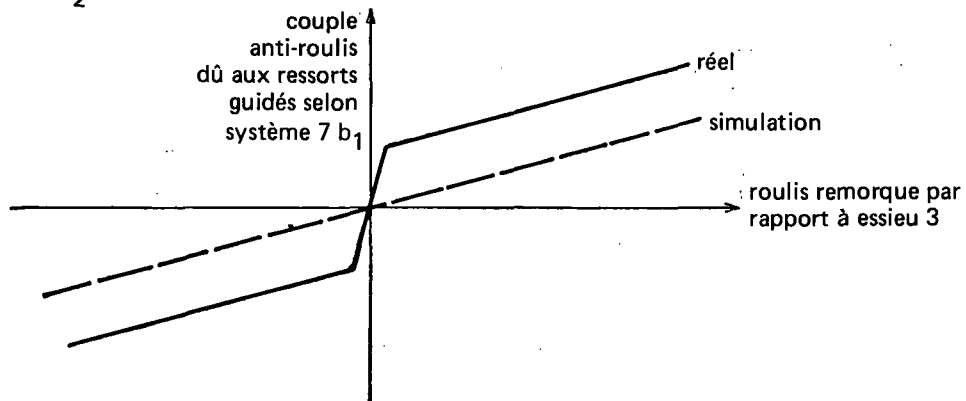


Figure 2.7 - Liaison essieux-châssis

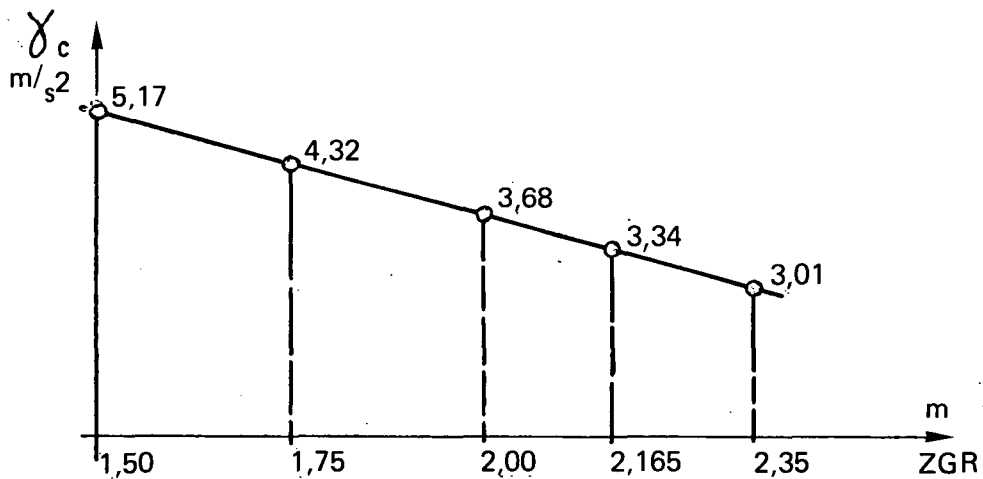


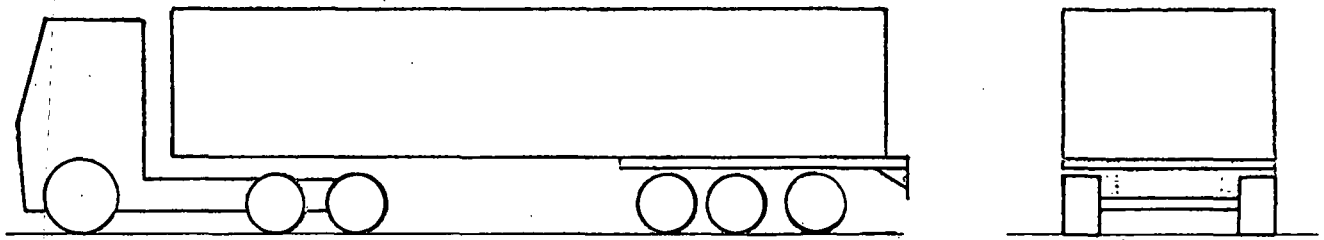
Figure 2.8 - Influence de la hauteur du centre de gravité de la semi-remorque sur l'accélération latérale critique* du véhicule étudié

* Accélération critique : Accélération centrifuge du centre d'essieu arrière du tracteur correspondant au délestage total des roues intérieures de la semi-remorque

Figure 2.9

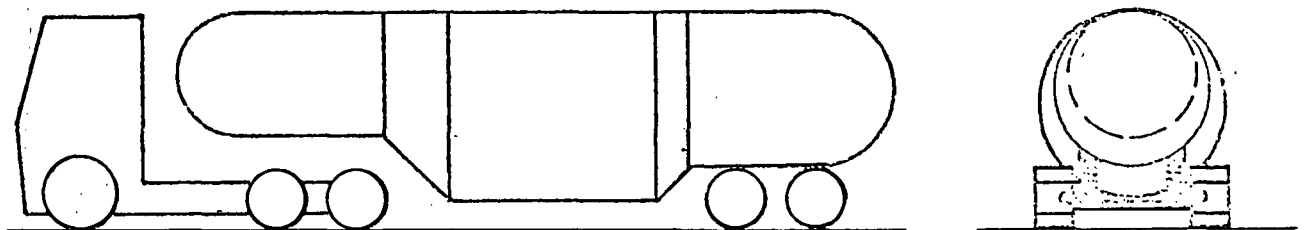
2.9. a) - Perfectionnements possibles de l'équilibre latéral des véhicules semi-remorques

Véhicule à plateau plan



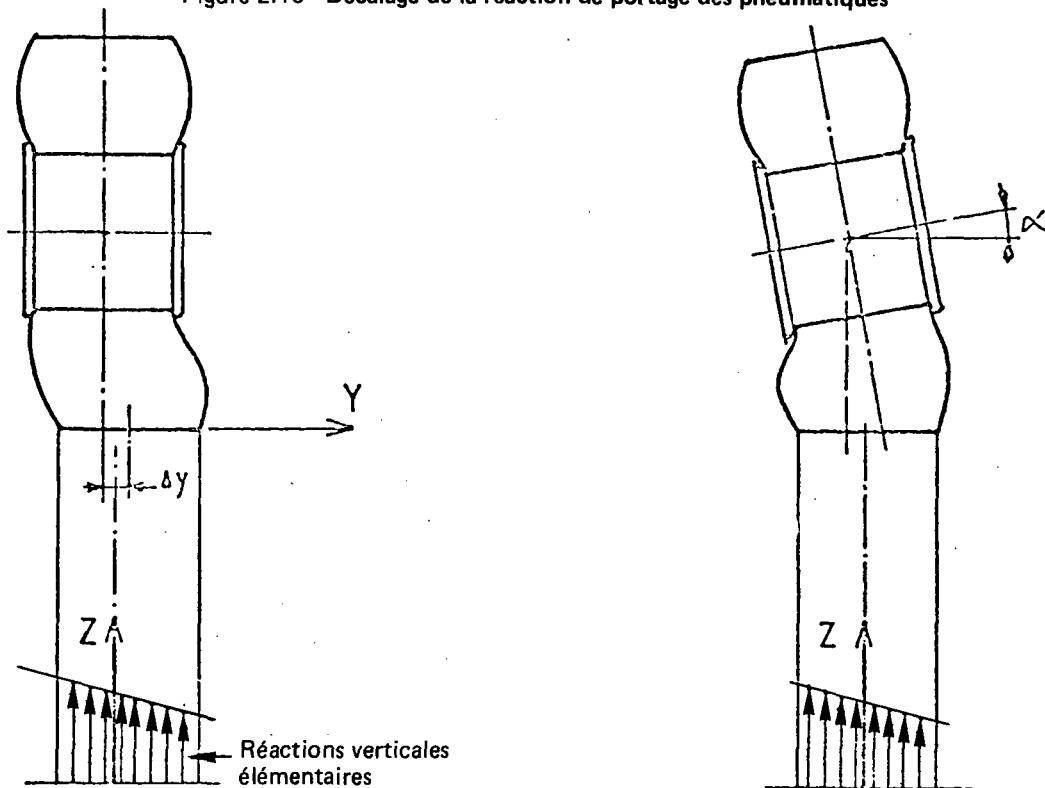
5 essieux au lieu de 3 équipés de roues simples de plus faible diamètre, à la voie maximale

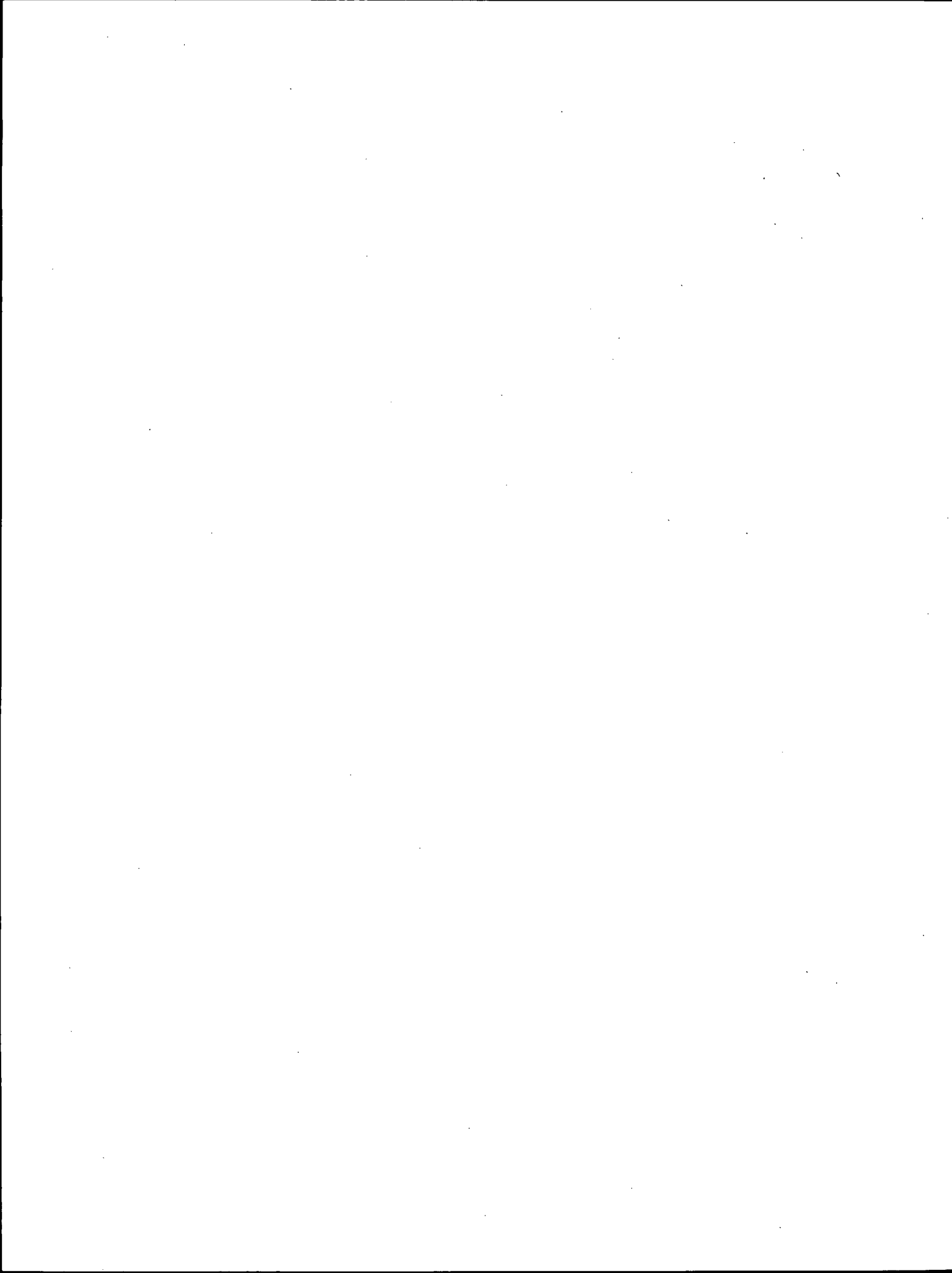
2.9. b) - Véhicules à semi-remorque citerne



Exemple de conception permettant d'atteindre un γ_c de l'ordre de 5 m/s^2

Figure 2.10 - Décalage de la réaction de portage des pneumatiques





**3 – FIGURES CORRESPONDANT A L'ETUDE
DU BALLANT LIQUIDE**

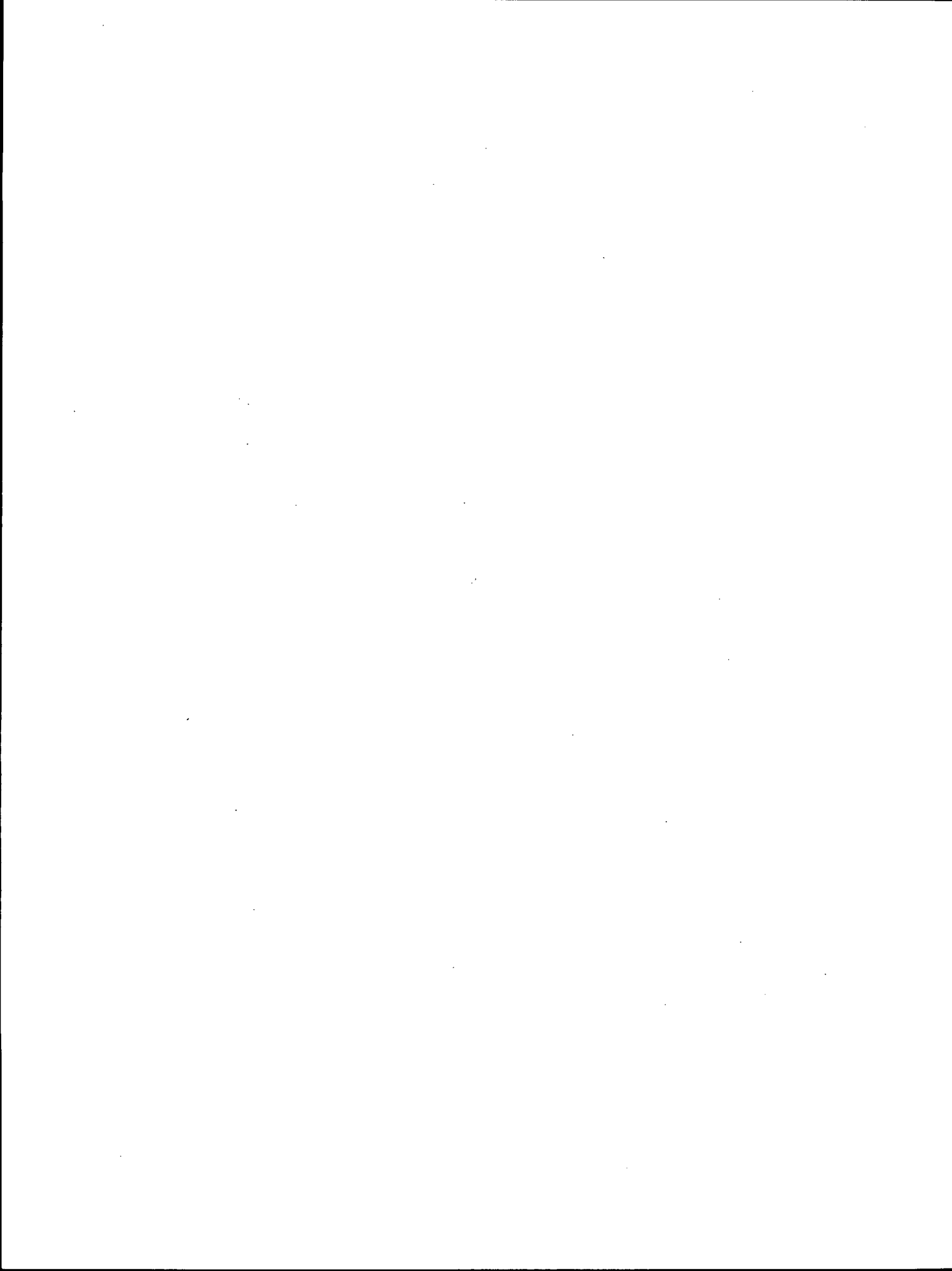
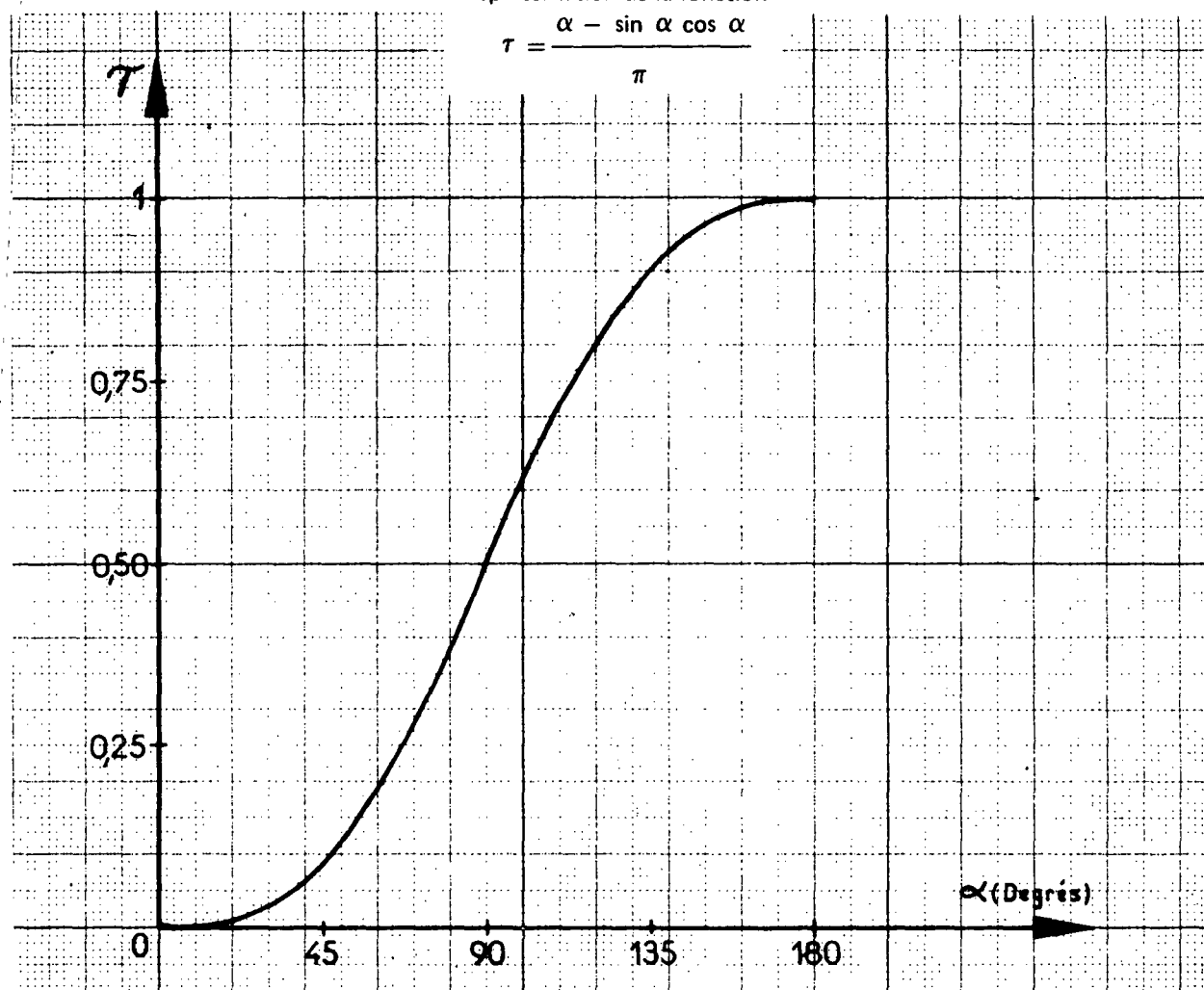


Figure 3.1

CITERNE CIRCULAIRE

Représentation de la fonction

$$\tau = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi}$$



T : Taux de remplissage

α : Demi angle au centre

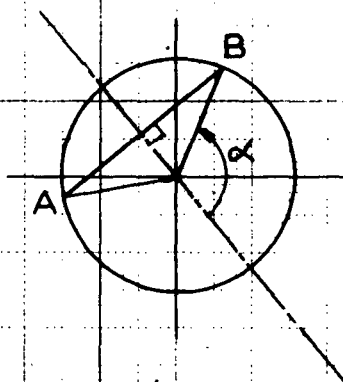
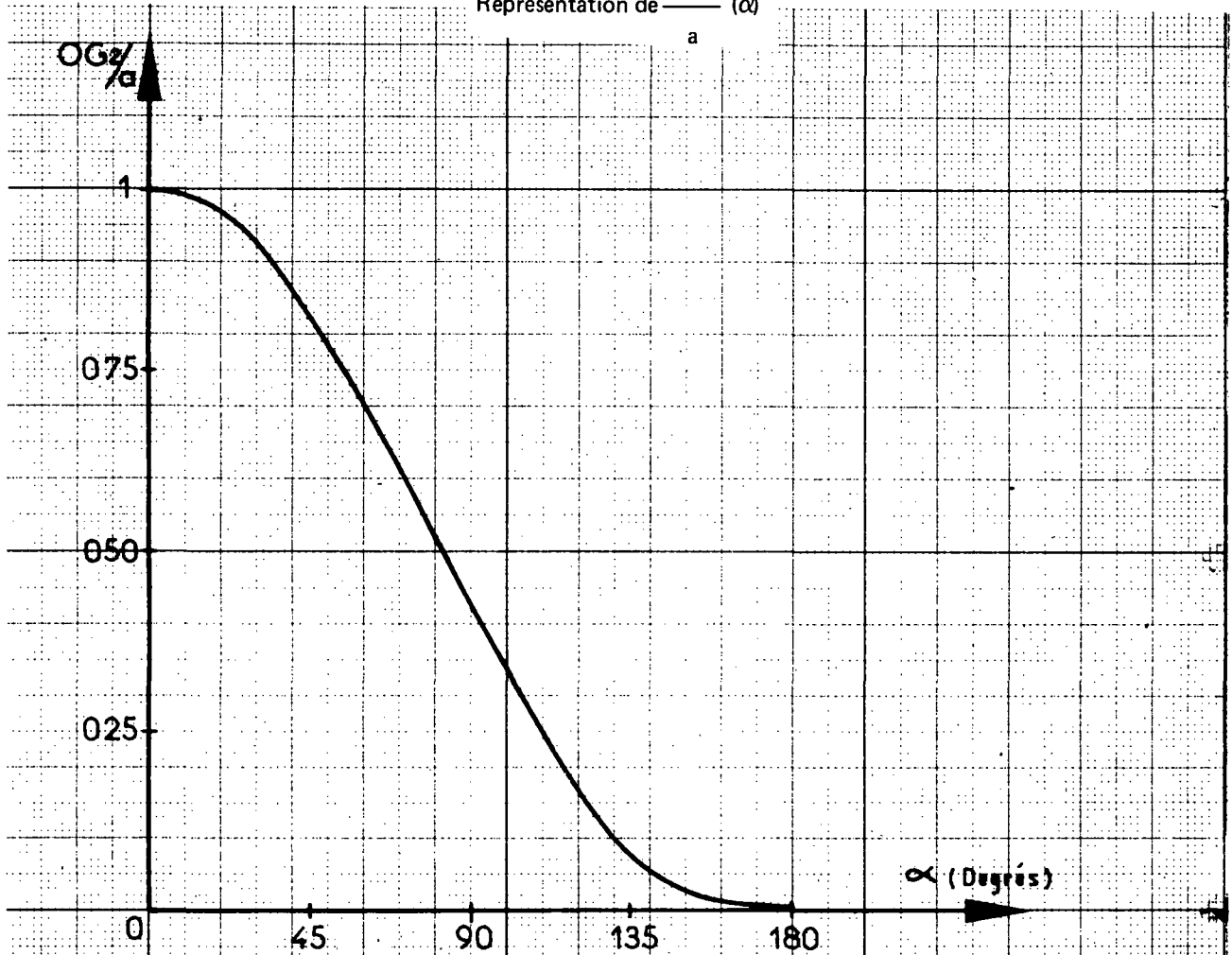


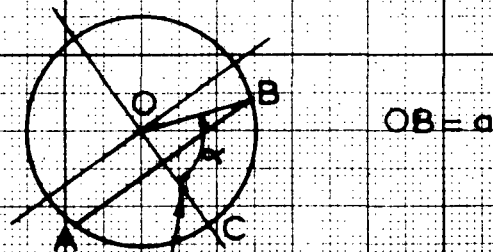
Figure 3.2

CITERNE CIRCULAIRE

Représentation de $\frac{OG_2}{a}$ (α)



α : Dem. angle au centre



G_2 (Centre de gravité du segment BCA)

Figure 3.3

CITERNE CIRCULAIRE

Représentation de $\frac{OG_2}{a} (\tau)$

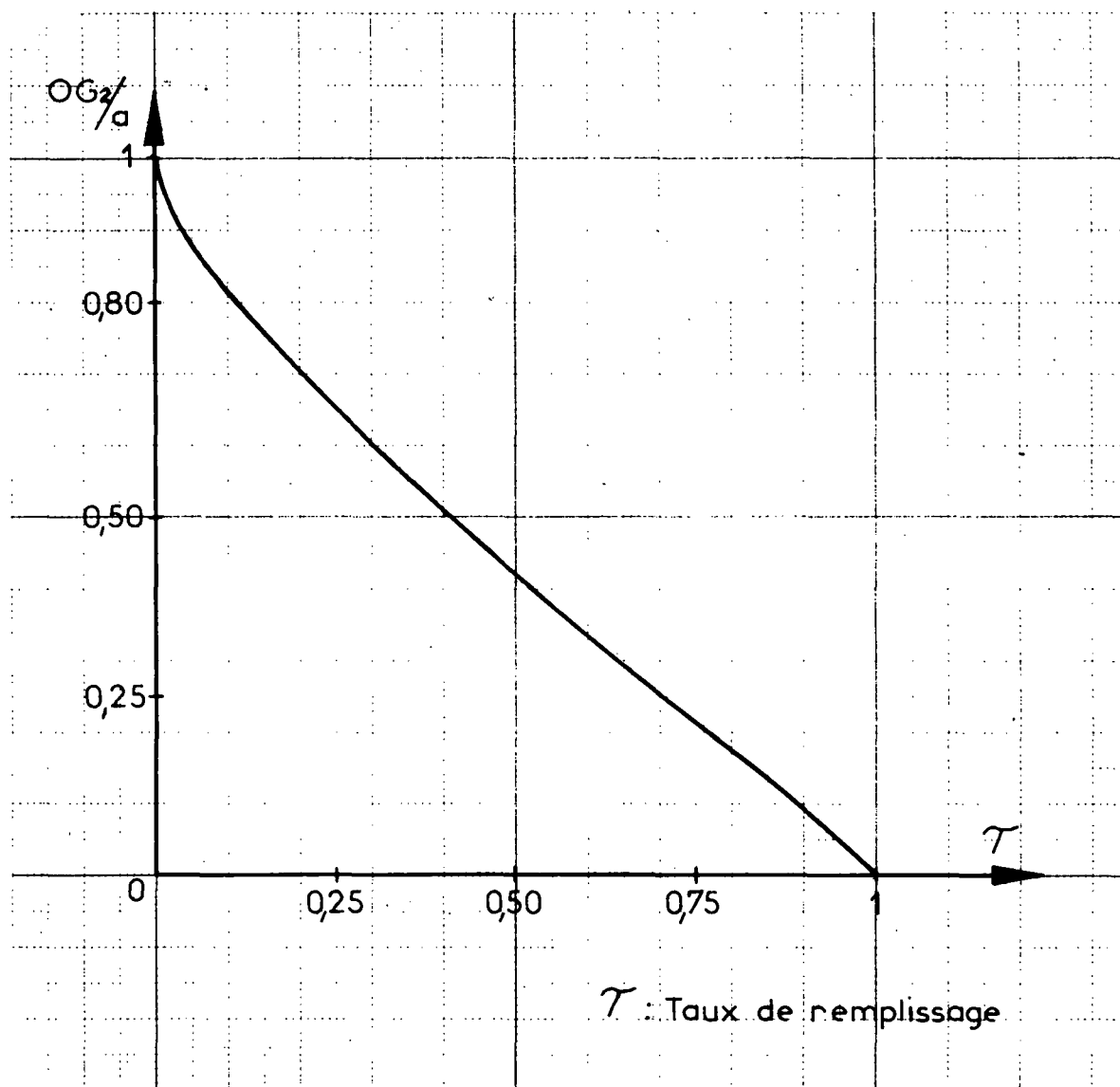


Figure 3.4

CITERNE CIRCULAIRE
VARIATION DE LA PERIODE D'OSCILLATION
TRANSVERSALE DE LA MASSE LIQUIDE EN FONCTION DU
RAYON a DE LA CITERNE ET DU TAUX DE REMPLISSAGE

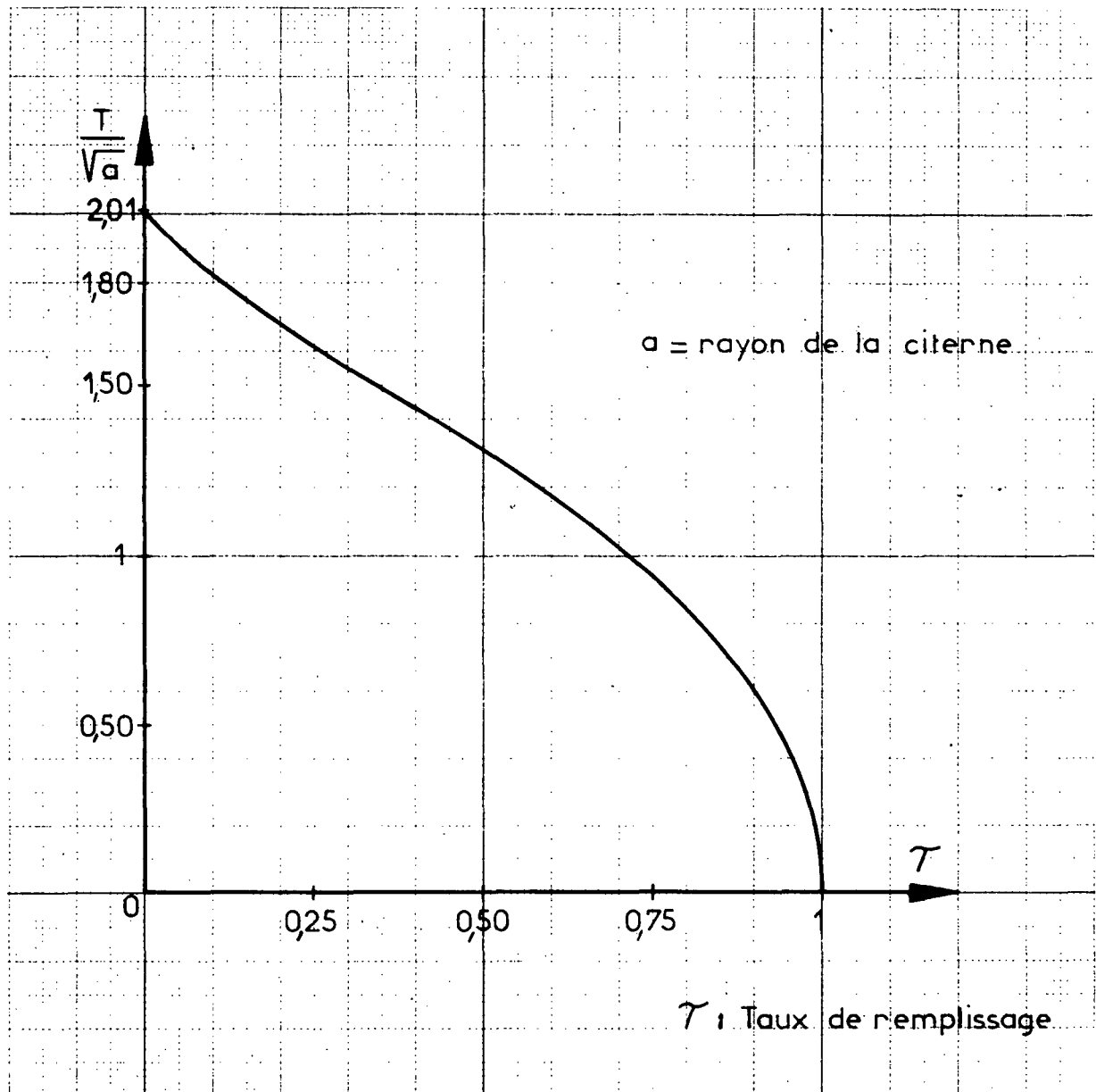


Figure 3.5

VARIATIONS DE γ_{c1} et γ_{c2}
 EN FONCTION DU TAUX DE REMPLISSAGE
 POUR UN FLUIDE A FAIBLE DENSITE ($\rho = 510 \text{ t/m}^3$)

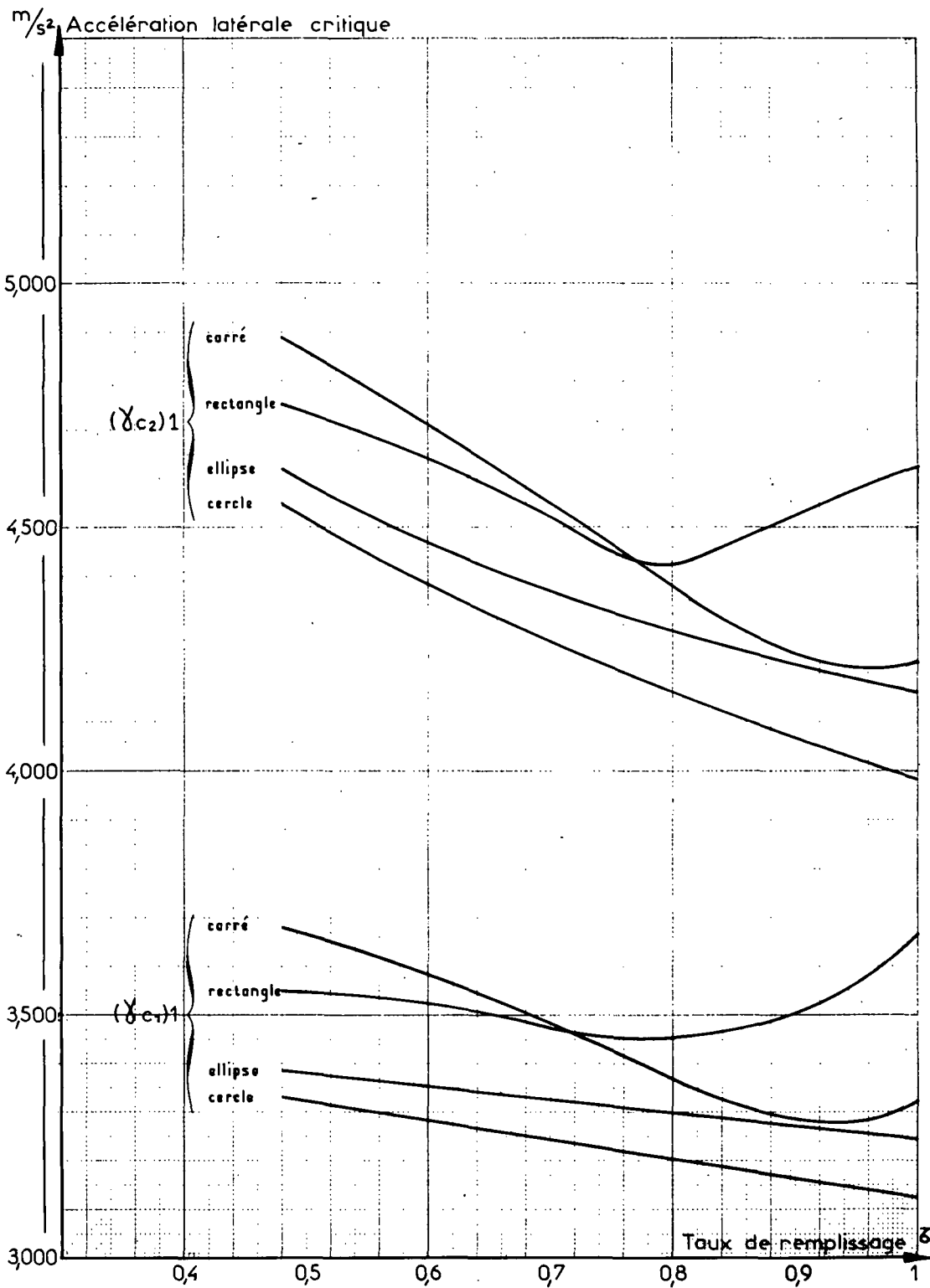


Figure 3.6

VARIATIONS DE γ_{c1} et γ_{c2}
 EN FONCTION DU TAUX DE REMPLISSAGE
 POUR UN FLUIDE A DENSITE ELEVEE (0,834 t/m³)

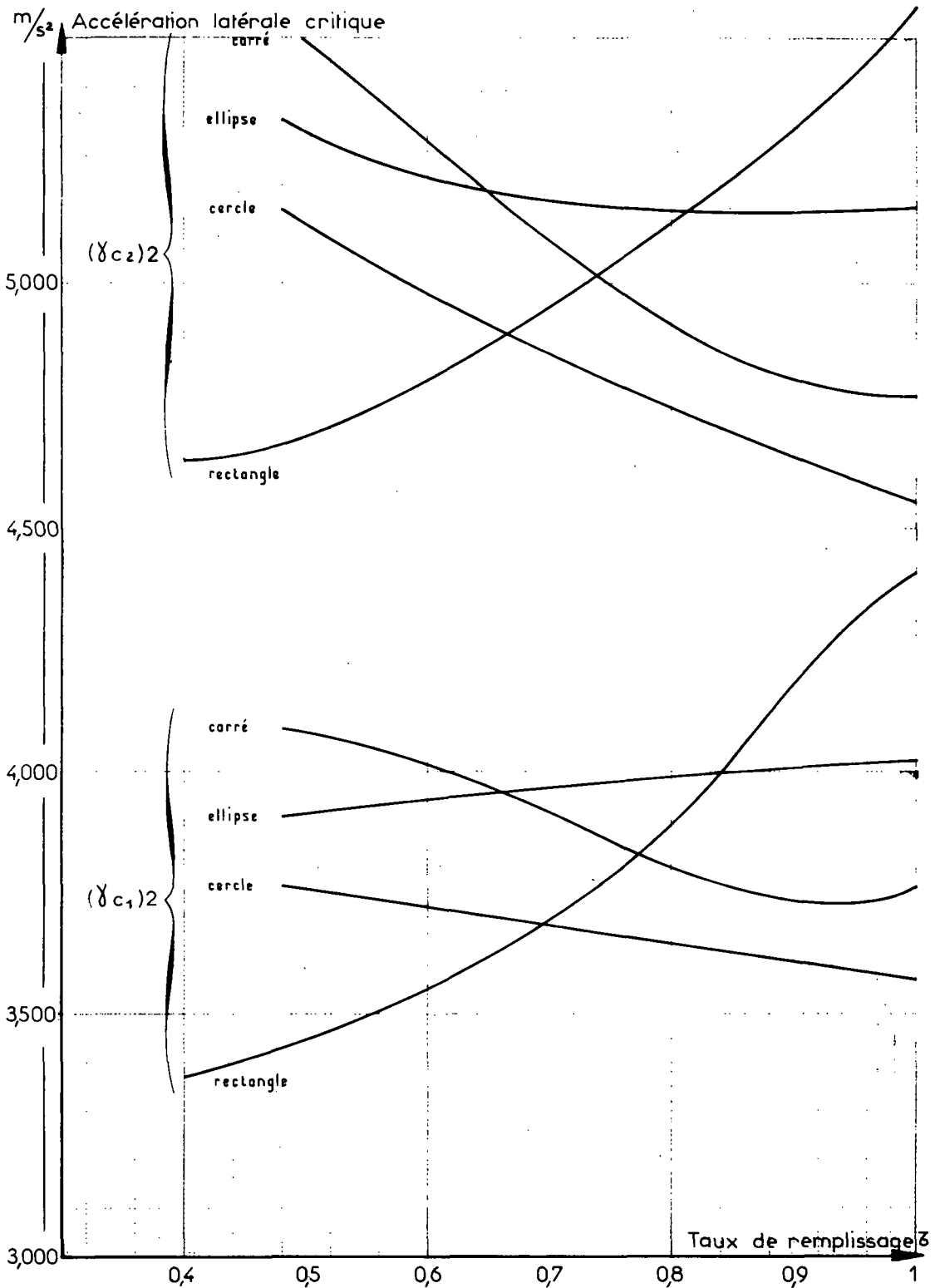
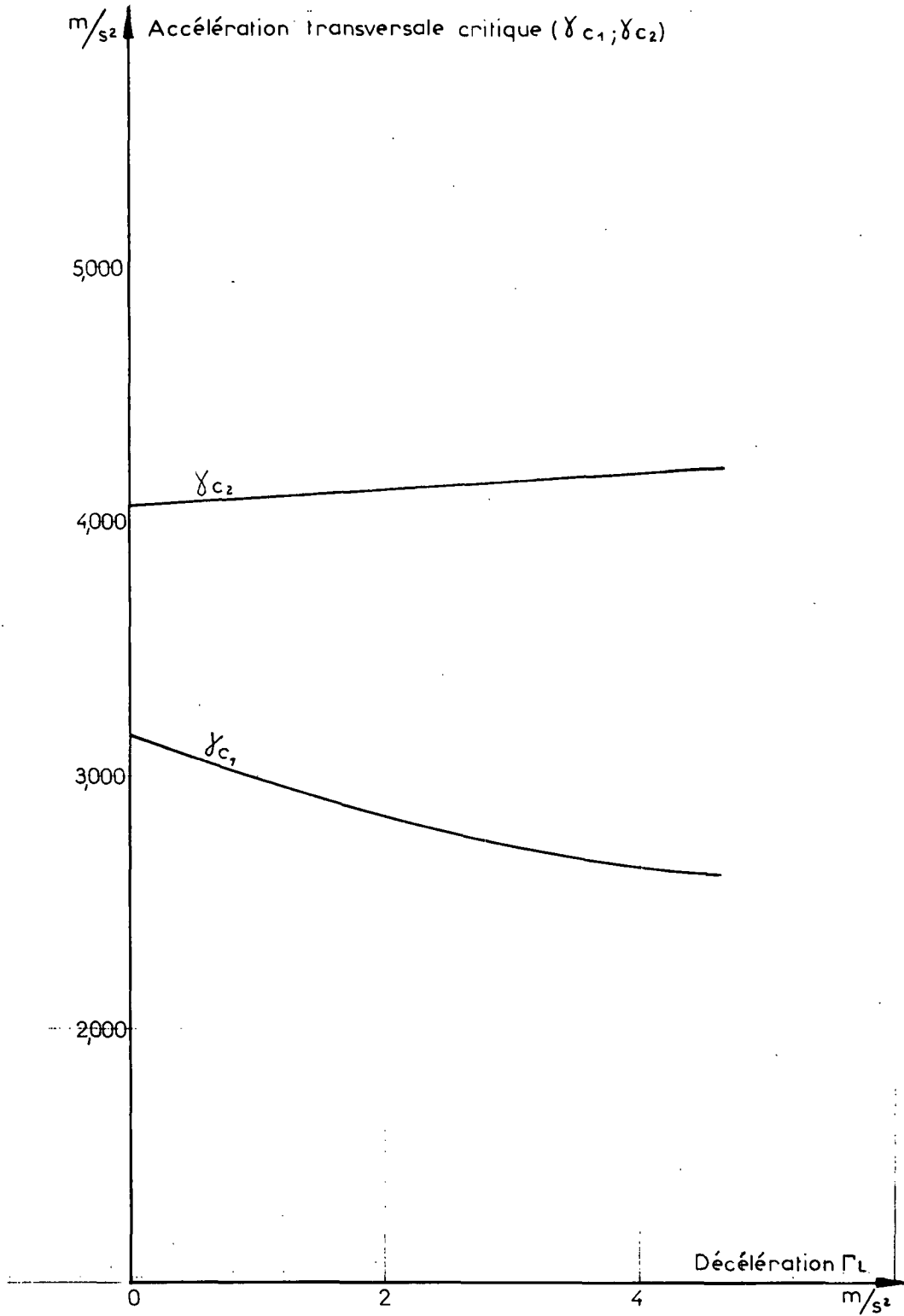
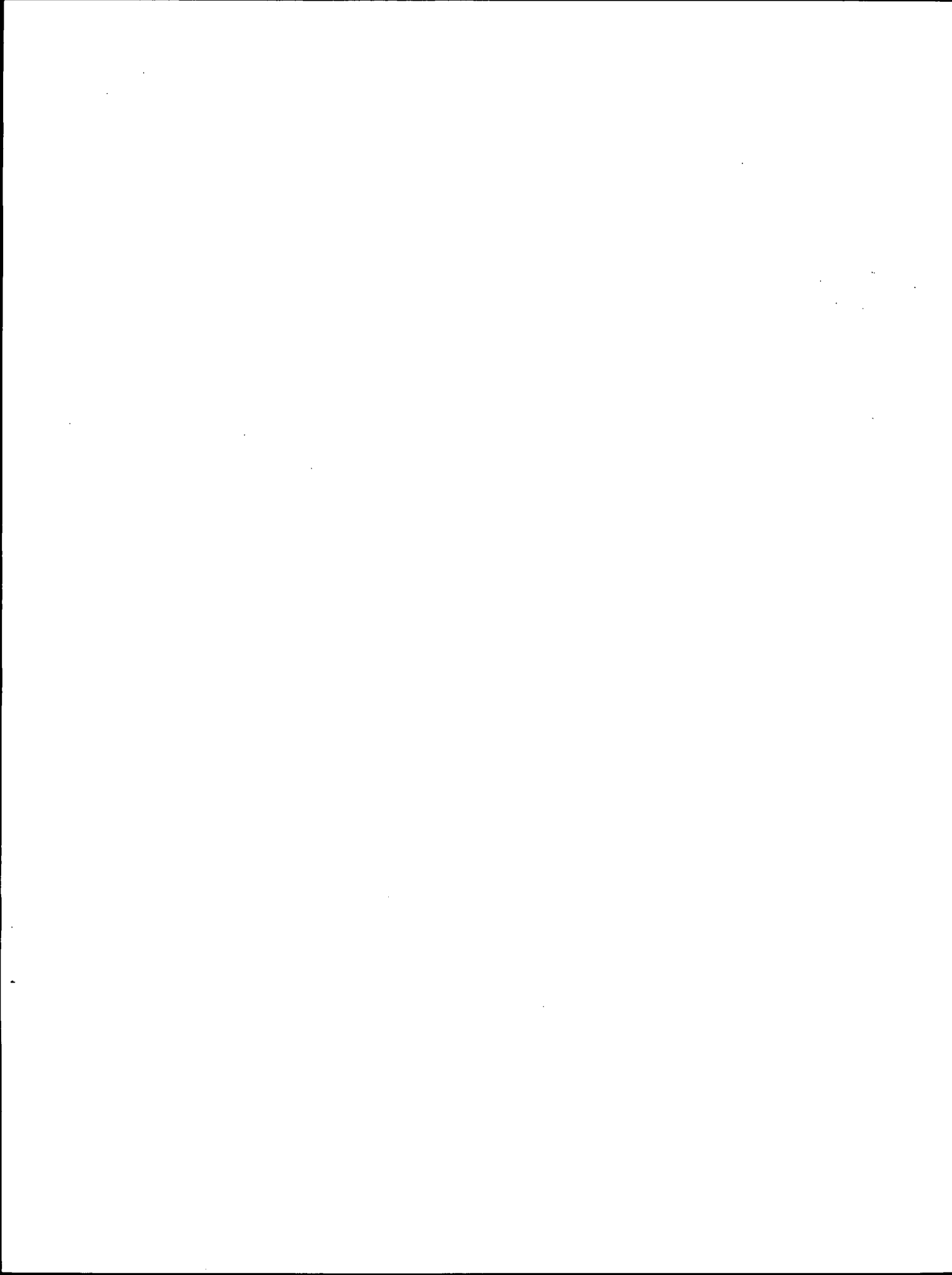


Figure 3.7

VARIATION DES ACCELERATIONS TRANSVERSALES
CRITIQUES γ_{c1} et γ_{c2} en FONCTION DE LA
DECELERATION DE FREINAGE POUR UNE CITERNE
CIRCULAIRE A UN TAUX DE REMPLISSAGE DE 0,9





**4 – FIGURES CORRESPONDANT A L'EXPLOITATION
DU MODELE DYNAMIQUE**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

4.1. - DEFINITION DES COEFFICIENTS D'AMPLIFICATION DYNAMIQUE

- ① Un coefficient d'amplification dynamique (C.A.D.) est égal à la valeur absolue maximale prise par la sortie S pendant son évolution en fonction du temps, divisé par une valeur de référence :
$$\text{CAD}(s) = \frac{|S|_{\max}}{S_{\text{réf}}}$$

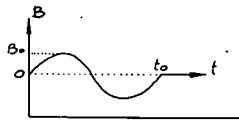
- ② Pour les braquages simples $B(t)$ la valeur de référence est la valeur stabilisée statico dynamique obtenue pour $t = +\infty$



Pour les braquages alternés, la valeur statico dynamique étant nulle, la valeur de référence est égale au produit de l'amplitude du braquage B_0 par une constante K_s ne dépendant que de S (ni de B_0 , ni de E_v , ni de V , ni de t_0).

Le système étant linéaire, S_{\max} est proportionnel à B_0 , C.A.D. est indépendant de B_0 , ce qui a permis de simplifier la programmation.

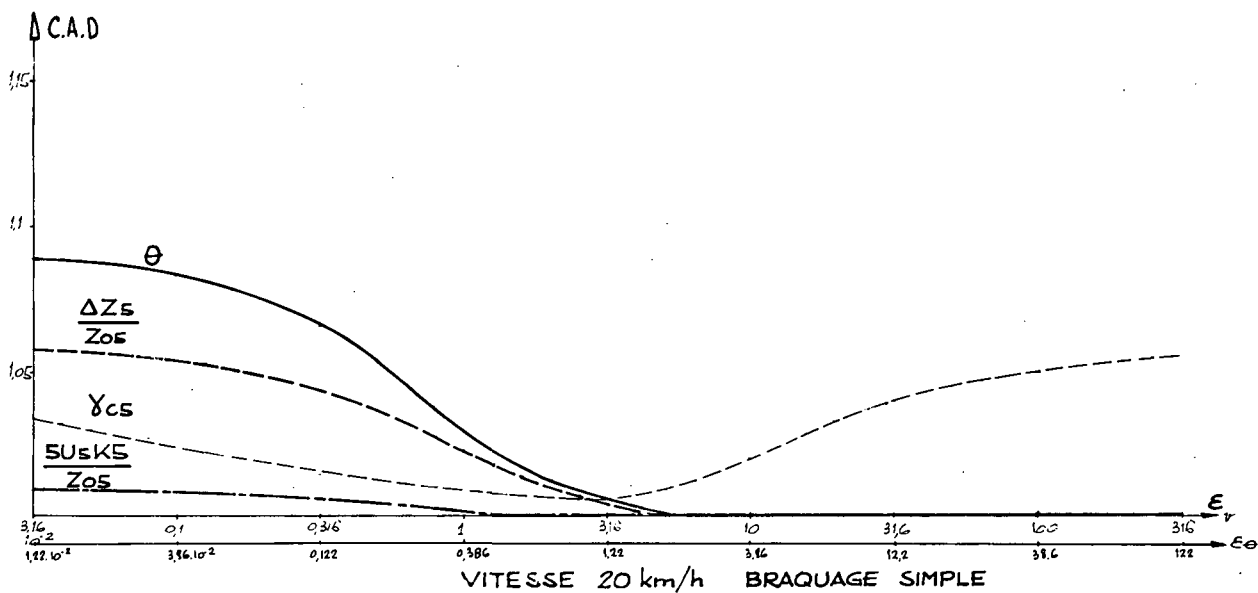
Pour une même sortie S , et pour une même espèce de braquage (simple ou alterné) on peut donc comparer les C.A.D. pour des B_0 , E_v , z , V différents. Les C.A.D. sont sans dimension.

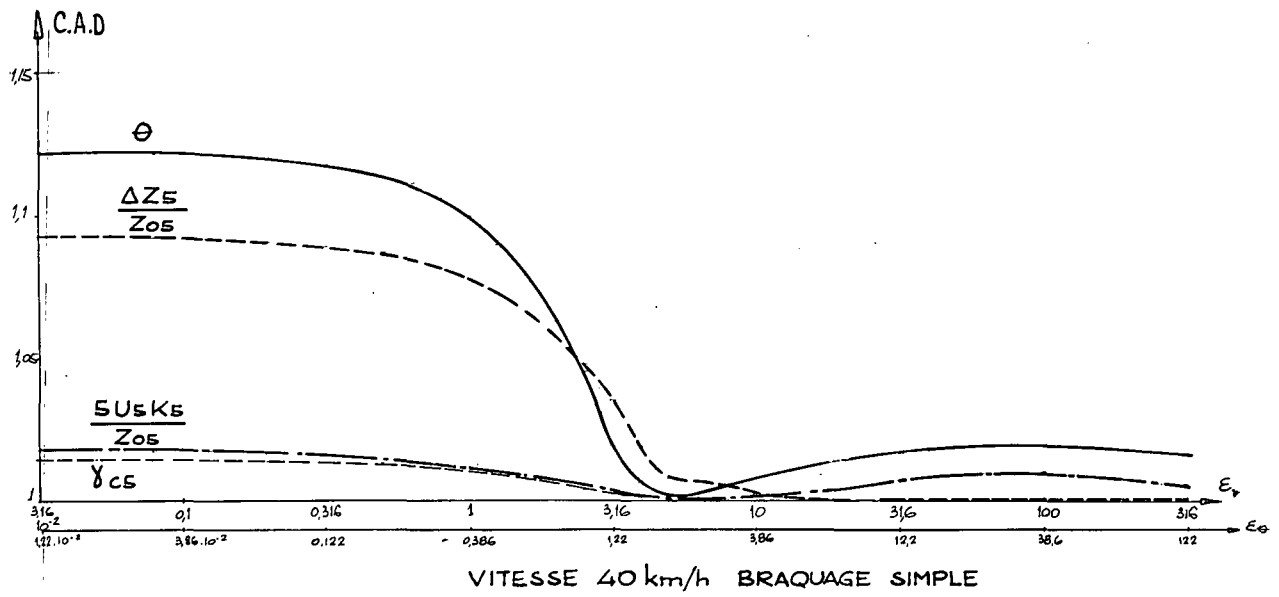


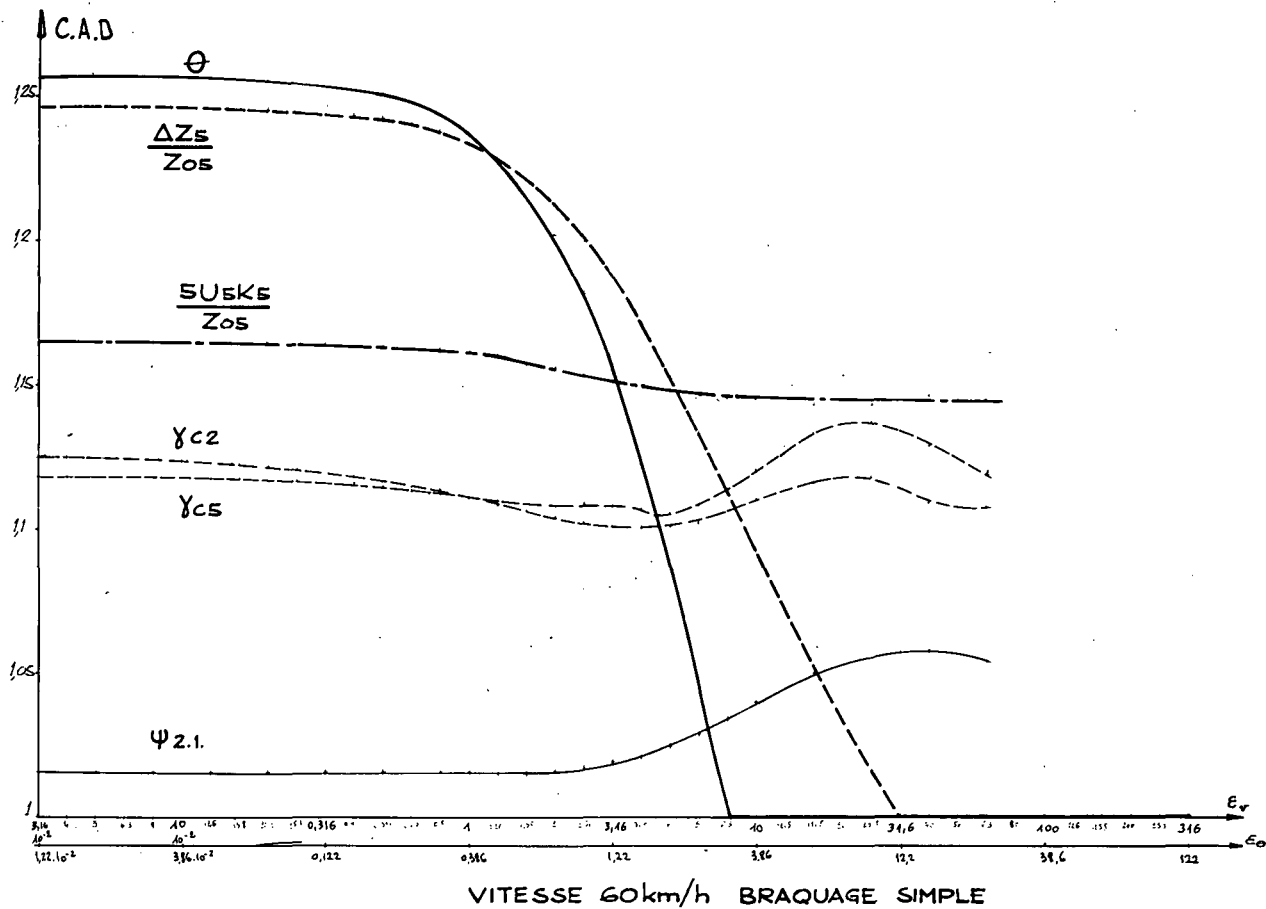
- ③ Echelles :
- L'échelle en E_v est logarithmique. La raison, correspondant à 1cm est $\sqrt[10]{10} \approx 1,259$
 - Pour des raisons de précision pour les valeurs moyennes du C.A.D., l'échelle du C.A.D. est :

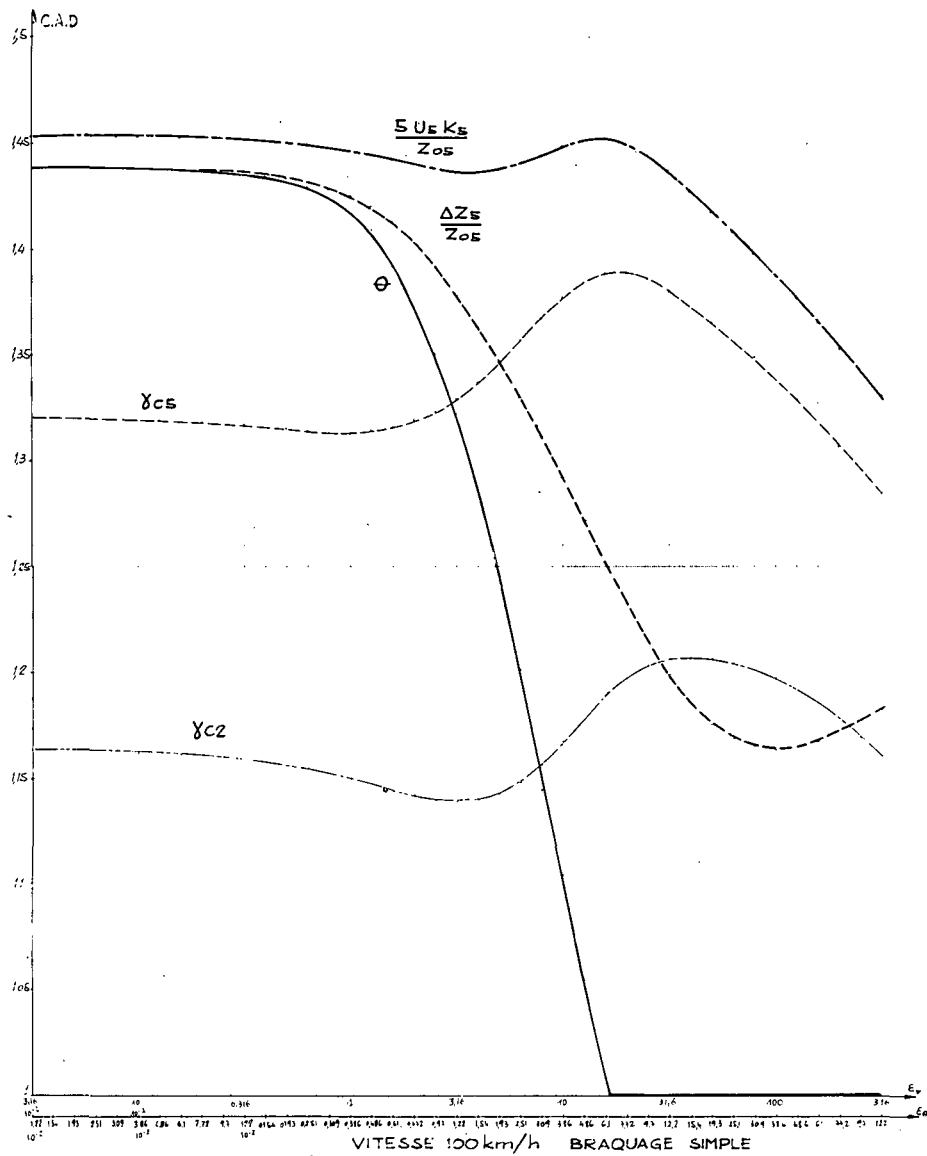
$C.A.D. < 0,75$	logarithmique	raison pour 1cm = $\sqrt[25]{3,75} \approx 1,054$
$0,75 < C.A.D. < 1,5$	linéaire	= 0,01/cm
$1,5 < C.A.D.$	logarithmique	raison pour 1cm = $\sqrt[25]{2} \approx 1,028$

**4.2. VARIATION DU COEFFICIENT
D'AMPLIFICATION DYNAMIQUE
EN FONCTION DE LA VITESSE ET DU TAUX
D'AMORTISSEMENT VERTICAL ϵ_V**









Composition IBM Multipoint
Maquette et Réalisation
dans les Ateliers

FLASH-PLAN

3, rue Marx Dormoy - 94230 Cachan

Tél. 665-57-57