LA NOTION D'ÉLASTICITÉ À TRAVERS LES MODÈLES

*Christian CALZADA, Fei JIANG**

Ces dernières années ont vu, dans le domaine de la prévision de la demande transport, une profusion de valeurs d'élasticités [cf. les nombreux articles publiés dans les notes de synthèse].

Que recouvre au juste ce concept ? Quelles en sont les limites ? Quelles précautions doit-on prendre dans son utilisation ? Le bref exposé qui suit s'efforce d'apporter des éléments de réponse à ces questions au regard des types de modélisation adoptés.

Notions introductives

La théorie micro-économique classique, appliquée au domaine des transports, enseigne que plus le prix unitaire d'un bien de consommation désiré est élevé, *toutes choses égales par ailleurs*, moins grande sera la demande de ce bien au cours d'un intervalle de temps donné.

La fonction de demande de services de transport est donc une fonction monotone décroissante qui revêt généralement deux formes :

- une forme linéaire : $Y = a + b * X$
- une forme puissance : $Y = c * X^{\varepsilon}$

Y : demande de transport exprimée par exemple en voyageurs-kilomètres par unité de temps,

X : coûts : unités monétaires par voyageur-kilomètre, temps passé en heures par voyageur-kilomètre, ou une combinaison de consommations de ressources pondérées en fonction de leurs prix (coûts généralisés).

L'élasticité est le rapport entre la variation relative d'une grandeur à la variation relative d'un facteur causal supposé ou avéré.

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{Y^1 - Y^0}{Y^0}}{\dfrac{X^1 - X^0}{X^0}} = \frac{dY}{dX} * \frac{X}{Y},$$

variation en pourcentage de la demande Y lorsque la durée de trajet X varie de 1 %.

L'indice 0 caractérise la situation initiale et l'indice 1 la situation nouvelle suite à la mise en place, par exemple, d'une nouvelle infrastructure (gains de temps).

Il s'agit d'un rapport de variations relatives de deux variables. Il suffit donc de connaître les variations relatives des ratios sans nécessairement avoir besoin de savoir comment les 100 % des numérateurs et dénominateurs sont définis. La large diffusion du concept tient à sa simplicité, même si celui-ci est relativement abstrait et difficile à valider empiriquement. En effet, il existe quelques inconvénients majeurs à son utilisation, surtout quand il s'agit d'afficher des « valeurs exactes ».

Prenons l'exemple de la forme puissance. C'est la seule forme dans laquelle l'élasticité est constante sur l'ensemble de la courbe de la fonction de demande transport. Autrement dit, pour toutes les autres formes, l'élasticité (variable) dépendra des variables explicatives considérées. On aura ainsi pour la forme linéaire :

$$\varepsilon = \frac{dY}{dX} * \frac{X}{Y} = \frac{b * X}{a + b * X}$$: l'élasticité dépend de X .

---

* Inrets/Dest.

Un exemple d'application : **le modèle QuinQuin Fret (Let)**
Dans ce modèle, on définit une relation linéaire entre les taux de croissance de la variable de demande observée (T, tonnages transportés) et de l'indice de la production industrielle (IPI) :

$$\frac{\Delta T}{T} = a * \frac{\Delta IPI}{IPI} + b + u \qquad u \text{ étant le résidu}$$

ce qui donne comme élasticité variable :

$$\varepsilon = \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta IPI}{IPI}} = a + b * \frac{IPI}{\Delta IPI}$$

Elasticités et modèles de prévisions de trafics

Comprendre ce que revêt la notion d'élasticité dans les modèles de prévisions de trafics passe par l'examen des formes diverses que peuvent prendre ces élasticités suivant le type de spécification adopté et leur contexte d'application.

Spécification linéaire :
Formellement (demande de type *Marshall*), on a :

$$\varepsilon_k = \frac{\partial Y}{\partial X_k} * \frac{X_k}{Y}$$

L'élasticité dépend alors des valeurs des variables X_k. Il reste que, pour un grand nombre de variables explicatives, l'hypothèse de linéarité peut ne pas être réaliste.

Spécification de type log-log (Cobb-Douglas)
La fonction de demande a une forme de type produit. On a alors :

$$\varepsilon_k = b_k$$

b_k est le coefficient du logarithme de la variable explicative X_k
Ce type de forme fonctionnelle, de loin la plus utilisée, induit que :
- les élasticités de la demande sont les coefficients des variables explicatives,
- la forme log-log permet de « modéliser » les effets non linéaires (*linéarisation*),
- la forme de la fonction de demande est une fonction d'utilité de type *Cobb-Douglas.*

Les variantes des modèles de type gravitaire et les « *abstract mode models* » ont utilisé invariablement ce type de forme fonctionnelle.

L'estimation des élasticités croisées et de substitution [cf. encadré] pose des problèmes statistiques et économiques. Les coefficients associés sont en effet souvent non significatifs. On est alors souvent amené à introduire dans les équations de demande des rapports de prix, ce qui suppose implicitement que les deux biens pris en compte sont substituables et que la réponse à la demande à une variation de son prix est identique, en valeur absolue, à la réponse de cette même demande à une variation du prix de son substitut !

Spécification à correction d'erreur : élasticités de court et de long terme
La formulation habituelle d'un modèle de prévision de trafic à correction d'erreur est la suivante :

$$\Delta \ln(Trafic_t) = \beta * \ln X_t + \gamma * [\ln(Trafic_t) - \alpha_1 * \ln(X_t) - \alpha_1] + \varepsilon_t$$

avec $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ (différences premières)
Le modèle à correction d'erreur associe des effets de court et de long termes dans une même équation, en intégrant une relation d'équilibre de long terme (partie entre crochets) dans un modèle dynamique qui fournit l'élasticité de court terme.

L'estimation se fait en deux étapes :

* ***étape* n°1** : équation d'équilibre de long terme

$\ln(Trafic_t) = \overline{\alpha_1} * \ln(X_t) + \overline{\alpha_1} + z_t$

* ***étape n°2*** : estimation de la partie dynamique du modèle après intégration du résidu z_t de l'estimation de l'étape n°1

$\Delta \ln(Trafic_t) = \hat{\beta} * \ln X_t + \hat{\gamma} * z_{t-1} + \upsilon_t$

On en déduit l'élasticité de **court terme** : $\hat{\beta}$

et l'élasticité de **long terme** : $\overline{\alpha_1}$

Exemple : **Elasticités de long et de court termes du fret à la croissance économique et aux prix de transport** (cf. Notes de synthèse du SES, n° 104, juillet-août 1996, Karine Meyer).

L'objectif consistait à mesurer les effets de la croissance économique et des prix relatifs des transports sur les trafics de marchandises en utilisant des techniques d'estimation dites de cointégration. L'auteur concluait à la seule significativité du prix de transport routier dans les modèles de long terme et aboutissait à une élasticité du trafic de fret total au prix du transport routier de marchandises de - 0,24. Ces résultats devaient être ensuite affinés par type de produit pour le trafic ferroviaire.

Spécification d'un modèle de choix discret de type logit

Soit une variable latente $V \in \Re^I$: $L(v) = dG(v_1 - X_1^{'}\beta, \ldots, v_I - X_I^{'}\beta)$

où X_i est le vecteur des variables pour l'alternative i des variables explicatives de I, actions alternatives entre lesquelles l'agent doit choisir.

Quand les variables explicatives sont prédéterminées, on peut aussi écrire le modèle sous la forme :

$V_i = X_i^{'}\beta + \varepsilon_i$ où i est la partie aléatoire du modèle.

Si l'on fait l'hypothèse que les termes d'erreurs ε_i sont indépendamment et identiquement distribués et suivent une distribution de *Gumbel* de type 1 : $\Pr\{\varepsilon_i \le \varepsilon\} = \exp[-\exp(-\varepsilon)]$,

l'on obtient la formulation classique du modèle logit multinomial :

$$P_n(i) = \frac{\exp(V_{in})}{\sum_{j \in J} \exp(V_{jn})}$$

Si la fonction d'utilité est linéaire sur les paramètres, le modèle s'écrit :

$$P_n(i) = \frac{\exp(\beta_X^{'} X_{in})}{\sum_{j \in J} \exp(\beta_X^{'} X_{jn})}$$

X_{in} : variables explicatives représentant les caractéristiques des voyageurs et du service de transport.

β_X : vecteur de paramètres à estimer, $\beta_X^{'}$ sa transposée.

L'élasticité directe représente ici la réponse de la probabilité de choix au changement marginal de la variable explicative :

$$E_{x_{ink}}^{P_n(i)} = \frac{\partial P_n(i)}{\partial x_{ink}} * \frac{x_{ink}}{P_n(i)} = \frac{\partial \ln P_n(i)}{\partial \ln x_{ink}} = [1 - P_n(i)] x_{ink} \beta_k$$

En présence d'une variable dite « spécifique à l'alternative » dans le modèle, un changement de cette variable influence non seulement la fonction qui l'incorpore mais aussi les autres fonctions d'utilité. Ainsi l'élasticité croisée de la probabilité d'alternative i par rapport à une variable d'alternative j s'écrit : $E^{P_n(i)}_{X_{ink}} = [-P_n(j)] x_{jnk}\beta_k$. pour $i \neq j$

Une des propriétés des modèles logit est qu'il conduit à des élasticités croisées uniformes, autrement dit que les élasticités croisées de toutes les alternatives, dans le cadre du changement d'un attribut affectant seulement l'utilité de l'alternative j, sont égales pour toutes les alternatives $i \neq j$.
Dans ces modèles (ex. modèles de parts de marché, logit simple ou généralisé), on obtient des élasticités-prix des parts de marché, notion à ne pas confondre avec celle d'élasticité-prix dite *conventionnelle*. On montre que l'élasticité-prix conventionnelle de la demande de transport i par rapport au prix de transport j est égale à la somme de l'élasticité-prix de la part de marché de j et de l'élasticité-prix de la demande totale de transport au prix j.
A très court terme ou dans le cas où la demande totale est constante, on considérera qu'il y a égalité entre ces deux types d'élasticités.
Les élasticités issues des modèles logit présentent l'avantage d'être variables par l'intermédiaire des parts de marché ; elles prennent en compte des changements susceptibles d'intervenir dans les comportements de substitution. Dans le cas du modèle logit simple, il ne faut pas oublier que le ratio des deux parts de marché est supposé indépendant du prix des autres demandes !

D'autres types de spécification existent, notamment les spécifications de type Box-Cox. Pour en savoir plus, il convient de se rapporter notamment aux travaux de Marc Gaudry[1].

***Exemple :* Application dans le cadre du choix modal voyageur train-avion sur données de préférences**
cf. Notes de synthèse du SES, n° 124 , pp. 9-14, juillet-août 1999, *Mesures de la valeur du temps de transport : à la recherche d'un compromis entre agrégation et variabilité*, Thierry Blayac, Anne Causse.
Il s'agissait ici de tester le recours à des formes non linéaires et d'en observer l'impact sur les valeurs du temps. Les auteurs constatent que l'utilisation d'une forme non linéaire accroît le pouvoir explicatif du modèle et que les élasticités (directes et croisées) calculées pour des valeurs moyennes identiques sont largement supérieures en valeur absolue à celles du cas linéaire. Au point moyen, le modèle linéaire sous-estimerait les réactions des usagers.

Les fonctions de production
Les élasticités issues des modèles construits à partir de la théorie de la production ont l'avantage de s'appuyer sur des bases théoriques formelles : les fonctions de production et la théorie de la dualité.
On peut distinguer trois familles de fonction de production :
* les fonctions de production à coefficients rigides (dites de *Walras-Léontief*) : proportions constantes entre facteurs de production, couplage réduit entre facteurs et produits, élasticités de substitution nulles,
* les fonctions de production à élasticités constantes de type *Cobb-Douglas* (CES) : élasticités de substitution constantes dans le temps et égales quels que soient les facteurs considérés,
* les fonctions de production à élasticités de substitution non contraintes et variables (BCG : Box-Cox Généralisé, forme flexible de *Fourier*) : l'élasticité partielle de substitution tient compte de tous les facteurs de production et il s'agit

[1] : - *Strategic European Multi-modal Modelling* (STEMM), Work Package 4A : *Software Design and Implementation - Passengers : complete final report*, Marc Gaudry, BETA, août 1998, octobre 1998, *Université Louis Pasteur Strasbourg*.
- PROBABILITY : The P-2 to P-6 *programs fort the standard and generalised* BOX-COX LOGIT *and* DOGIT *and for the Linear and Box-Tukey* INVERSE POWER TRANSFORMATION *models with disaggregate data*, Tran Liem, Marc Gaudry, Working paper BETA n° 9802, janvier 1998, *Université Louis Pasteur Strasbourg*.

d'une formulation dynamique qui permet de dissocier, effets de court et de long termes.

Exemple **: Estimation de l'élasticité de substitution capital - travail dans le TRM sur données de panel, fonction CES**
Un exemple d'une telle estimation a été présenté dans l'article *Complémentarité des facteurs de production dans le TRM en France,* paru dans les Notes de synthèse du SES, n° 115, janvier-février 1998, pp. 33-38, Guillaume Delvaux, Richard Duhautois.

Soient :

K_{it} : stock de capital, en l'occurrence le parc routier à moteur en volume.

L_{it} : stock de travail, représenté par le nombre de conducteurs.

r_{it} : coût d'usage du capital ; il comprend la valeur du parc routier, son coût de financement et le taux de dépréciation.

w_{it} : coût du travail, quotient de la rémunération totale par les effectifs salariés.

Q_{it} : chiffres d'affaires hors taxe.

On estime l'équation suivante :

$$Log\left[\frac{K}{L}\right] = -\sigma Log\left[\frac{r}{w}\right] + (\sigma - 1) Log\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]$$

L'élasticité de substitution (σ) vaut entre 0,2 et 0,4 pour l'ensemble du TRM, ce qui traduit une forte complémentarité entre les facteurs travail et capital.

Spécification dans les modèles de trafics dynamiques sur séries temporelles

cas n°1 : Le modèle autorégressif (ou à variable expliquée retardée) à un retard :

$$\ln(Trafic_t) = a * \ln(Trafic_{t-1}) + b * \ln(X1_t) + c * \ln(X2_t) + \ldots + k$$

b est l'élasticité de **court terme** ε_{CT} du $Trafic$ par rapport à la variable explicative $X1$

$\frac{b}{1-a}$ est l'élasticité de **long terme** ε_{LT} du $Trafic$

Remarquons que $\frac{\varepsilon_{LT}}{\varepsilon_{CT}} = \frac{1}{1-a}$ est identique pour toutes les variables explicatives !

cas n°2 : Le modèle à retards échelonnés sur les variables explicatives

$$\ln(Trafic_t) = a_0 * \ln(X1_t) + a_1 * \ln(X1_{t-1}) + a_2 * \ln(X1_{t-2}) + \ldots + b_0 * \ln(X2_t) + b_1 * \ln(X2_{t-1}) + \ldots + k$$

a_0 est l'élasticité de **court terme** du $Trafic$ par rapport à la variable explicative $X1$

$\sum_i a_i$ est l'élasticité de **long terme** du $Trafic$ par rapport à la variable explicative $X1$

Il convient de noter que le quotient $\frac{\varepsilon_{LT}}{\varepsilon_{CT}}$ peut varier d'une variable explicative à l'autre et qu'il est estimé avec une contrainte assez arbitraire sur la forme fonctionnelle des coefficients relatifs à une variable explicative, ce qui rend l'élasticité de court terme peu fiable (par rapport au cas n°1), alors qu'a contrario l'élasticité de long terme est plus fiable que dans le cas n° 1, car la somme des coefficients a_i dépend faiblement de la forme fonctionnelle choisie.

***Exemple* : Elasticités du trafic ferroviaire de voyageurs à la consommation et aux prix**

cf. Notes de synthèse de l'OEST, n° 96, novembre 1995, Ruth Bergel, Jean-Christophe Blain, Fei Jiang, *Elasticités du trafic ferroviaire de voyageurs à la consommation et aux prix.*

Sur la base de séries trimestrielles de trafic sur le réseau principal exprimées en voyageurs-kilomètres et au regard des variables explicatives suivantes : consommation finale des ménages en volume, recette tarifaire au voyageur-kilomètre en francs constants, prix des carburants voiture pondéré par leurs consommations respectives en super carburant et en gazole, les auteurs constatent :

- des élasticités à court terme inférieures de moitié aux élasticités de long terme ;
- une élasticité à long terme à la consommation des ménages proche de 1 ;
- une élasticité à long terme au prix du train plus faible en première classe qu'en seconde classe.

Précautions d'usage

Tout modèle économétrique, de par sa nature, prolonge les tendances passées. Dès lors, le maniement de coefficients d'élasticités dans une prospective de long terme s'avère très délicat. Les spécifications à élasticités variables (de type *Translog*) ainsi que le recours au *progrès technique* permettent de tenir compte des déformations de structure de la production au cours du temps et reposent, contrairement aux formes log-linéaires, sur des bases théoriques robustes. Le long terme dans les modèles économétriques est celui où les effets du paramètre de retard d'adaptation deviennent négligeables (périodes de 2 à 5 ans). Or, souvent, les investissements en infrastructures ont une durée de vie de 20-30 ans, ce qui justifie des sollicitations pour des prévisions à vingt ans. L'asymétrie de la demande - autrement dit le fait que les effets d'une baisse ne seraient pas symétriques par rapport à ceux d'une hausse - est rarement prise en compte dans ces modèles, ce qui fragilise les fondements du concept d'élasticité. Avant toute analyse, il est donc important de définir précisément ce que recouvre le concept d'élasticité de la demande : point auquel cette élasticité est mesurée, méthode d'agrégation choisie, structure des variations des prix, période considérée, etc. Enfin, notons que comparer des valeurs d'élasticités de modèles différents n'a que peu d'intérêt, qu'il convient de ne pas accorder trop de crédit aux valeurs trouvées mais plus aux relations de substituabilité-complémentarité entre facteurs ou produits [cf. encadré].

Elasticités de substitution

Ce type d'élasticité permet de déterminer si les biens sont substituables ou complémentaires. Soit f une fonction de production à deux inputs : $y = f(x_1, x_2)$. On définit les produits marginaux des deux facteurs par : $f_1 = \frac{dy}{dx_1}$ et $f_2 = \frac{dy}{dx_2}$

Le taux marginal de substitution du facteur x_2 en x_1 s'écrit :

$$TMS_{2\to 1} = r = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

L'élasticité de substitution est donnée par : $\sigma = \dfrac{\frac{x_1}{x_2} d(\frac{x_2}{x_1})}{\frac{1}{r} dr}$

si $|\sigma| = 0$: les biens sont complémentaires, une modification dans la structure des prix n'entraîne aucune modification dans la structure de la demande,

si $|\sigma| = \infty$: le taux marginal de substitution est constant, la substituabilité des facteurs est parfaite.